# الرياضيات

الفصل الدراسى الأول

## الجزء الخاص بالشرح و التمارين

يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير

معاك
Ma3ak App

التطبيق التفاعلى
للتعلم عن بعد



تقنية جديدة
امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

1
ثانوى
2021

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

# محتويات الكتاب

## أولًا الجبـر وحساب المثلثات

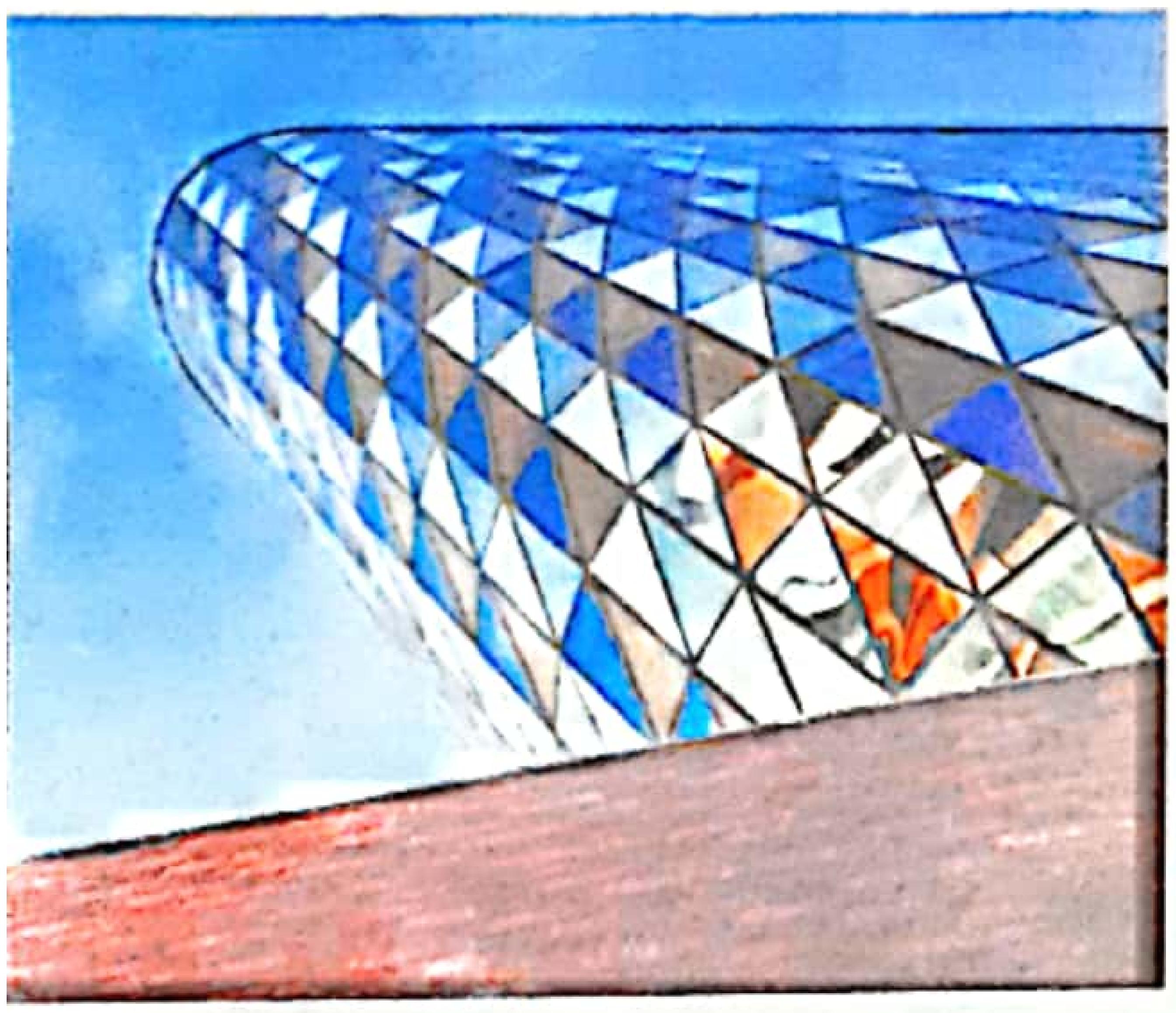




للاطلاع على الموضوعات التى لم تتم دراستها العام الماضى نظراً لتوقف الدراسة فى منتصف مارس امسح هذا الكود

# ثانيًا الهندسة

## الوحدة 3 التشابه



الدرس الأول : تشابه المضلعات.

الدرس الثانى : تشابه المثلثات.

الدرس الثالث : العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس الرابع : تطبيقات التشابه فى الدائرة.

## الوحدة 4 نظريات التناسب فى المثلث



الدرس الأول : المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس الثانى : نظرية تاليس.

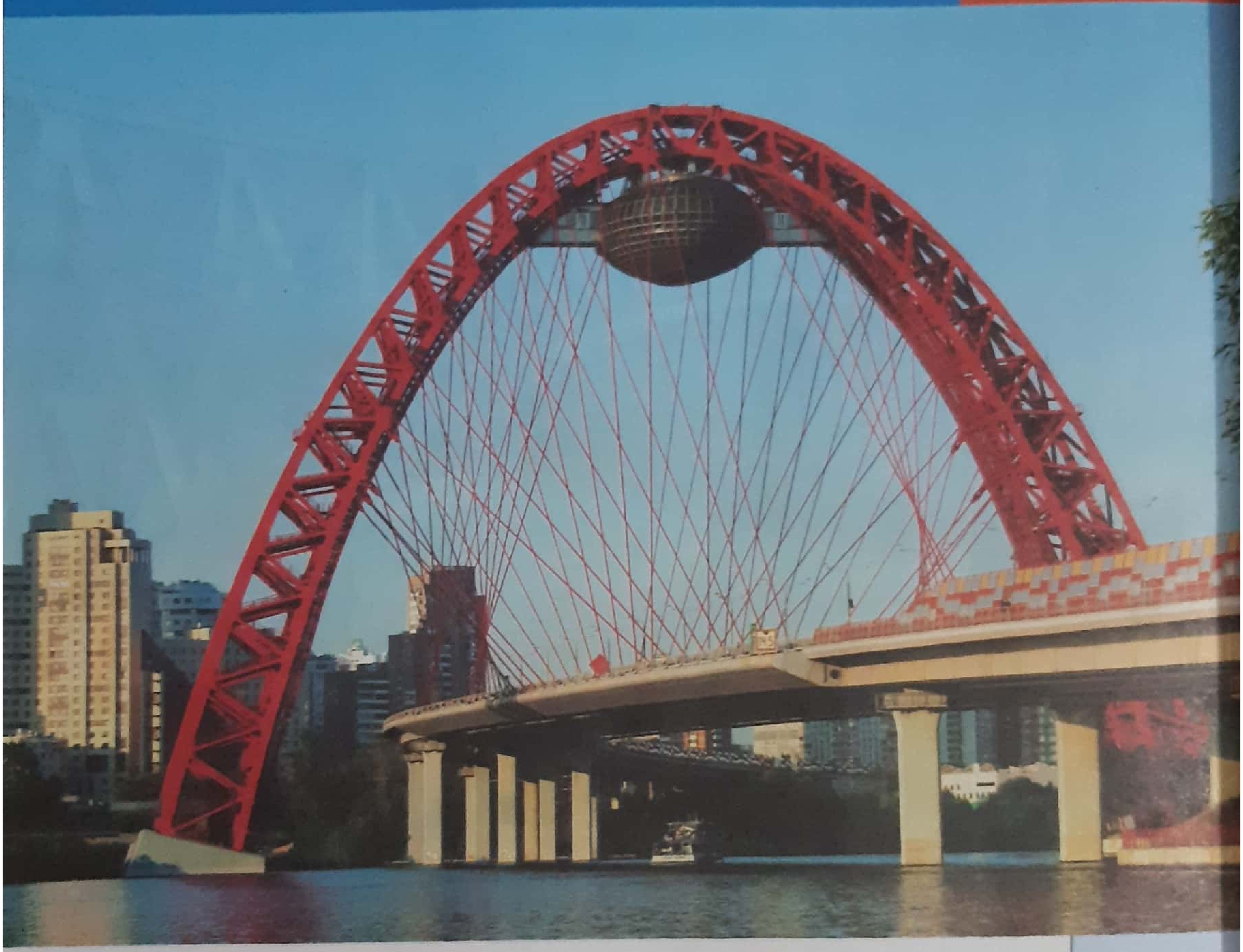
الدرس الثالث : منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الدرس الرابع : تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة (عكس نظرية ٣)

الدرس الخامس : تطبيقات التناسب فى الدائرة.

# أولًا

# الجبر وحساب المثلثات



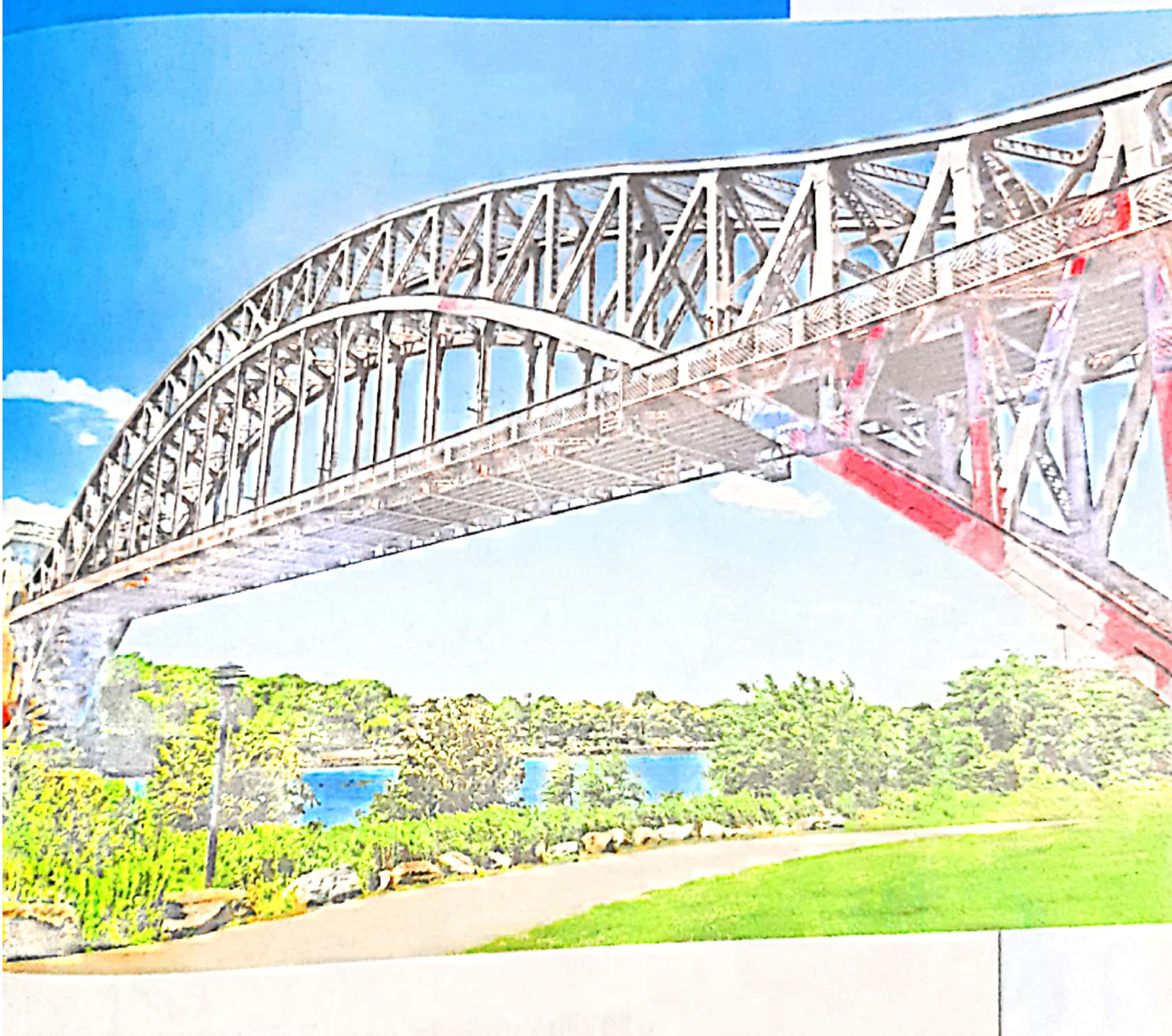
**الوحدة الأولى** الجبر والعلاقات والدوال.

**الوحدة الثانية** حساب المثلثات.

الوحدة

# 1

# الجبر والعلاقات والدوال



## فى نهاية الوحـدة

- تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى.

# دروس الوحدة

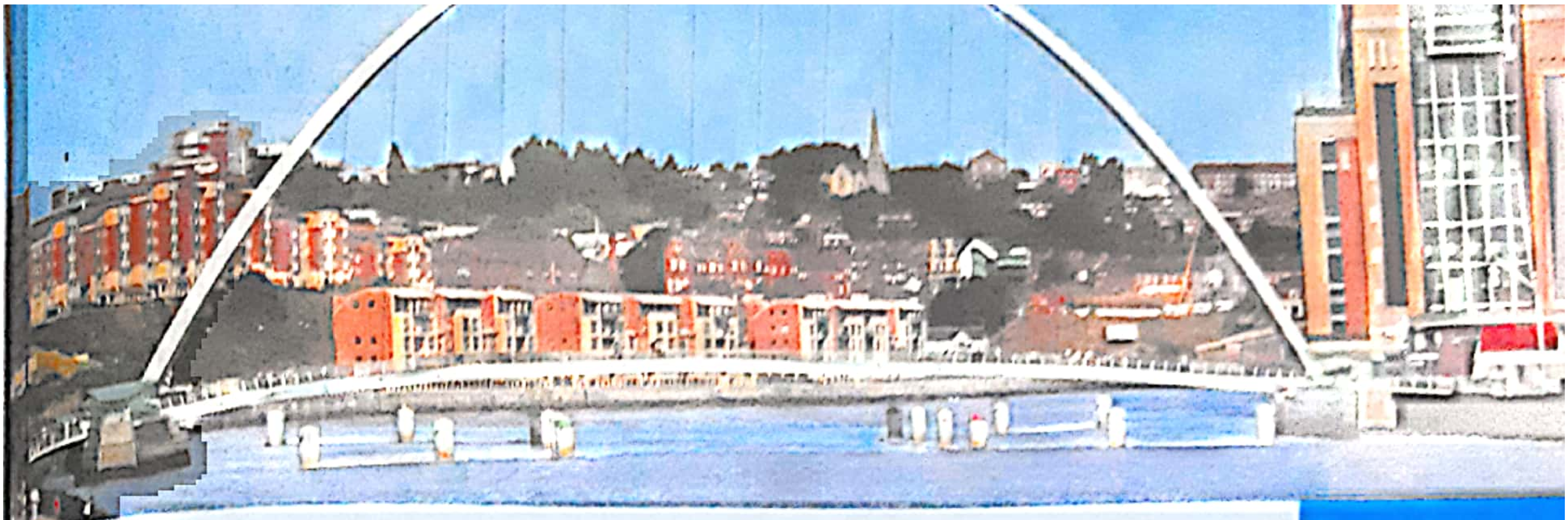
**متطلبات قبلية على الوحدة الأولى**

- الدرس **1** مقــدمـــة عن الأعـــداد المركبـــة.
- الدرس **2** تحديد نــوع جـــذرى المعادلة التربيعيــة.
- الدرس **3** العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.
- الدرس **4** تكويــن المعـــادلة التربيعيــة متى عُلم جذراهـا.
- الدرس **5** إشـــارة الدالــة.
- الدرس **6** متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

## نواتج التعلُم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
- يستخدم معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى حل بعض التطبيقات الحياتية.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب ، قوى ت الصحيحة ، تساوى عددين مركبين).
- يُجرى العمليات على الأعداد المركبة.
- يتعرف العددين المترافقين فى الأعداد المركبة.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يكوِّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد متى عُلم جذراها.
- يكوِّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة (ثابتة ، خطية ، تربيعية).
- يحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.



# متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

## أولًا حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا

### ١ باستخدام التحليل

**مثال ١**

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $س^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

٢ ٤ $س^{٢}$ = ٢٥

**الحل**

١ ∵ $س^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠ [تحليل المقدار الثلاثى]

∴ س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أ، س + ١ = ٠ ومنها س = −١

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −١}

**تذكر أن**

معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد لها حلان على الأكثر فى ح

٢ ∵ ٤ $س^{٢}$ = ٢٥

∴ ٤ $س^{٢}$ − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (٢ س − ٥) = ٠ [تحليل الفرق بين مربعين]

∴ ٢ س + ٥ = ٠ ومنها س = $-\frac{٥}{٢}$

أ، ٢ س − ٥ = ٠ ومنها س = $\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$-\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$}

**حل آخر باستخدام الجذر التربيعى :**

∵ ٤ $س^{٢}$ = ٢٥ ∴ $س^{٢}$ = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ س = $\pm\sqrt{\frac{٢٥}{٤}}$ = $\pm\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$-\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$}

## ٢ باستخدام القانون العام

لإيجاد جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س + ح = $ صفر حيث $أ \neq$ صفر

نستخدم القانون : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ}$

### مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $س^٢ - ٢ س - ٦ = ٠$ .

٢ $س + \frac{٥}{س} = ٤$ حيث $س \neq$ صفر

### الحل

١ المقدار : $س^٢ - ٢ س - ٦$ يتعذر تحليله لذلك نلجأ إلى التعويض فى القانون العام.

$\because أ = ١ \quad ، \quad ب = -٢ \quad ، \quad ح = -٦$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٧}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ + \sqrt{٧} ، ١ - \sqrt{٧}\}$

٢ بضرب طرفى المعادلة فى س : $\therefore س^٢ + ٥ = ٤ س$

$\therefore س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ «لاحظ وضع المعادلة على الصورة : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$»

$\therefore أ = ١ \quad ، \quad ب = -٤ \quad ، \quad ح = ٥$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

، $\because \sqrt{-٤} \notin ح$

$\therefore$ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ . $\therefore$ مجموعة الحل $= \emptyset$

### حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$ .

٢ $٥ س^٢ + ٢ س = ٤$

٣ $٣ س^٢ = ٢٧$

٤ $س (س - ٤) = ٣$

## ثانيًا حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بيانيًا

**لحل المعادلة التربيعية فى متغير واحد بيانيا نتبع الخطوات الآتية :**

١ نضع المعادلة على الصورة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

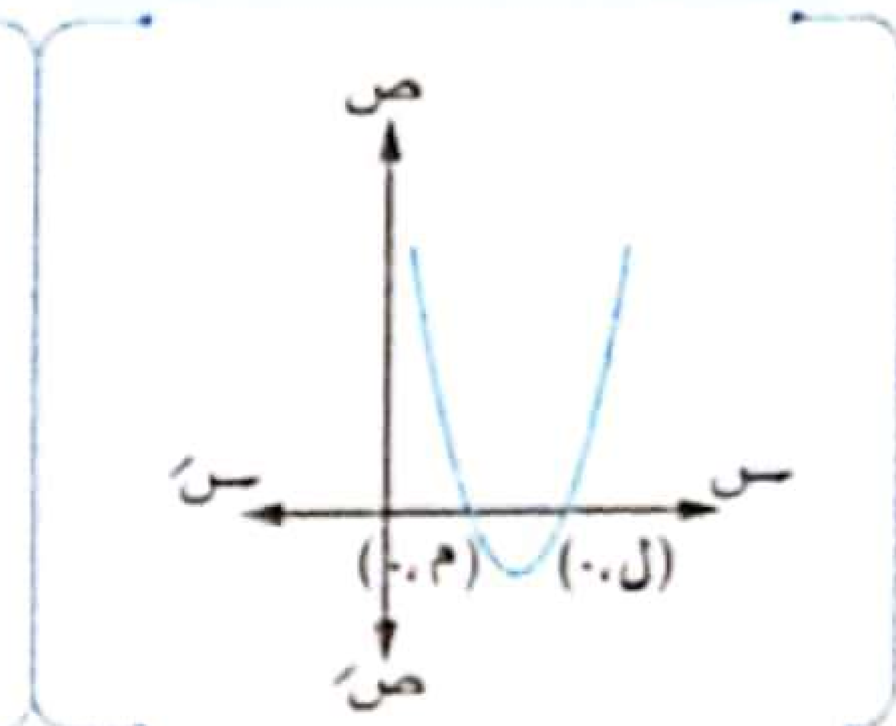
٢ نفرض أن : د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + حـ

٣ نرسم منحنى الدالة د

٤ نعيِّن نقط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هذه هى حلول المعادلة : د (س) = ٠ أى أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

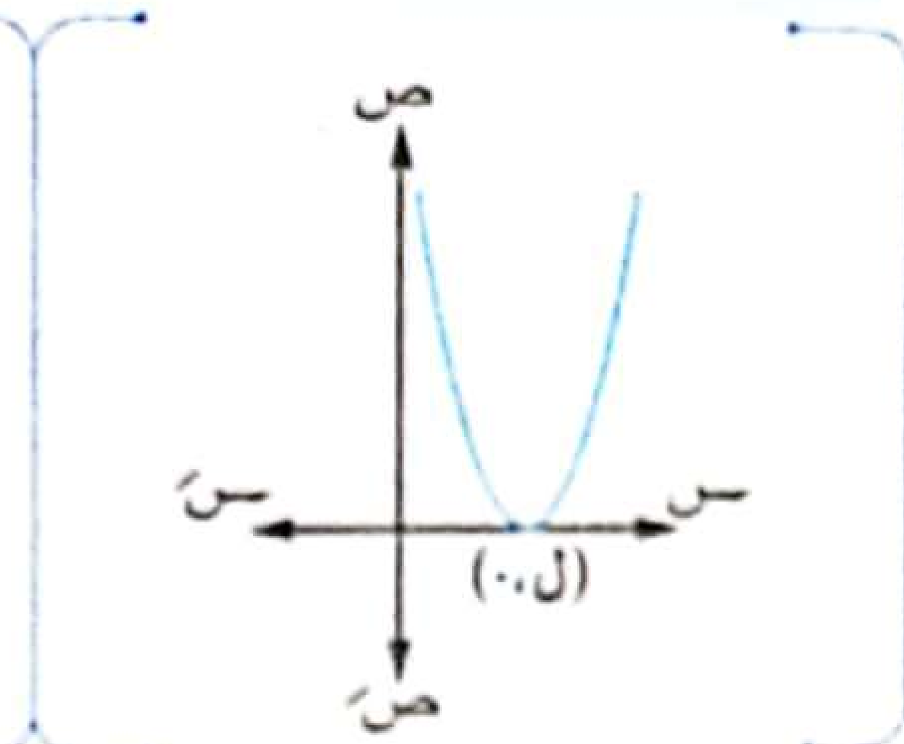
### وعلى هذا فإنه توجد ثلاث حالات

**١ المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين**



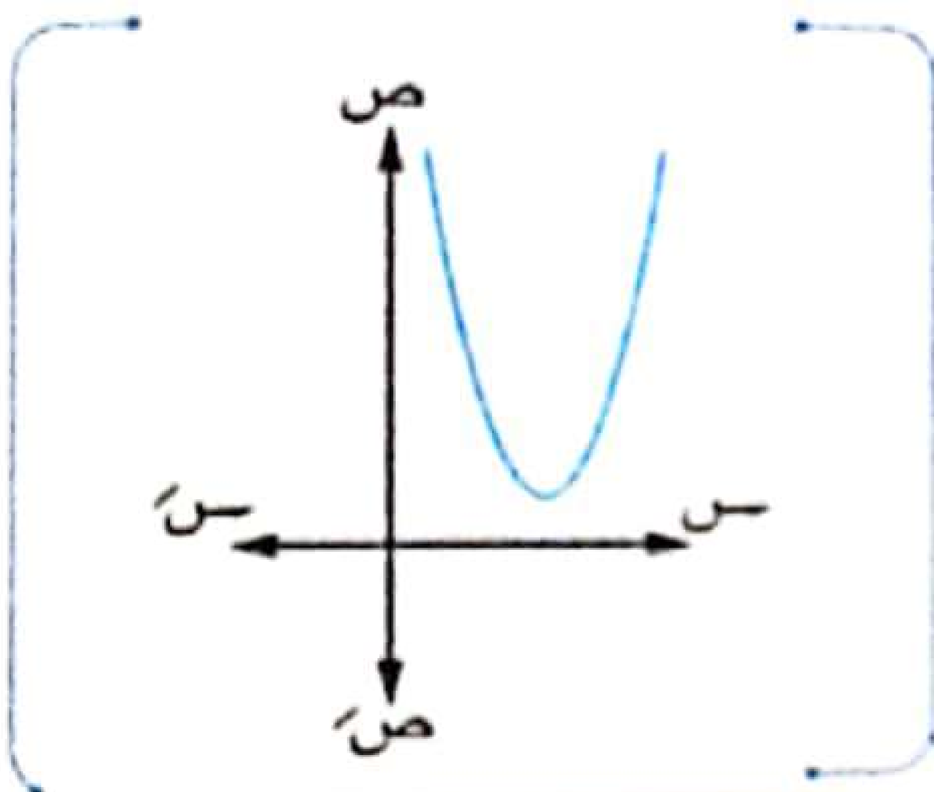

يوجد حلان للمعادلة
فى ح ، م.ح = {ل ، م}

**٢ المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة**




يوجد حل وحيد للمعادلة
فى ح ، م.ح = {ل}

**٣ المنحنى لا يقطع محور السينات**




لا يوجد حل للمعادلة
فى ح ، م.ح = ∅

### مثال ٣

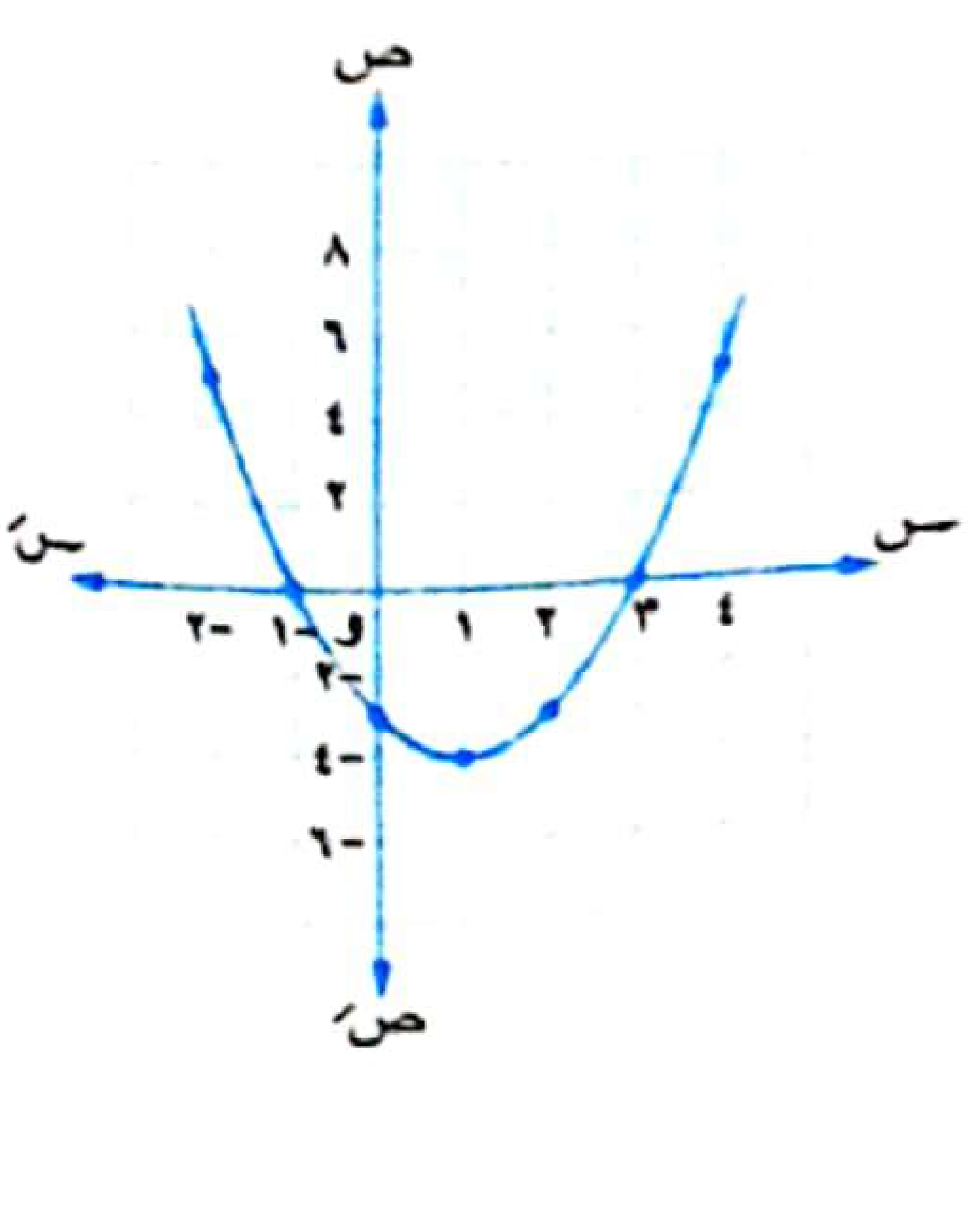
أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ – ٢ س – ٣ = ٠ مستعينًا بالفترة [–٢ ، ٤]

### الحل

نفرض أن : د (س) = س$^{٢}$ – ٢ س – ٣

| س | –٢ | –١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٥ | ٠ | –٣ | –٤ | –٣ | ٠ | ٥ |

من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، –١}



**مـلاحظـة**

فى حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل البيانى فإنه يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى $\left(-\frac{ب}{٢أ} ، د\left(-\frac{ب}{٢أ}\right)\right)$ ثم نوجد عدة نقاط أخرى على يمينها ومثلهم على يسارها.

**مثال ٤**

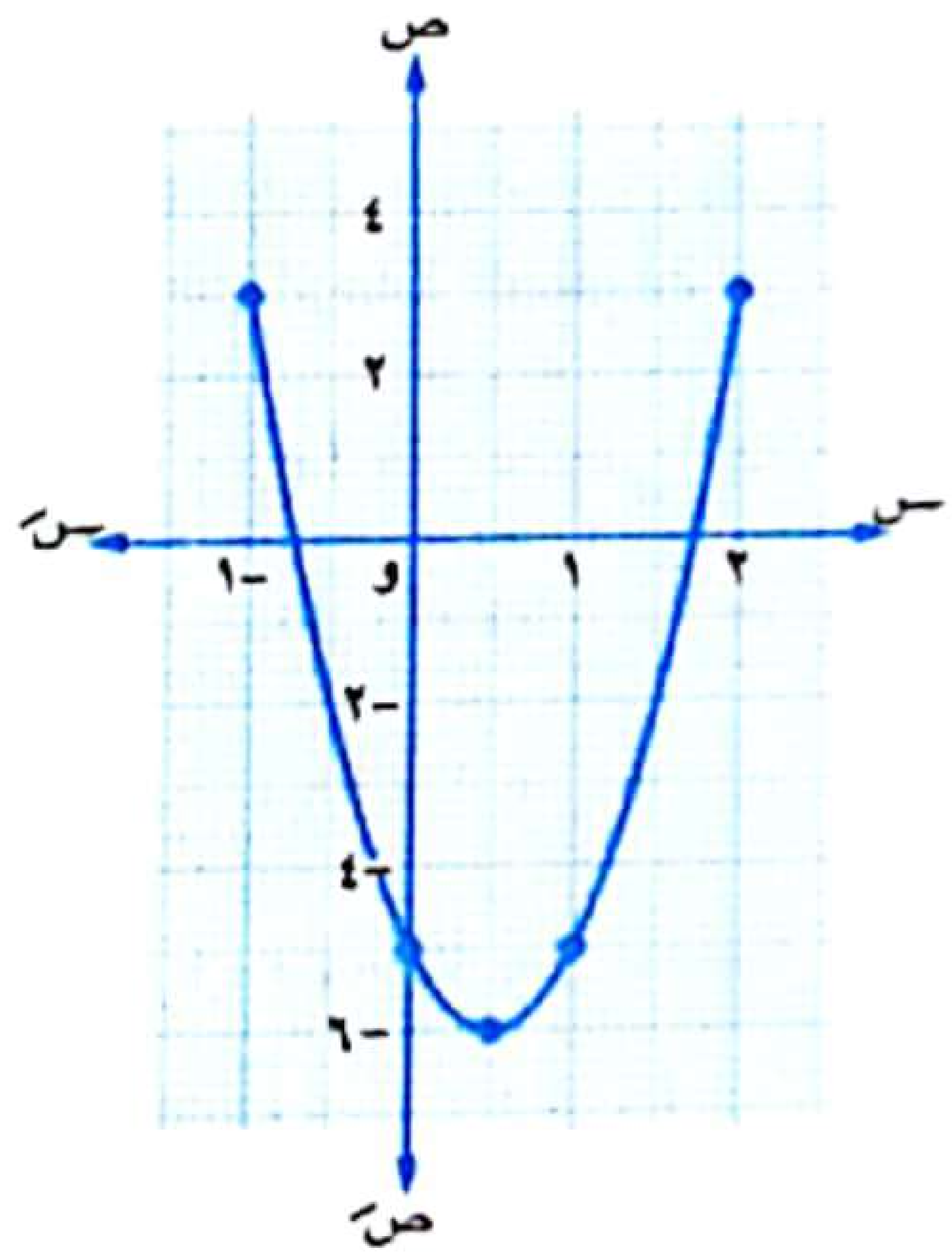
حل بيانيًا فى ح المعادلة : ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ثم حقق الناتج جبريًا [علمًا بأن $\sqrt{٦} \simeq ٢,٤$]

**الحل**

∵ ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ∴ ٤ $س^٢$ − ٤ س − ٥ = ٠

**أولاً : الحل البيانى**

نفرض أن : د (س) = ٤ $س^٢$ − ٤ س − ٥




- نوجد نقطة رأس المنحنى :

∵ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ − ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ − ٥ = −٦

∴ نقطة رأس المنحنى هى $\left(\frac{١}{٢} ، −٦\right)$

- نكون الجدول :

| س | ١− | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ٥− | ٦− | ٥− | ٣ |

- نلاحظ من الرسم أن : جذرى المعادلة هما : −٠,٧ ، ١,٧ تقريبًا

**ثانيًا : الحل الجبرى**

∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أحـ}}{٢أ}$ حيث أ = ٤ ، ب = −٤ ، حـ = −٥

∴ س = $\frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤(٤)(-٥)}}{٢ \times ٤} = \frac{٤ \pm \sqrt{٩٦}}{٨}$

$= \frac{٤ \pm ٤\sqrt{٦}}{٨} = \frac{١ \pm \sqrt{٦}}{٢} \simeq \frac{١ \pm ٢,٤}{٢}$

∴ جذرا المعادلة هما : ١,٧ ، −٠,٧ تقريبًا

**حاول بنفسك**

حل بيانيًا فى ح المعادلة : $س^٢$ − ٤ س + ٤ = ٠ متخذًا س ∈ [٠ ، ٤] ثم حقق الناتج جبريًا.

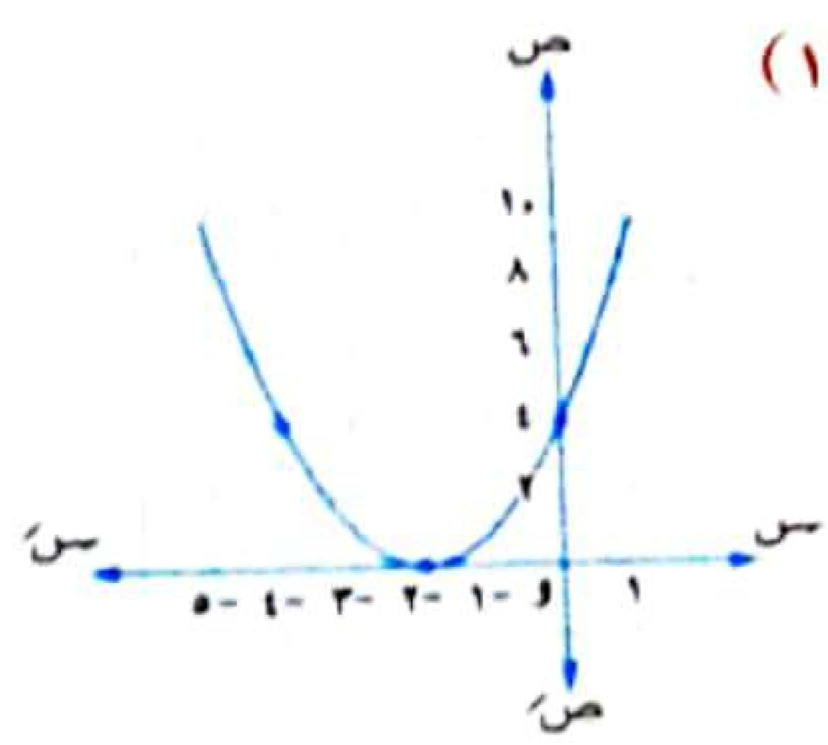
# تمارين على متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسى

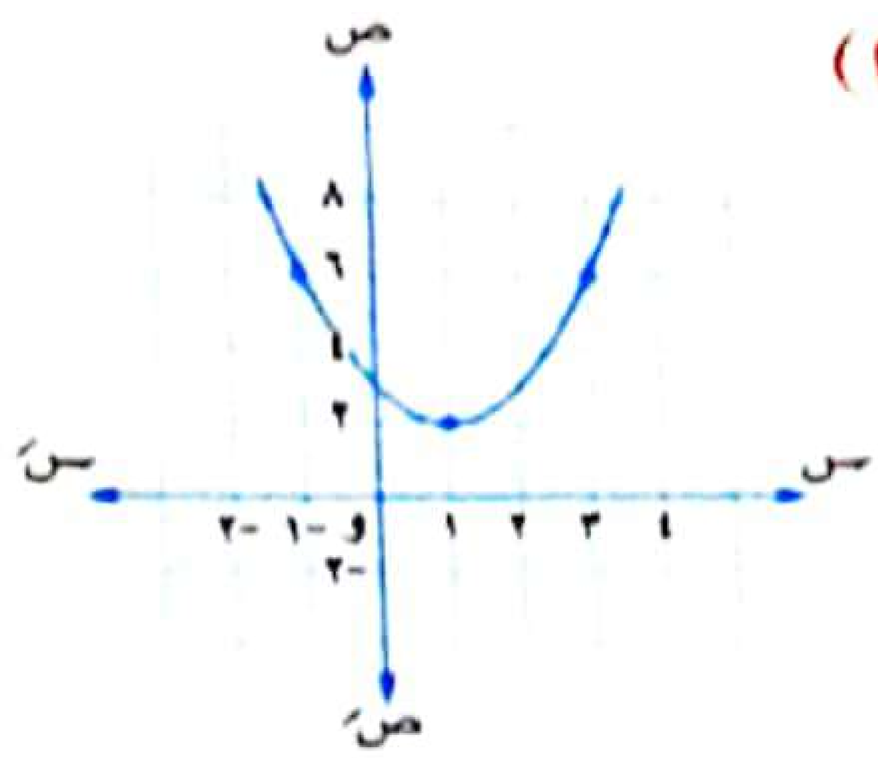
**١** يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية.

أوجد مجموعة الحل فى ح للمعادلة : د (س) = ٠ فى كل شكل.

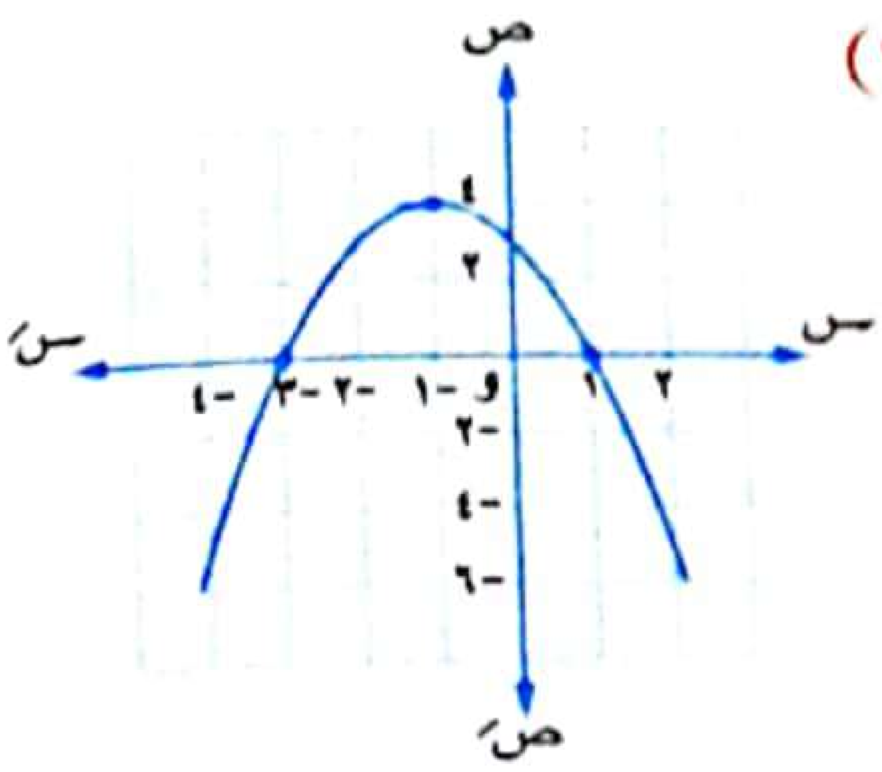
(١)




(٢)




(٣)




**٢** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٢ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ..............

(أ) {٢ ، ٠} (ب) {−٣ ، ٠} (جـ) {−٣ ، ٢} (د) {(٢ ، −٣)}

(٢) مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ − س = ٠ فى ح هى ..............

(أ) {٠ ، −١} (ب) {٠} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١}

(٣) إذا كانت : د (س) = س$^{٢}$ + ب س + حـ ، س = ٢ أحد جذرى المعادلة : د (س) = ٠ فإن : د (٢) = ..............

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) صفر

(٤) إذا كان : س = ٣ جذرًا للمعادلة : س$^{٢}$ + م س = ٣ فإن : م = ..............

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

(٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ١٦ = ٠ هو ٤ فإن الجذر الآخر هو ..............

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) صفر

**٣** أوجد جبريًا مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح :

(١) س$^{٢}$ − ١ = ٠ .

(٢) س$^{٢}$ + ٩ = ٠ .

(٣) س$^{٢}$ + ٣ س = ٠ .

(٤) س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠ .

**٤** أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد :

(١) $س^٢ - ٦ س + ١ = ٠$ (٢) $س^٢ + ٣ س + ٥ = ٠$ (٣) $٢ س^٢ + ٣ س - ٤ = ٠$

(٤) $٣ س^٢ - ٦٥ = ٠$ (٥) $س - \frac{٥}{س} = ٣$ (٦) $\frac{٣}{س - ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = ٢$

**٥** أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبريًا وحقق الناتج بيانيًا :

(١) $س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [-٢ ، ٤]

(٢) $٣ س - س^٢ + ٢ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [-١ ، ٤]

(٣) $س^٢ + ٣ = ٠$ ارسم بيانيًا فى الفترة [-٣ ، ٣]

(٤) $-٢ س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$

**٦** إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة : $ح = \frac{ن}{٢} (١ + ن)$

فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا :

(١) ٧٨ (٢) ١٧١ (٣) ٢٥٣ (٤) ٤٦٥

**٧** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشرط الذى يجعل المعادلة : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$ تربيعية هو ..............

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) أ ≠ ٠ (د) أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

(٢) إذا كان : $(ص - ٤)^٢ = ٣٦$ ، ص < ٠ فإن : ص + ٤ = ..............

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٣) إذا كان : س = ٤ أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + م س = ٤$

فإن : ..............

(أ) م = -٣ (ب) م عدد زوجي.

(جـ) (١ - م) مربع كامل. (د) (أ) ، (جـ) صحيحان.

(٤) الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين : $س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ ، $٢ س^٢ - ٥ س + ٢ = ٠$

هو ..............

(أ) س = ٢ (ب) س = ١ (جـ) س = -٢ (د) $س = \frac{١}{٢}$

**(٥)** إذا كان المنحنى : ص = س (أ − س) فأى من العبارات التالية تكون صحيحة ؟

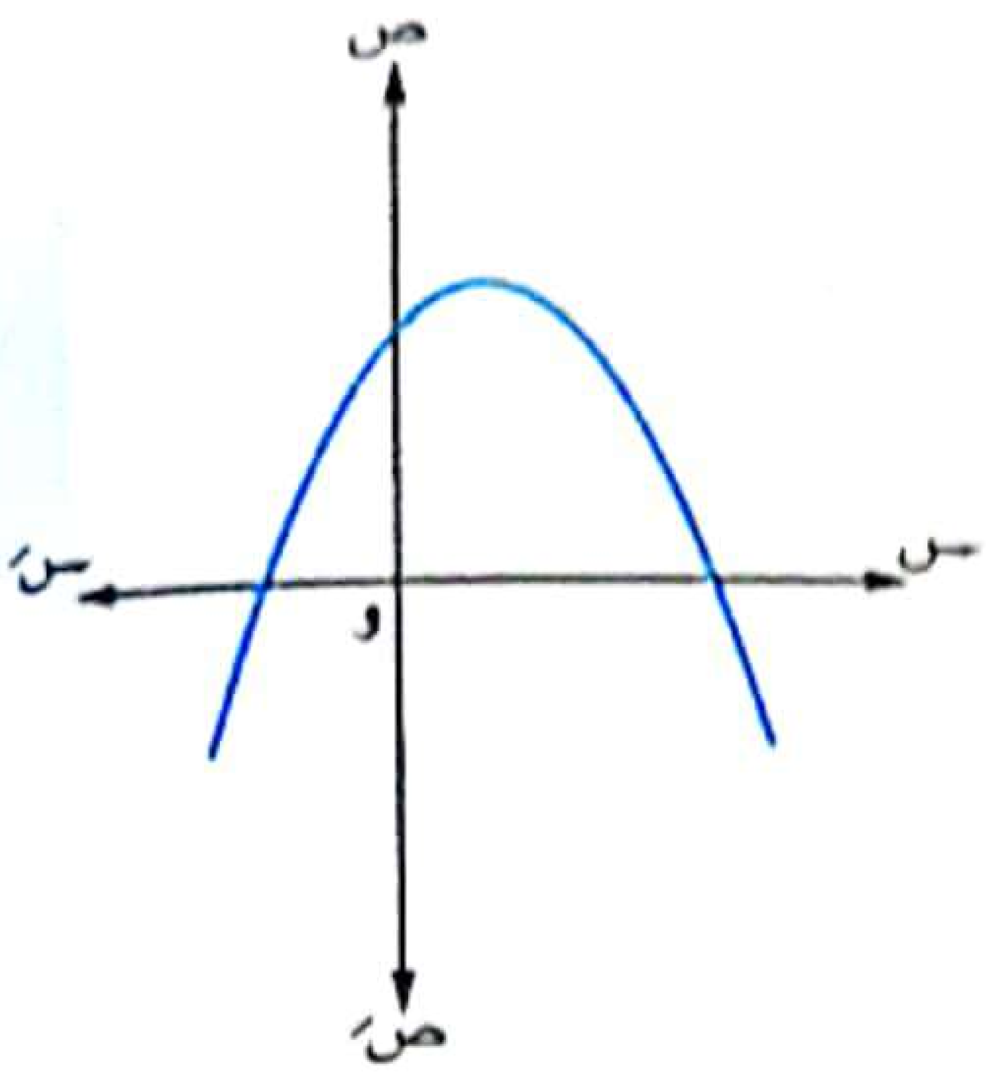
① المنحنى يقطع محور السينات عند النقطتين (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠)

② رأس المنحنى هو $\left(\frac{أ}{٢} ، \frac{أ^{٢}}{٤}\right)$

③ محور التماثل للمنحنى هو س = أ

(أ) ① ، ② فقط. (ب) ① ، ③ فقط. (جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

**(٦)** الشكل المقابل يمثل المنحنى : ص = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ




فأى مما يأتى صحيح ؟

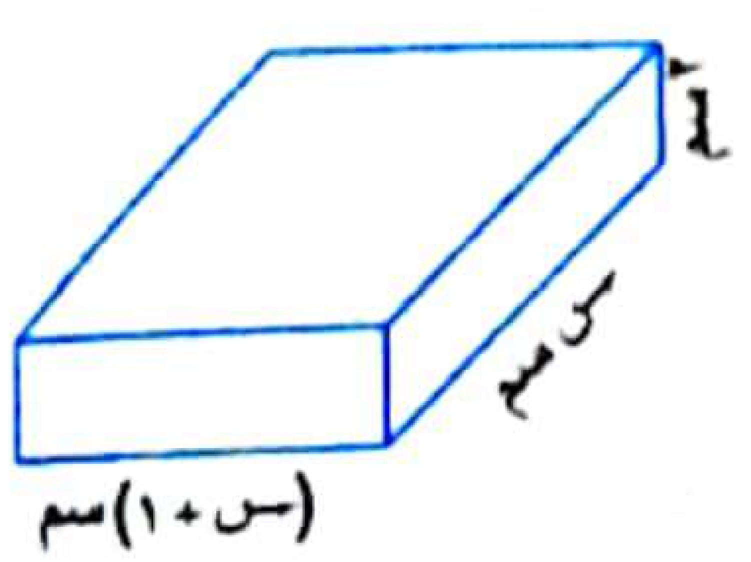
(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠ .

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠ .

(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠ .

(د) أ < ٠ ، جـ < ٠ .

**(٧)** فى الشكل المقابل :



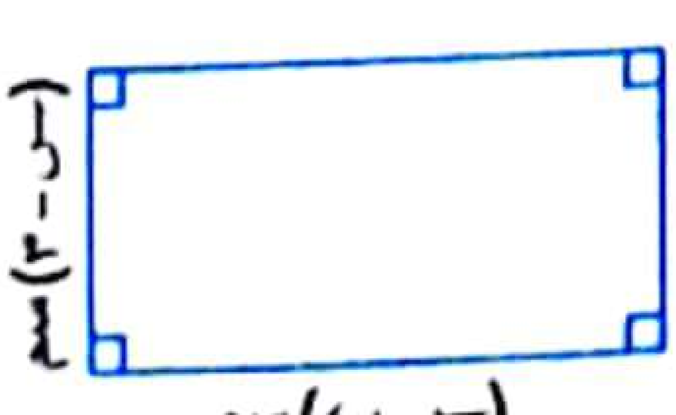

إذا كان حجم متوازى المستطيلات = ٤٠ $سم^{٣}$

فإن : س = ............ سم

(أ) ٧ (ب) ٦

(جـ) ٥ (د) ٤

**(٨)** فى الشكل المقابل :




إذا كانت مساحة المستطيل = ٧٨ $سم^{٢}$

فإن محيط المستطيل = ............ سم

(أ) ٧٨ (ب) ٥٨ (جـ) ٣٨ (د) ١٩

**(٩)** قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار فإن المقدار المضاف يساوى ............ أمتار.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

**8** أوجد قيمة أ التى تجعل س = ٢ أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢}$ − ٢ أ س + ٢ ($أ^{٢}$ − ٦) = ٠ .

«١ + √٥ ، ١ − √٥»

**9** إذا كانت د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ ، د (٠) = −٣

أوجد قيم : أ ، ب ، جـ إذا علم أن جذرى المعادلة : د (س) = ٠ هما ٣ ، $\frac{-١}{٢}$

«٢ ، −٥ ، −٣»



الدرس **1**

# مقدمة عن الأعداد المركبة

## الحاجة إلى مزيد من الأعداد

نعلم أن هناك معادلات ليس لها حل فى ح مثل المعادلة $س^{٢} = -١$ إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى سالب واحد ، لذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلًا لمثل هذه المعادلات ، هذه المجموعة الجديدة من الأعداد تسمى (مجموعة الأعداد المركبة) ، وقبل دراسة مجموعة الأعداد المركبة بشىء من التفصيل سنتعرف أولًا على العدد التخيلى «ت».

## العدد التخيلى ت

يُعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى -١

**أى أن** $ت^{٢} = -١$

وعلى هذا فإنه يمكننا حل المعادلة : $س^{٢} = -١$ كالتالى :

∵ $س^{٢} = -١$ ∴ $س^{٢} = ت^{٢}$

∴ $س = \pm \sqrt{ت^{٢}}$ ∴ $س = \pm ت$ ∴ مجموعة الحل = {ت ، - ت}

**لاحظ أن**

- $ت \times ت = ت^{٢} = -١$
- $-ت \times -ت = ت^{٢} = -١$

**ملاحظات**

- العدد ت ليس عددًا حقيقيًا (لا ينتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية) **أى أن** $ت \notin ح$

  وعلى ذلك يستحيل تمثيله على خط الأعداد الحقيقية.

- الأعداد : ٣ ت ، -٢ ت ، $\sqrt{٥}$ ت ، ... أعداد تخيلية.

- إذا كان أ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن : $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}$ ت

**فمثلاً** $\sqrt{-٢} = \sqrt{٢ ت^٢} = \sqrt{٢}$ ت ، $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣ت^٢} = \sqrt{٣}$ ت ، $\sqrt{-٢٥} = \sqrt{٢٥ ت^٢} = ٥$ ت ، ... وهكذا

- العمليات على الجذور التربيعية لا يمكن تعميمها على الأعداد التخيلية فإذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين سالبين

فإن : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أ ب}$

**فمثلاً** $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

**لأن** $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = \sqrt{ت^٢} \times \sqrt{ت^٢} = ت \times ت = ت^٢ = -١$

**بينما** $\sqrt{-١ \times -١} = \sqrt{(-١)^٢} = \sqrt{١} = ١$

## قوى ت الصحيحة

العدد ت يحقق قوانين الأسس الصحيحة التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية

**وحيث إن** $ت^٢ = -١$ فبناءً على ذلك يكون :

- $ت^٣ = ت^٢ \times ت = -١ \times ت = -ت$
- $ت^٤ = ت^٢ \times ت^٢ = -١ \times -١ = ١$
- $ت^٥ = ت^٤ \times ت = ١ \times ت = ت$
- $ت^٦ = ت^٤ \times ت^٢ = ١ \times -١ = -١$ ... وهكذا

**مما سبق نجد أن**

- القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم الآتية : ت أ، -١ أ، -ت أ، ١
- هذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤ وبصفة عامة فإنه لكل $ن \in ص$ فإن :
  - $ت^{٤ن} = (ت^٤)^{ن} = ١^{ن} = ١$
  - $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} \times ت = ١ \times ت = ت$
  - $ت^{٤ن+٢} = ت^{٤ن} \times ت^٢ = ١ \times -١ = -١$
  - $ت^{٤ن+٣} = ت^{٤ن} \times ت^٣ = ١ \times -ت = -ت$
  - $ت^{٤ن+٤} = ت^{٤ن} \times ت^٤ = ١ \times ١ = ١$ ... وهكذا

**وبطريقة أخرى :**

لإيجاد $ت^م$ حيث م عدد صحيح ← نوجد باقى قسمة م ÷ ٤ فإذا كان :

- الباقى = صفر **فإن** $ت^م = ١$
- الباقى = ١ **فإن** $ت^م = ت$
- الباقى = ٢ **فإن** $ت^م = ت^٢ = -١$
- الباقى = ٣ **فإن** $ت^م = ت^٣ = -ت$

**فمثلًا :**

- ت$^{١٦}$ = ١ «لأن ١٦ ÷ ٤ = ٤ والباقى صفر»
- ت$^{٦٣}$ = − ت «لأن ٦٣ ÷ ٤ = ١٥ والباقى ٣»
- ت$^{٤٢}$ = −١ «لأن ٤٢ ÷ ٤ = ١٠ والباقى ٢»
- ت$^{١٠١}$ = ت «لأن ١٠١ ÷ ٤ = ٢٥ والباقى ١»
- ت$^{٤ن + ٢٣}$ حيث ن ∈ ص = − ت «لأن (٤ ن + ٢٣) ÷ ٤ = ن + ٥ والباقى ٣»



للاطلاع على الموضوعات التى لم تتم دراستها العام الماضى نظراً لتوقف الدراسة فى منتصف مارس امسح هذا الكود

**ملاحظة**

يمكن التعبير عن الواحد الصحيح باستخدام العدد التخيلى ت مرفوعًا لقوى صحيحة من مضاعفات العدد ٤ ويساعد ذلك فى تبسيط بعض الأعداد التخيلية.

**فمثلًا** ت$^{-١٩}$ = $\frac{١}{ت^{١٩}}$ = $\frac{ت^{٢٠}}{ت^{١٩}}$ = ت

## العدد المركب

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة : أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، ت$^{٢}$ = −١

- يُسمى أ بالجزء الحقيقى.
- يُسمى ب بالجزء التخيلى.

**ومن أمثلة الأعداد المركبة :** ٢ − ت ، ٧ + ١٣ ت ، ٥ ت − ٤ ، $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٣}$ ت

**ملاحظات**

لأى عدد مركب : ع = أ + ب ت فإن :

**١** إذا كان : ب = ٠ فإن : ع = أ ويكون ع عددًا حقيقيًا.

**فمثلًا** ع = ٥ عدد حقيقى وهو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر.

**٢** إذا كان : أ = ٠ فإن : ع = ب ت ويكون ع عددًا تخيليًا. (حيث ب ≠ ٠)

**فمثلًا** ع = ٢ ت عدد تخيلى وهو عدد مركب.

ومما سبق فإن كل عدد حقيقى هو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر لذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية جزئية من مجموعة الأعداد المركبة التى يمكن تعريفها كالتالى :

## مجموعة الأعداد المركبة

مجموعة الأعداد المركبة والتى سنرمز لها بالرمز ك هى :

ك = {أ + ب ت : أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، ت$^{٢}$ = −١}

## مثال ١

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين فى مجموعة الأعداد المركبة :

١ ٢ $س^٢$ + ١٨ = ٠      ٢ $س^٢$ + س + ١ = ٠

## الحل

١ ∵ ٢ $س^٢$ + ١٨ = ٠    ∴ ٢ $س^٢$ = −١٨

∴ $س^٢$ = −٩    ∴ س = ± $\sqrt{-٩}$

∴ س = ± $\sqrt{٩ ت^٢}$    ∴ س = ± ٣ ت    ∴ مجموعة الحل = {٣ ت ، −٣ ت}

٢ ∵ أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

$$∴ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-١ \pm \sqrt{١^٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢} = \frac{-١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$$

∴ مجموعة الحل = $\left\{ \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت \;،\; \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت \right\}$

### حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى فى مجموعة الأعداد المركبة :

١ ٥ $س^٢$ + ١٨٠ = ٠      ٢ $س^٢$ − ٢ س + ٥ = ٠

## تساوى عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

**أى أنه** إذا كان : (أ + ب ت) ، (جـ + ء ت) عددين مركبين وكان : أ = جـ ، ب = ء

فإن : أ + ب ت = جـ + ء ت

**والعكس صحيح أى أنه** إذا كان : أ + ب ت = جـ + ء ت فإن : أ = جـ ، ب = ء

لاحظ أنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة التى جزؤها التخيلى لا يساوى الصفر فلا نعلم مثلًا أى العددين أكبر (٥ + ٣ ت) أم (−٤ + ٧ ت) ؟

## مثال ٢

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلاً مما يأتى :

١ (٢ س − ٣) + ٥ ت = ٧ + (٣ − ٢ ص) ت

٢ س + ت ص = $\sqrt{-٤}$ + $ت^{٢٢}$

٣ س − ٣ ص + (٢ س + ص) ت = ٦ + ٥ ت

**الحـل**

١ ∵ ٢ س − ٣ = ٧ ∴ ٢ س = ١٠ ∴ س = ٥

، ∵ ٣ − ٢ ص = ٥ ∴ −٢ ص = ٢ ∴ ص = −١

٢ ∵ س + ت ص = ٢ ت + ت$^{٤(ه)+٢}$ ∴ س + ت ص = ٢ ت + ت$^{٢}$ = ٢ ت + (−١)

∴ س + ت ص = −١ + ٢ ت ∴ س = −١ ، ص = ٢

٣ ∵ س − ٣ ص = ٦ (١)

، ٢ س + ص = ٥ (٢)

بضرب المعادلة (٢) فى ٣ : ∴ ٦ س + ٣ ص = ١٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص = −١

**حاول بنفسك**

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلًا مما يأتى :

١ س + ت ص = ٣ ت$^{-١}$ + ٤

٢ ٤ س − ص + (٢ س + ص) ت = ٥ + ٧ ت

## جمع وطرح الأعداد المركبة

- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معًا والجزأين التخيليين معًا.

**مثال ٣**

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ (٣ + ٧ ت$^{١٣}$) + (٥ − ٩ ت)

٢ (٢ − $\sqrt{-١٦}$) − (٥ − ت)

**الحـل**

١ ∵ ت$^{١٣}$ = ت ∴ المقدار = (٣ + ٧ ت) + (٥ − ٩ ت) = (٣ + ٥) + (٧ ت − ٩ ت)

= ٨ − ٢ ت

٢ ∵ $\sqrt{-١٦}$ = ٤ ت ∴ المقدار = (٢ − ٤ ت) − (٥ − ت) = (٢ − ٤ ت) + (−٥ + ت)

= (٢ − ٥) + (−٤ ت + ت) = −٣ − ٣ ت

## ضرب الأعداد المركبة

- عند ضرب عددين مركبين نتبع نفس الطرق المستخدمة فى ضرب المقادير الجبرية مع الأخذ فى الاعتبار أن ت$^{٢}$ = −١

## مثال ٤

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت)

٢ (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت)

٣ (٣ + ٢ ت)$^{٢}$

٤ (١ − ت)$^{٤}$

## الحل

١ (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٤ (٢ − ٥ ت) + ٣ ت (٢ − ٥ ت)

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت − ١٥ ت$^{٢}$

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت + ١٥ (حيث ت$^{٢}$ = −١)

= (٨ + ١٥) + (−٢٠ ت + ٦ ت) = ٢٣ − ١٤ ت

**لاحظ أنه** يمكن الحل مباشرة باستخدام الضرب بمجرد النظر الذى سبق دراسته فى المرحلة الإعدادية كالتالى :

(٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٨ − ١٤ ت − ١٥ ت$^{٢}$ (حيث ت$^{٢}$ = −١)

(− ٢٠ ت ، + ٦ ت)

= ٨ − ١٤ ت + ١٥ = ٢٣ − ١٤ ت

٢ (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت) = ٢٥ − ٤ ت$^{٢}$

= ٢٥ + ٤ (حيث ت$^{٢}$ = −١)

= ٢٩

**تذكر أن**

(أ + ب) (أ − ب) = أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$

٣ (٣ + ٢ ت)$^{٢}$ = ٩ + ١٢ ت + ٤ ت$^{٢}$

= ٩ + ١٢ ت − ٤ (حيث ت$^{٢}$ = −١)

= ٥ + ١٢ ت

**تذكر أن**

(أ ± ب)$^{٢}$ = أ$^{٢}$ ± ٢ أ ب + ب$^{٢}$

٤ (١ − ت)$^{٤}$ = ((١ − ت)$^{٢}$)$^{٢}$ = (١ − ٢ ت + ت$^{٢}$)$^{٢}$ = (١ − ٢ ت − ١)$^{٢}$ = (−٢ ت)$^{٢}$ = ٤ ت$^{٢}$ = −٤

### ملاحظة

(١ ± ت)$^{٢ن}$ = (± ٢ ت)$^{ن}$ حيث ن ∈ ص

- الإثبات : (١ ± ت)$^{٢ن}$ = [(١ ± ت)$^{٢}$]$^{ن}$ = [١ ± ٢ ت − ١]$^{ن}$ = (± ٢ ت)$^{ن}$
- وتستخدم هذه الملاحظة لتبسيط بعض الأعداد المركبة كالتالى :

١ (١ + ت)$^{٢٠٠}$ = (٢ ت)$^{١٠٠}$ = ٢$^{١٠٠}$ ت$^{١٠٠}$ = ٢$^{١٠٠}$

٢ (٣ − ٣ ت)$^{٤}$ = ٣$^{٤}$ × (١ − ت)$^{٤}$ = ٣$^{٤}$ × (−٢ ت)$^{٢}$ = ٣$^{٤}$ × ٢$^{٢}$ = ٣٢٤

## حاول بنفسك

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ ($\sqrt{}$٤ + $\sqrt{}$−٢٥) + (−٣ − ٤ ت)

٢ (٢ − ت) (٢ + $\sqrt{}$−١)

٣ (٢ + ٣ ت$^{٢١}$) (٥ + ت$^{٣١}$)

٤ ت (٥ − ٣ ت)

٥ (١ − ت)$^{٣٢}$

## العددان المترافقان

العددان : أ + ب ت ، أ − ب ت يُسميان بالعددين المترافقين ولاحظ أنهما لا يختلفان إلا فى إشارة الجزء التخيلى منهما.

**فمثلاً** العددان ٣ + ٤ ت ، ٣ − ٤ ت عددان مترافقان.

### ملاحظات

- مرافق العدد ٢ ت − ٥ هو العدد −٢ ت − ٥ وليس ٢ ت + ٥
- مرافق العدد ٢ ت هو −٢ ت
- مرافق العدد ٣ هو ٣
- مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى ، وحاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى

**فمثلاً** العدد المركب ٣ + ٤ ت مرافقه هو ٣ − ٤ ت ويكون :

* مجموعهما = (٣ + ٤ ت) + (٣ − ٤ ت) = (٣ + ٣) + (٤ ت − ٤ ت) = ٦ ∈ ح

* حاصل ضربهما = (٣ + ٤ ت) (٣ − ٤ ت) = ٩ − ١٦ ت$^{٢}$ = ٩ + ١٦ = ٢٥ ∈ ح

### حاول بنفسك

اكتب مرافق العدد ٥ − ٤ ت ثم أوجد :

١ مجموع العدد ومرافقه. ٢ حاصل ضرب العدد ومرافقه.

### مثال ٥

اختصر إلى أبسط صورة :

١ $\frac{٤ - ٣ ت}{ت}$ ٢ $\frac{١٠}{٣ + ت}$ ٣ $\frac{٣ + ٢ ت}{٢ - ٥ ت}$ ٤ $\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ ت)}$

### الحل

لاحظ أنه لاختصار الكسر الذى مقامه عدد مركب نضرب حدى الكسر فى مرافق المقام.

١ $\frac{٤ - ٣ ت}{ت} \times \frac{- ت}{- ت} = \frac{-٤ ت + ٣ ت^{٢}}{- ت^{٢}} = \frac{-٤ ت - ٣}{-(-١)} = -٣ - ٤ ت$

٢ $\frac{١٠}{٣ + ت} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{(٣ + ت)(٣ - ت)} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{٩ - ت^{٢}} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{٩ + ١} = \frac{١٠ (٣ - ت)}{١٠} = ٣ - ت$

٣ $\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} = \frac{(٣ + ٢ت)(٢ + ٥ت)}{(٢ - ٥ت)(٢ + ٥ت)} = \frac{٦ + ١٥ت + ٤ت + ١٠ت^{٢}}{٤ - ٢٥ت^{٢}}$   ولكن $ت^{٢} = -١$

$$\therefore \frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} = \frac{٦ + ١٩ت - ١٠}{٤ + ٢٥} = \frac{-٤ + ١٩ت}{٢٩} = \frac{-٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩}ت$$

٤ $\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ت)} = \frac{٢ - ٢ت + ت - ت^{٢}}{٣ - ٢ت + ٣ت - ٢ت^{٢}} = \frac{٢ - ت + ١}{٣ + ت + ٢} = \frac{٣ - ت}{٥ + ت}$

، $\frac{٣ - ت}{٥ + ت} = \frac{(٣ - ت)(٥ - ت)}{(٥ + ت)(٥ - ت)} = \frac{١٥ - ٨ت - ١}{٢٥ - ت^{٢}} = \frac{١٤ - ٨ت}{٢٦} = \frac{٢(٧ - ٤ت)}{٢٦}$

$$\therefore \frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ت)} = \frac{٧}{١٣} - \frac{٤}{١٣}ت$$

**حاول بنفسك**

**اختصر إلى أبسط صورة :**

١ $\frac{٢ + ت}{٣ - ٤ت}$   ٢ $\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)}$

## مثال ٦

إذا كان : $س = \frac{٧ - ت}{٢ - ت}$ ، $ص = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$

**فأثبت أن :** س ، ص مترافقان   **ثم أثبت أن :** $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

### الحل

$\because س = \frac{٧ - ت}{٢ - ت} = \frac{(٧ - ت)(٢ + ت)}{(٢ - ت)(٢ + ت)} = \frac{١٤ + ٧ت - ٢ت - ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}} = \frac{١٤ + ٥ت + ١}{٤ + ١} = \frac{١٥ + ٥ت}{٥} = ٣ + ت$

، $ص = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{(١٣ - ت)(٤ - ت)}{(٤ + ت)(٤ - ت)} = \frac{٥٢ - ١٣ت - ٤ت + ت^{٢}}{١٦ - ت^{٢}} = \frac{٥٢ - ١٧ت - ١}{١٦ + ١} = \frac{٥١ - ١٧ت}{١٧} = ٣ - ت$

$\therefore$ س ، ص مترافقان (لاحظ اختلاف إشارتى الجزأين التخيليين فى س ، ص)

، $س^{٢} = (٣ + ت)^{٢} = ٩ + ٦ت + ت^{٢} = ٨ + ٦ت$ ، $ص^{٢} = (٣ - ت)^{٢} = ٩ - ٦ت + ت^{٢} = ٨ - ٦ت$

$\therefore س^{٢} + ص^{٢} = (٨ + ٦ت) + (٨ - ٦ت) = (٨ + ٨) + (٦ت - ٦ت) = ١٦$

**حاول بنفسك**

**أثبت أن العددين أ ، ب مترافقان إذا كان :** $أ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، $ب = \frac{٢ - ت}{٣ - ت}$

# على مقدمة عن الأعداد المركبة

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** ضع كلًا مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) 📖 $ت^{٢٤}$ (٢) $ت^{٢٦}$ (٣) 📖 $ت^{٤٣}$

(٤) 📖 $ت^{-٤٣}$ (٥) $ت^{-٣٠}$ (٦) $ت^{-١٠٠}$

(٧) $\frac{١}{ت^{٤}}$ (٨) $\frac{١}{ت^{١٥}}$ (٩) $\frac{١}{ت^{٢١١}}$

**٢** إذا كان ن عددًا صحيحًا فاكتب كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) $ت^{٨ن}$ (٢) 📖 $ت^{٤ن + ٤٢}$ (٣) $ت^{١٢ن + ٣}$ (٤) $ت^{٨ن - ٣}$

**٣** بسِّط كلاً مما يأتى :

(١) $\sqrt{-١٥}$ (٢) $\sqrt{٢} \times \sqrt{-٨}$ (٣) 📖 $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$

(٤) 📖 $٣ت (-٢ت)$ (٥) 📖 $(-٤ت)(-٦ت)$ (٦) 📖 $(-٢ت)^{٣} (-٣ت)^{٢}$

**٤** أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) 📖 $(٣ + ٢ت) + (٢ - ٥ت)$

(٢) 📖 $(١٢ - ٥ت^{١٧}) - (٧ - \sqrt{-٨١})$

(٣) $٢ - (١ - ٢ت) + (٤ - ٥ت) - (١ - ٣ت)$

(٤) 📖 $(٢ + \sqrt{-٩})(٣ - ٤ت)$

(٥) 📖 $(٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت)$

(٦) $(٢ - ٥ت)^{٢}$

(٧) $(٣ - ٢ت)^{٢} + (٣ + ٢ت)$

(٨) $(١ + ت)^{٤}$

(٩) $(١ + \sqrt{-١})^{٤} - (١ - \sqrt{-١})^{٤}$

(١٠) 📖 $(١ - ت)^{١٠}$

(١١) $(١ + ٢ت^{٢})(٢ + ٣ت^{٥} + ٤ت^{٦})$

**٥** ضع كلًا مما يأتى على صورة أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان :

(١) $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت}$ (٢) 📖 $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$ (٣) 📖 $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$

(٤) 📖 $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$ (٥) $\frac{(٣ + ٢ت)(٢ - ت)}{٣ + ت}$ (٦) 📖 $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ت}$

(٧) $\frac{١}{(١ + ٢ت)^{٢}}$ (٨) $\frac{١ + ت + ٢ت^{٢} + ٢ت^{٣}}{١ - ٥ت + ٣ت^{٢} - ٣ت^{٣}}$ (٩) $\frac{٢\sqrt{٢} + \sqrt{-٨}}{\sqrt{٢} - \sqrt{-١٨}}$

**٦** حل كلًّا من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة :

(١) $٣ س^{٢} + ١٢ = ٠$

(٢) $٤ س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

(٣) $س^{٢} - ٤ س + ٥ = ٠$

(٤) $٢ س^{٢} + ٦ س + ٥ = ٠$

---

**٧** أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلاً من المعادلات الآتية :

(١) س + ص ت = (٣ + ٢ ت) + (٢ − ت)

(٢) $س + ص ت = (٢ - ٣ ت)^{٢}$

(٣) $٣ س - ٢ ص ت = (٥ - ٢ ت)^{٢}$

(٤) (٢ س − ٣) + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

(٥) (٢ س − ص) + (س − ٢ ص) ت = ٥ + ت

(٦) ٣ س + س ت − ٢ ص + ص ت = ٥

(٧) $س^{٢} - ص^{٢} + (س + ص) ت = ٤ ت$



للاطلاع على الموضوعات التى لم تتم دراستها العام الماضى نظراً لتوقف الدراسة فى منتصف مارس امسح هذا الكود

---

**٨** أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

(١) $\frac{١٠}{٢ + ت} = س + ص ت$

(٢) $\frac{٦ - ٤ ت}{١ - ت} = س + ت ص$

(٣) $\frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ ت} = س + ت ص$

---

**٩** إذا كان : $س = \frac{١٣}{٥ - ت}$ ، $ص = \frac{٣ + ٢ ت}{١ + ت}$ فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

---

**١٠** إذا كان : $أ + ب ت = \frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ فأثبت أن : $أ^{٢} + ب^{٢} = ١$

---

**١١** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مرافق العدد (٣ ت − ٤) هو ..............

(أ) ٣ ت + ٤ (ب) −٣ ت − ٤ (جـ) −٣ ت + ٤ (د) ٣ ت − ٤

(٢) المعكوس الجمعى للعدد المركب (٤ − ٧ ت) هو ..............

(أ) ٤ + ٧ ت (ب) −٤ + ٧ ت (جـ) −٤ − ٧ ت (د) ٤ − ٧ ت

(٣) $١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ =$ ..............

(أ) ٤ ت + ١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

(٤) إذا كان : ١٢ + ٣ ‌أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت

فإن : أ + ب = ..............

(أ) −٩ (ب) ١٢ (جـ) −٦ (د) ٦

(٥) مرافق العدد (−٨) هو ..............

(أ) ٨ ت (ب) −٨ ت (جـ) −٨ (د) ٨

(٦) أى مما يأتى يكون عددًا تخيليًا ؟

(أ) $\pi$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) $ت^٢$

(٧) $٥ ت^٧ + ٤ ت^{-١} =$ ..............

(أ) ٩ ت (ب) −٩ ت (جـ) ت (د) − ت

(٨) إذا كان : $(١ + ت^٤)(١ - ت^٧) = س + ت ص$ فإن : س + ص = ..............

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٩) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : $س + ت ص = ت^{٤٣} + ٣ \sqrt{-٤}$

فإن : س + ص = ..............

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٣ + ٢ ت (د) ٥ ت

## اكتشف الخطأ

**١٢** أوجد فى أبسط صورة المقدار : $(٢ + ٣ ت)^٢ (٢ - ٣ ت)$

**إجابة أحمد**

$(٢ + ٣ ت)(٢ + ٣ ت)(٢ - ٣ ت)$

$= (٢ + ٣ ت)(٤ - ٩ ت^٢)$

$= (٢ + ٣ ت)(٤ + ٩) = ١٣ (٢ + ٣ ت)$

$= ٢٦ + ٣٩ ت$

**إجابة كريم**

$(٢ + ٣ ت)^٢ (٢ - ٣ ت)$

$= (٤ + ٩ ت^٢)(٢ - ٣ ت)$

$= (٤ - ٩)(٢ - ٣ ت)$

$= -٥ (٢ - ٣ ت) = -١٠ + ١٥ ت$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٣** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $س^2 + 1 = 0$

فإن : $ل^{2018} + م^{2018} = $ ..............

(أ) ‎−٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) ‎−٢ (د) ٢٠١٨

(٢) $(1 + ت)^{2020} = $ ..............

(أ) $(1 - ت)^{2020}$ (ب) $2^{1010}$ (جـ) $2^{1010}$ ت (د) $ت^{2020}$

(٣) إذا كان : $\left(\frac{1 - ت}{1 + ت}\right)^{100} = س + ص ت$ فإن : (س ، ص) = ..............

(أ) (٠ ، ١) (ب) (‎−١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ‎−١) (د) (١ ، ٠)

(٤) مرافق العدد $(2 + ت)^{-1}$ هو ..............

(أ) ٢ + ت (ب) ٢ − ت (جـ) $\frac{2 - ت}{5}$ (د) $\frac{2 + ت}{5}$

(٥) أي مما يأتي يعتبر تحليلًا للمقدار : $س^2 + 4$ ؟

(أ) (س − ٢) (س + ٢) (ب) $(س + 2)^2$

(جـ) $(س - 2ت)^2$ (د) (س − ٢ ت) (س + ٢ ت)

(٦) لإيجاد قيمة كل من س ، ص الحقيقية يكون كافيًا الحصول على ..............

(أ) (س + ٢) + ٤ ص ت = ٣ − ٤ ت فقط. (ب) (٢ س + ص) + ٥ ت = ٧ + ٥ ت فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٧) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{1 + ت}{1 - ت}\right)^{ن} = 1$ هو ..............

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٨) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : $ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{د} = $ ..............

(أ) صفر (ب) ‎−١ (جـ) ١ (د) ت

(٩) $ت + ت^2 + ت^3 + ت^4 + ... + ت^{100} = $ ..............

(أ) ت (ب) ‎−١ (جـ) صفر (د) $ت^{1 + 2 + 3 + ....}$

(١٠) (١ + ت) (١ + ت$^{٢}$) (١ + ت$^{٣}$) (١ + ت$^{٤}$) ... (١ + ت$^{١٠٠}$) = ..............

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) لا شيء مما سبق.

(١١) إذا كان : ت$^{م}$ = ت$^{ن}$ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

① م = ن ② (م + ن) عدد زوجي. ③ (ن − م) مضاعف للعدد ٤

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ③ فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(١٢) إذا كان : أ < ب < ٠ < حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان : $\sqrt{\text{ب (حـ − أ)}}$ + $\sqrt{\text{أ ب}}$ = ٢ + ٣ ت

فإن : ب حـ = ..............

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(١٣) أى من الآتى صحيح ؟

(أ) ٢ + ٣ ت > ٣ + ٤ ت (ب) ٣ − ٤ ت > ٢ − ٣ ت

(جـ) ١ + ت < − ١ − ت (د) لا شيء مما سبق.

---

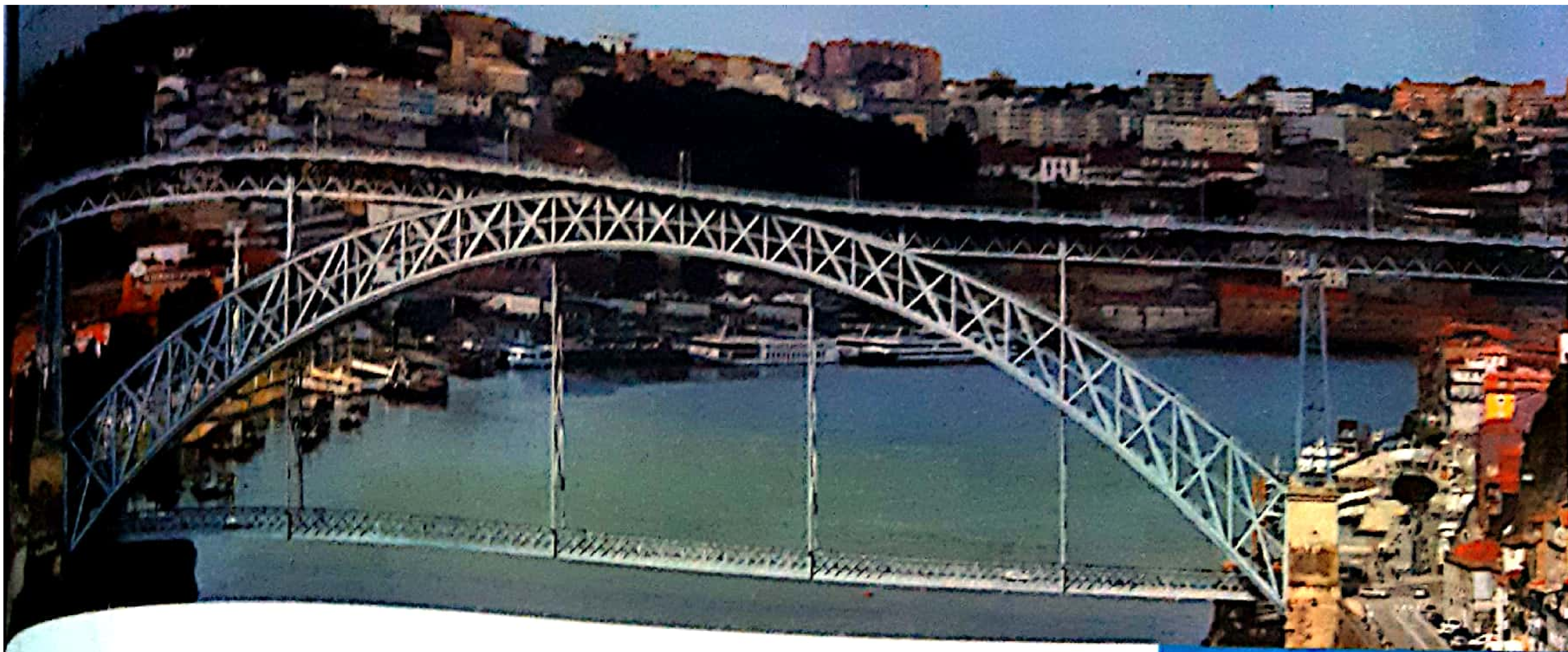
**١٤** إذا كانت : ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

فأوجد قيم : س ، ص الحقيقية التى تحقق المعادلة السابقة.

---

**١٥** إذا كانت : س = $\frac{\text{٢ + ت}}{\text{٢ − ت}}$ ، ص = $\frac{\text{٢ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$ وكان : ٢ س − ص = أ + ب ت

فأثبت أن : ٩ أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ = ١



# الدرس 2 تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

سبق أن درسنا كيفية حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح وعلمنا أنه عند حلها فإننا نحصل على حلين على الأكثر. والسؤال الذى سنتطرق له فى هذا الدرس هو :

**هل يمكن تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها ؟!**

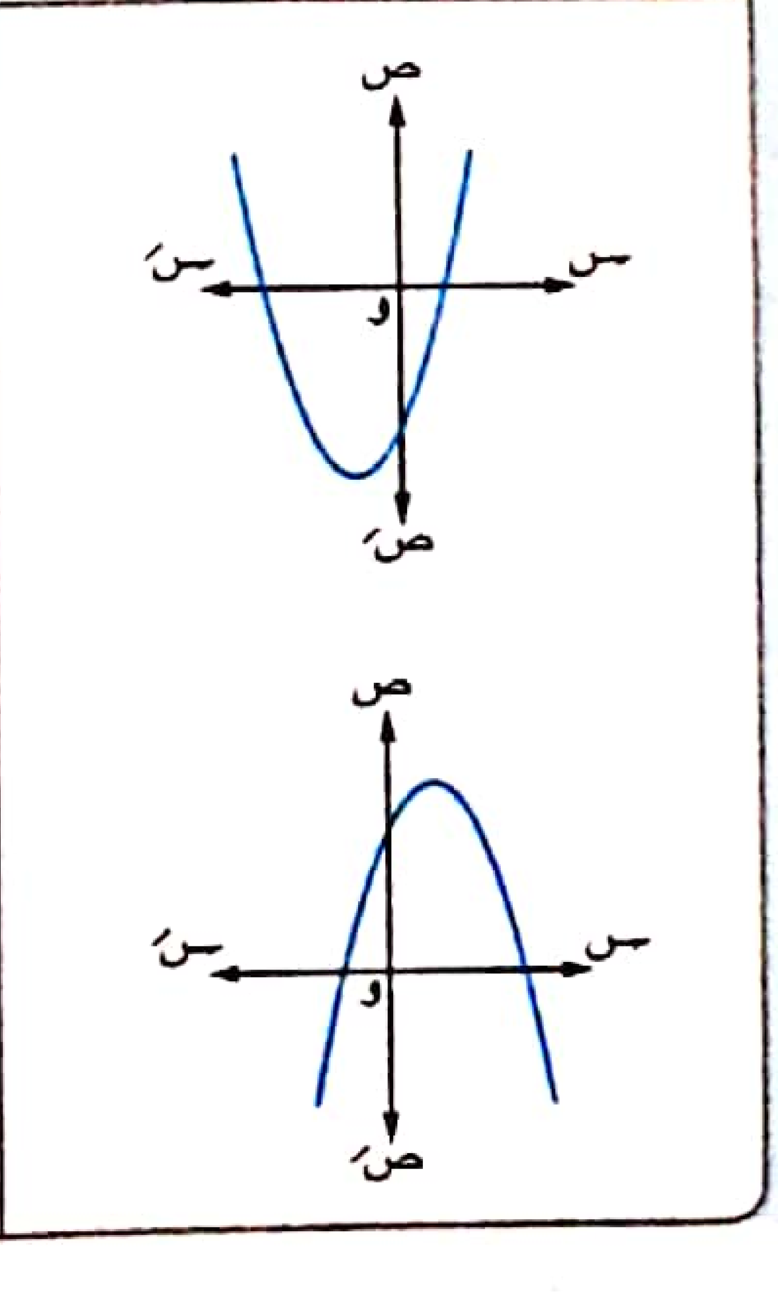
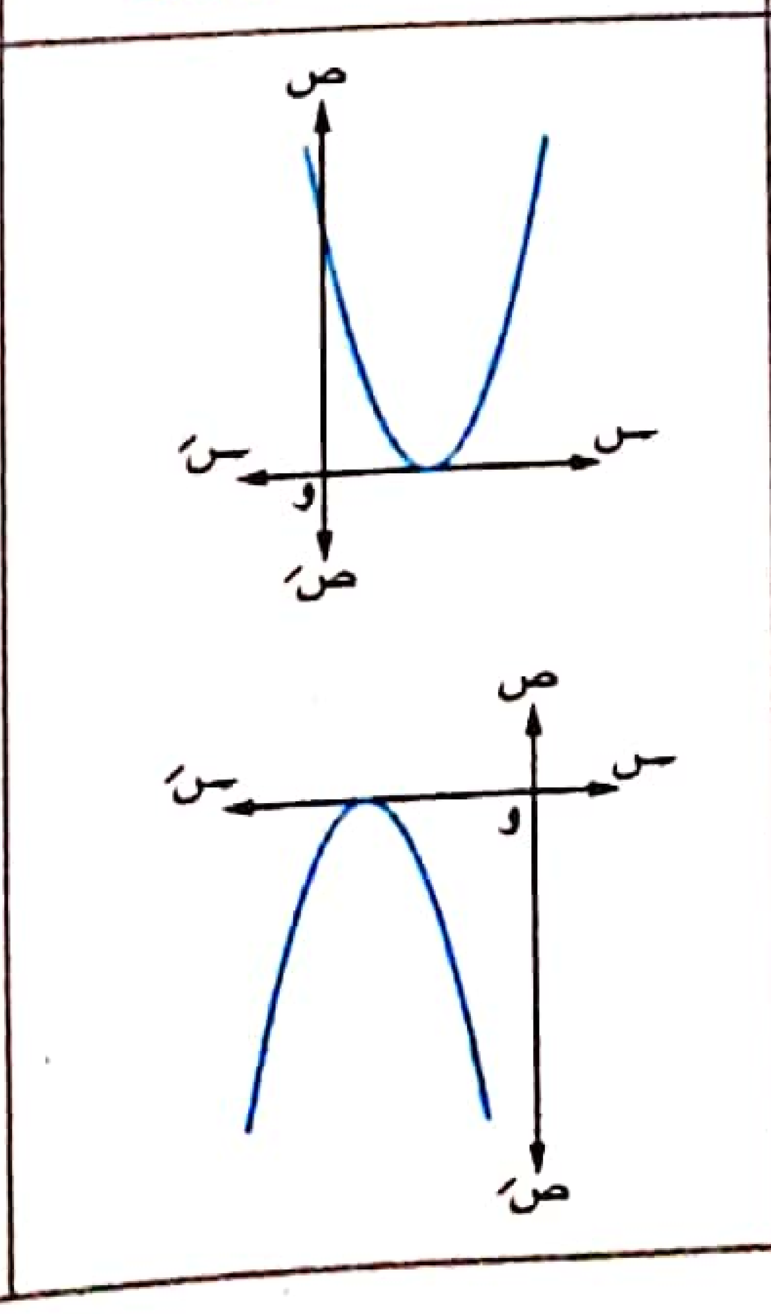
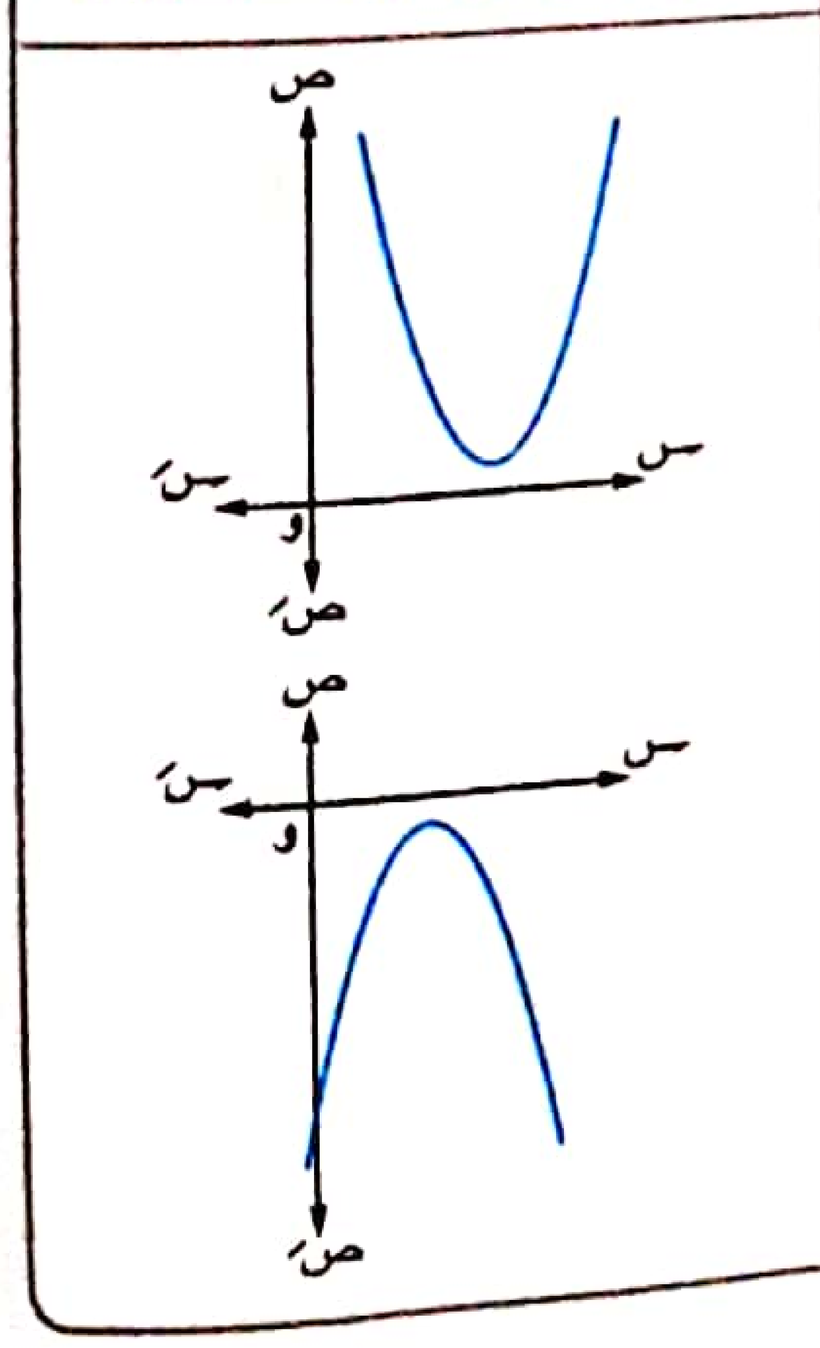
نعم ، يمكن أن نفعل هذا باستخدام **مميز المعادلة** والذى سنتعرف عليه فيما يلى :

## المميز

- عند حل المعادلة التربيعية : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ باستخدام القانون العام

فإننا نحصل على جذرين هما : $\frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{أ}}$ ، $\frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ}}}{٢\,\text{أ}}$

- وكلا الجذرين يحتوى على المقدار : $\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ}}$ ، ويُسمى المقدار : **ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ** مميز المعادلة التربيعية لأنه يستخدم لتمييز نوع جذرى المعادلة التربيعية ، كالتالى :

| | موجب | مساويًا للصفر | سالب |
|---|---|---|---|
| **المميز** | (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) > ٠ | ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٠ | (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) < ٠ |
| **نوع الجذرين** | حقيقيان مختلفان | حقيقيان متساويان | مركبان وغير حقيقيين |
| **رسم توضيحى للدالة المرتبطة بالمعادلة** |  |  |  |

**والمثال التالى يوضح الحالات الثلاثة بالجدول السابق :**

**مثال ١**

عيِّن نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية :

١ $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$ ٢ $س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = ٠$ ٣ $٣ س^٢ + ١٠ س = ٤$

**الحل**

١ ∵ أ = ١ ، ب = -٣ ، حـ = ٥

∴ المميز = $ب^٢ - ٤$ أ حـ

$= (-٣)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = -١١$ (كمية سالبة) ∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

٢ ∵ أ = ١ ، ب = ١٠ ، حـ = ٢٥

∴ المميز = $ب^٢ - ٤$ أ حـ $= (١٠)^٢ - ٤ × ١ × ٢٥ = ٠$ ∴ الجذران حقيقيان متساويان.

٣ ∵ $٣ س^٢ + ١٠ س - ٤ = ٠$ ∴ أ = ٣ ، ب = ١٠ ، حـ = -٤

∴ المميز = $ب^٢ - ٤$ أ حـ $= (١٠)^٢ - ٤ × ٣ × (-٤) = ١٤٨$ (كمية موجبة)

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

**حاول بنفسك**

عيِّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات الآتية :

١ $س^٢ - ٧ س + ١٠ = ٠$ ٢ $س^٢ + ٤ س + ٥ = ٠$ ٣ $٤ س^٢ - ١٢ س = -٩$

**مثال ٢**

أثبت أن جذرى المعادلة : $٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

**الحل**

∵ أ = ٧ ، ب = -١١ ، حـ = ٥

∴ المميز = $ب^٢ - ٤$ أ حـ $= (-١١)^٢ - ٤ × ٧ × ٥ = -١٩ < ٠$ ∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

، ∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{١١ + \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$

**حاول بنفسك**

إذا كانت : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ .

فأثبت أن : جذرى المعادلة مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

## مثال ٣

**إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ك س + ٢ ك - ٤ س + ٥ = ٠$ متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين.**

### الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة : ∴ $س^٢ - (ك + ٤) س + (٢ ك + ٥) = ٠$

∴ المميز $= (ك + ٤)^٢ - ٤ × ١ × (٢ ك + ٥) = ك^٢ + ٨ ك + ١٦ - ٨ ك - ٢٠ = ك^٢ - ٤$

، ∵ جذرى المعادلة متساويان. ∴ المميز = ٠

∴ $ك^٢ - ٤ = ٠$ ∴ $ك^٢ = ٤$ ∴ **$ك = ± ٢$**

عند $ك = ٢$ : ∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠$ ∴ $(س - ٣)^٢ = ٠$ ∴ $س = ٣$

∴ **عند $ك = ٢$ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ٣**

، عند $ك = -٢$ : ∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٢ س + ١ = ٠$ ∴ $(س - ١)^٢ = ٠$ ∴ $س = ١$

∴ **عند $ك = -٢$ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ١**

### حاول بنفسك

أوجد قيمة ك الحقيقية التى تجعل جذرى المعادلة : $٤ س^٢ - ٨ س + ك = ٠$ متساويين ثم أوجد هذين الجذرين.

## مثال ٤

**١** أوجد قيم م الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : $س^٢ - (٢ م - ١) س + م^٢ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية. (أى : ليس لها حل فى ح)

**٢** أوجد قيم ك الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : $س^٢ + ٢ (ك - ١) س + ك^٢ = ٠$ لها جذران حقيقيان. (أى : لها حل فى ح)

### الحل

**١** ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية. ∴ $ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠$ ∴ $(٢ م - ١)^٢ - ٤ م^٢ < ٠$

∴ $٤ م^٢ - ٤ م + ١ - ٤ م^٢ < ٠$ ∴ $-٤ م < -١$ ∴ $م > \frac{١}{٤}$

∴ المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية إذا كانت $م ∈ ] \frac{١}{٤} ، ∞ [$

٢ ∵ المعادلة لها جذران حقيقيان.

∴ $ب^٢ - ٤ أ ح \geq ٠$.

∴ $٤ (ك^٢ - ٢ ك + ١) - ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $- ٨ ك \geq - ٤$

∴ الجذران إما أن يكونا مختلفين أو متساويين.

∴ $٤ (ك - ١)^٢ - ٤ \times ١ \times ك^٢ \geq ٠$.

∴ $٤ ك^٢ - ٨ ك + ٤ - ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $ك \leq \frac{١}{٢}$

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان إذا كانت $ك \in ]-\infty ، \frac{١}{٢}]$

**حاول بنفسك**

إذا كانت المعادلة : $م^٢ س^٢ + (٢ م - ٢) س + ١ = ٠$ ليس لها حل فى ح فأوجد قيم م الحقيقية.

**مثال ٥**

**أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية لا يكون للمعادلة : $٤ س^٢ - ١٢ أ س + ٩ أ^٢ + ٤ = ٠$ جذور حقيقية.**

**الحل**

المميز $= (-١٢ أ)^٢ - ٤ (٤) (٩ أ^٢ + ٤) = ١٤٤ أ^٢ - ١٤٤ أ^٢ - ٦٤$

$= -٦٤$ (كمية سالبة لجميع قيم أ)

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

**ملاحظة**

إذا كانت المعاملات أ ، ب ، ح فى المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س + ح = ٠$ أعدادًا نسبية وكان المميز مربعًا كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين.

**فمثلًا**

١ المعادلة : $٣ س^٢ - ٥ س - ٢ = ٠$

- معاملات الحدود هى :
  ٣ ، −٥ ، −٢ (أعداد نسبية)
- المميز = ٤٩ (مربع كامل)
  ∴ الجذران حقيقيان نسبيان.

**وللتحقق من ذلك :**

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما ٢ ، $-\frac{١}{٣}$ (حقيقيان نسبيان)

٢ المعادلة : $س^٢ - ٢ \sqrt{٥} س + ١ = ٠$

- معاملات الحدود هى : ١ ، $-٢\sqrt{٥}$ ، ١
  (معامل الحد الأوسط حقيقى وغير نسبى)
- المميز = ١٦ (مربع كامل)
  ∴ الجذران حقيقيان غير نسبيين.

**وللتحقق من ذلك :**

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما $\sqrt{٥} + ٢$ ، $\sqrt{٥} - ٢$ (حقيقيان غير نسبيين)

**لاحظ أنه** فى المعادلة $س^٢ - ٢\sqrt{٥} س + ١ = ٠$ بالرغم من أن المميز مربع كامل إلا أن الجذرين حقيقيان غير نسبيين وذلك لكون معامل الحد الأوسط غير نسبى.

**مثال ٦**

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين أثبت أن جذرى المعادلة : $أ س^٢ + (أ^٢ + ب^٢) س + أ ب^٢ = ٠$ نسبيان.

**الحل**

∵ المميز $= (أ^٢ + ب^٢)^٢ - ٤ × أ × أ ب^٢ = أ^٤ + ٢ أ^٢ ب^٢ + ب^٤ - ٤ أ^٢ ب^٢$

$= أ^٤ - ٢ أ^٢ ب^٢ + ب^٤ = (أ^٢ - ب^٢)^٢$ «مربع كامل»

∴ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل.

∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان.

**حاول بنفسك**

إذا كان أ عددًا نسبيًا فأثبت أن جذرى المعادلة : $١٥ س^٢ - (١٠ + ٣ أ) س + ٢ أ = ٠$ يكونان نسبيين.

**ملاحظة**

إذا كان مميز المعادلة التربيعية (ذات المعاملات الحقيقية) غير موجب فإن جذرى المعادلة التربيعية يكونان عددين مركبين مترافقين.

**فمثلًا** المعادلة $س^٢ - ٢ س + ٢ = ٠$

- معاملات الحدود هى : ١ ، -٢ ، ٢ (أعداد حقيقية)
- المميز = -٤ (غير موجب)

∴ الجذران مركبان مترافقان

وللتحقق من ذلك بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما

١ + ت ، ١ - ت (مركبان مترافقان)

تمارين 2

# على تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية :**

(١) $س^{٢} - ٢ س + ٥ = ٠$

(٢) $س^{٢} - ١١ س + ١٠ = ٠$

(٣) $س^{٢} - ١٠ س + ٢٥ = ٠$

(٤) $٤٩ س^{٢} - ١٤ س + ١ = ٠$

(٥) $- س^{٢} + ٥ س - ٣٠ = ٠$

(٦) $٢ س^{٢} - ٧ س = ٠$

---

**٢ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية :**

(١) $س (س - ٢) = ٥$

(٢) $٦ س^{٢} = ١٩ س - ١٥$

(٣) $(س - ١١) - س (س - ٦) = ٠$

(٤) $(س + ٢)^{٢} + ٥ = ٠$

(٥) $س + \frac{٩}{س} = ٦$

(٦) $س - \frac{٢}{س - ١} = ٤$

(٧) $\frac{س}{س + ١} + \frac{س}{س - ١} = ٣$

(٨) $(س - ١) (س - ٧) = ٢ (س - ٣) (س - ٤)$

---

**٣** أثبت أن جذرى المعادلة : $٢ س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

---

**٤ إذا كان جذرا كل معادلة من المعادلات الآتية حقيقيين متساويين ، فأوجد قيم ك فى كل حالة :**

(١) $٣ س^{٢} - ٦ س + ك = ٠$ «٣»

(٢) $١٨ س^{٢} - ك س + ٨ = ٠$ «± ٢٤»

(٣) $٢ س^{٢} + ٥ س + ٤ ك = ٠$ «$\frac{٢٥}{٣٢}$»

(٤) $٧٥ س^{٢} + ٧ ك س + ٣ = ٠$ «± $\frac{٣٠}{٧}$»

(٥) $س^{٢} - ٣ س + ٢ + \frac{١}{ك} = ٠$ «٤»

(٦) $س^{٢} + (٢ ك + ٣) س + ك^{٢} = ٠$ «$-\frac{٣}{٤}$»

(٧) $س^{٢} + ٢ (ك - ١) س + (٢ ك + ١) = ٠$ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ١ ، ١ أ ٤ ، -٣ ، -٣»

(٨) $س^{٢} - ٢ ك س + ٧ ك - ٦ س + ٩ = ٠$ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ٣ ، ٣ أ ١ ، ٤ ، ٤»

**٥ أوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :**

(١) إذا كان جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين. «ك ∈ ]-∞ ، ٤[»

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : ك س$^{٢}$ - ٨ س + ١٦ = ٠ مركبين وغير حقيقيين. «ك ∈ ]١ ، ∞[»

(٣) إذا كانت المعادلة : س$^{٢}$ = ك + ٢ لها جذران حقيقيان مختلفان. «ك ∈ ]-٢ ، ∞[»

**٦ أوجد قيم العدد الحقيقى م التى تحقق أن المعادلة :**

(م - ١) س$^{٢}$ - ٢ م س + م = ٠ ليس لها جذور حقيقية. «م ∈ ]-∞ ، ٠[»

**٧ بدون حل أى من المعادلات الآتية بيِّن أيًا منها لها جذران نسبيان وأيها لها جذران غير نسبيين ثم حقق إجابتك بإيجاد الجذرين :**

(١) ٢ س$^{٢}$ - ٣ س - ٢ = ٠

(٢) س$^{٢}$ + $\sqrt{٥}$ س - ٥ = ٠

(٣) ٢ (س + ٣) + س (س - ١) = ٩

**٨** إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + ب - أ = ٠ نسبيان.

**٩** إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : ل س$^{٢}$ + (ل - م) س - م = ٠ عددان نسبيان.

**١٠ أثبت أن جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + ك س + ك = ١ دائمًا نسبيان حيث ك ∈ ن**

**١١** إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : س$^{٢}$ - ٢ أ$^{٣}$ س + أ$^{٦}$ - ب$^{٦}$ = ٠ عددان نسبيان.

**١٢ أوجد الفترة التى تنتمى إليها أ والتى تجعل جذرى المعادلة :**

(أ + ٢) س$^{٢}$ + (٢ أ + ٣) س + أ - ١ = ٠ حقيقيين. «أ ∈ ]-$\frac{١٧}{٨}$ ، ∞[»

**١٣ أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر لا يكون للمعادلة : (أ$^{٢}$ + ١) س$^{٢}$ - ٢ أ$^{٣}$ س + أ$^{٤}$ = ٠ جذور حقيقية.**

**١٤ أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقية يكون جذرا المعادلة : (س - أ) (س - ب) = ٥ حقيقيين.**

**١٥ أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية ما عدا (أ = ٢) يكون للمعادلة :**

(أ - ١) س$^{٢}$ - أ س + ١ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٢$\sqrt{٥}$ س + ١ = ٠ يكونان ..............

(أ) حقيقيين نسبيين. (ب) غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيين متساويين. (د) حقيقيين وغير نسبيين.

(٢) إذا كان : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ ، أ ∈ ح* ، ب ∈ ح ، جـ ∈ ح وكان (ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ) غير موجب فإن جذري المعادلة يكونان ..............

(أ) متساويين. (ب) غير حقيقيين. (جـ) مركبين مترافقين. (د) حقيقيين مختلفين.

(٣) إذا كان جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب = ٠ حقيقيين ومختلفين فإن : ..............

(أ) أ ب > ٠ (ب) أ = ٠ (جـ) أ ب < ٠ (د) أ > ٠ ، ب > ٠

(٤) إذا كانت : أ ، ب ، جـ أعدادًا صحيحة ، أ + ب + جـ = ٠ ، أ ≠ جـ فإن جذري المعادلة :

(ب + جـ − أ) س$^{٢}$ + (جـ + أ − ب) س + (أ + ب − جـ) = ٠ يكونان ..............

(أ) حقيقيين متساويين. (ب) حقيقيين مختلفين نسبيين.

(جـ) حقيقيين مختلفين غير نسبيين. (د) غير حقيقيين.

(٥) في أي من المعادلات التربيعية الآتية يكون الجذران مركبين مترافقين ؟

(أ) س$^{٢}$ − ٤ س − ٥ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ س$^{٢}$ + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠

(جـ) س$^{٢}$ − ٣$\sqrt{٢}$ س + ٤ = ٠ (د) ٣ س$^{٢}$ − $\sqrt{٧}$ س + ٥ = ٠

(٦) إذا كان للمعادلة : س$^{٢}$ − ٢$\sqrt{٢}$ س + أ = ٠ جذران مركبان مترافقان فإن : أ ∈ ..............

(أ) [−٢ ، ٢] (ب) ]−∞ ، ٢] (جـ) ]٢ ، ∞[ (د) [٢ ، ∞[

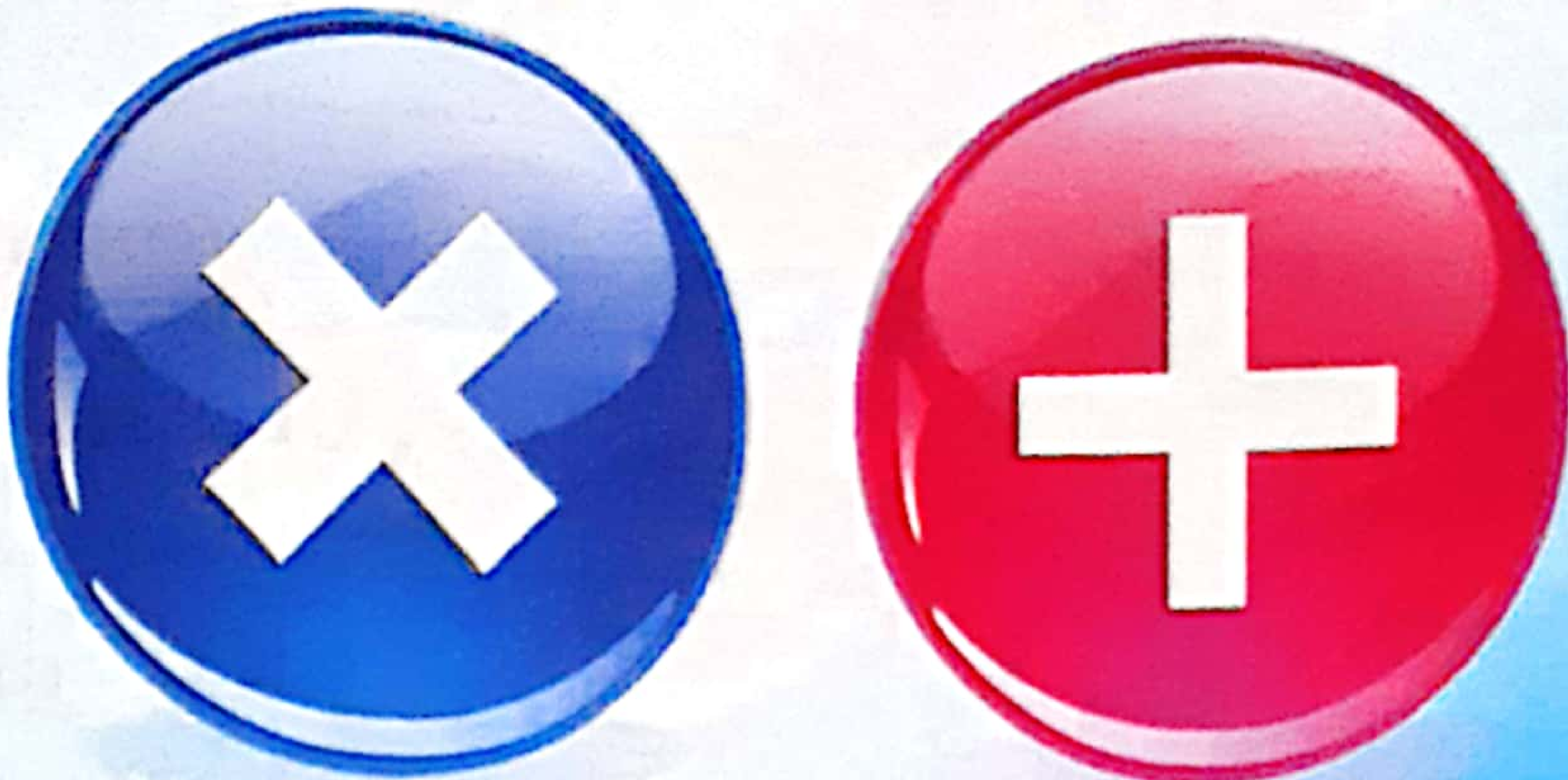
(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : ٤ س$^{٢}$ − ٢ س + م = ٠ ينتميان للفترة ]−١ ، ١[

فإن : ..............

(أ) ٠ ≤ م < ٢ (ب) −٦ < م ≤ $\frac{١}{٨}$ (جـ) −٢ < م ≤ $\frac{١}{٤}$ (د) −٦ < م < −٢

**١٧** إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية فأثبت أن جذري المعادلة : س$^{٢}$ + ٢ أ س + أ$^{٢}$ = ب$^{٢}$ + جـ$^{٢}$ حقيقيان.

**١٨** أثبت أن جذري المعادلة : $\frac{١}{س + أ} = \frac{١}{س} + \frac{١}{أ}$ دائمًا غير حقيقيين إذا كانت أ ∈ ح* ، س ∉ {٠ ، −أ}



الدرس 3

# العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

**نعلم أن جذرى المعادلة التربيعية :** $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هما :

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \quad ، \quad \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ويكون :

١ مجموع الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-٢ ب}{٢ أ} = \frac{-ب}{أ}$

**أى أن** مجموع الجذرين $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}}$

٢ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

$$= \frac{ب^{٢} - (ب^{٢} - ٤ أ جـ)}{٤ أ^{٢}} = \frac{ب^{٢} - ب^{٢} + ٤ أ جـ}{٤ أ^{٢}} = \frac{٤ أ جـ}{٤ أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ}$$

**أى أن** حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}}$

**وبصورة رمزية نكتب :**

إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ فإن :

١ $ل + م = \frac{-ب}{أ}$

٢ $ل م = \frac{جـ}{أ}$

## مثال ١

دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلتين الآتيتين :

١ ٢ $س^٢$ + ٥ س − ١٢ = ٠ ٢ ٦ $س^٢$ − ١١ س = ١٠

## الحل

١ ∵ أ = ٢ ، ب = ٥ ، حـ = −١٢

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٥}{٢}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١٢}{٢}$ = −٦

تحقق من صحة الحل بملاحظة أن الجذرين هما : $\frac{٣}{٢}$ ، −٤

٢ ∵ ٦ $س^٢$ − ١١ س − ١٠ = ٠

∴ أ = ٦ ، ب = −١١ ، حـ = −١٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-(-١١)}{٦}$ = $\frac{١١}{٦}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١٠}{٦}$ = $-\frac{٥}{٣}$

### حاول بنفسك

إذا كانت : ٣ $س^٢$ + ٥ = ٤ س فأوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

## مثال ٢

١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ + ك س + ١ = ٠ هو $-\frac{٣}{٢}$

**فأوجد قيمة :** ك ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − ٤ س + ك = ٠ هو ٤ $\frac{١}{٢}$

**فأوجد قيمة :** ك ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

## الحل

١ ∵ مجموع الجذرين = $-\frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{-ك}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ∴ ك = ٣

∴ المعادلة هى : ٢ $س^٢$ + ٣ س + ١ = ٠ ∴ (٢ س + ١) (س + ١) = ٠

∴ س = $-\frac{١}{٢}$ ، أ، س = −١

٢ ∵ حاصل ضرب الجذرين = ٤ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ $\frac{ك}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ ك = ٩

∴ المعادلة هى : ٢ $س^٢$ − ٤ س + ٩ = ٠ ∴ أ = ٢ ، ب = −٤ ، حـ = ٩

$\therefore$ س $= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٩}}{٢ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٥٦}}{٤}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{٥٦}\, ت}{٤} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{١٤}\, ت}{٤} = ١ \pm \frac{\sqrt{١٤}}{٢}\, ت$

$\therefore$ س $= ١ + \frac{\sqrt{١٤}}{٢}\, ت$ ، أو س $= ١ - \frac{\sqrt{١٤}}{٢}\, ت$

## حاول بنفسك

١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − أ س + ٦ = ٠ هو $٣\frac{١}{٢}$

**فأوجد قيمة : أ** ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + ٣ س + أ = ٠ هو ٥

**فأوجد قيمة : أ** ، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

## مثال ٣

١ إذا كان : س = −٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ + ك س − ٣ = ٠ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**

٢ إذا كان : س = ٦ أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ك = ٠ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**

٣ إذا كان : −١ ، ٥ هما جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س − ٥ = ٠ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب**

## الحل

١ $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{حـ}{أ} = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore$ −٣ × الجذر الآخر $= \frac{-٣}{٢}$

$\therefore$ الجذر الآخر $= -\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{-٣}$

$\therefore$ الجذر الآخر $= \frac{١}{٢}$

، $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-ك}{٢}$

، $\because$ الجذرين هما : −٣ ، $\frac{١}{٢}$

$\therefore -٣ + \frac{١}{٢} = \frac{-ك}{٢}$

$\therefore \frac{-٥}{٢} = \frac{-ك}{٢}$

$\therefore$ ك = ٥

### حل آخر :

$\because$ س = −٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ + ك س − ٣ = ٠ فهو يحققها.

$\therefore$ ٢ $(-٣)^{٢}$ + ك (−٣) − ٣ = ٠

$\therefore$ ١٨ − ٣ ك − ٣ = ٠ ومنها ك = ٥

$\therefore$ المعادلة هى : ٢ س$^{٢}$ + ٥ س − ٣ = ٠

وبالتحليل : $\therefore$ (٢ س − ١) (س + ٣) = ٠

$\therefore$ ٢ س − ١ = ٠ ومنها س $= \frac{١}{٢}$

أ، س + ٣ = ٠ ومنها س = −٣

$\therefore$ الجذر الآخر $= \frac{١}{٢}$

٢ ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-(-٥)}{١}$ = ٥

∴ ٦ + الجذر الآخر = ٥ ∴ **الجذر الآخر = −١**

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{ك}{١}$ = ك ، ∵ الجذرين هما : ٦ ، −١

∴ ٦ × (−١) = ك ∴ **ك = −٦**

**حاول حل المثال بطريقة أخرى كما فى رقم ١**

٣ ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ −١ × ٥ = $\frac{-٥}{أ}$

∴ −٥ = $\frac{-٥}{أ}$ ∴ **أ = ١**

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ −١ + ٥ = $\frac{-ب}{١}$

∴ ٤ = −ب ∴ **ب = −٤**

**حل آخر :**

∵ −١ جذر للمعادلة ∴ أ $(-١)^٢$ + ب (−١) − ٥ = ٠ ∴ أ − ب − ٥ = ٠ (١)

، ∵ ٥ جذر للمعادلة ∴ أ $(٥)^٢$ + ب (٥) − ٥ = ٠

∴ ٢٥ أ + ٥ ب − ٥ = ٠ وبالقسمة على ٥ ∴ ٥ أ + ب − ١ = ٠ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ٦ أ − ٦ = ٠ ∴ **أ = ١**

وبالتعويض فى (١) : ∴ ١ − ب − ٥ = ٠ ∴ **ب = −٤**

**حاول بنفسك**

أوجد الجذر الآخر لكل من المعادلتين الآتيتين ، ثم أوجد قيمة ك فى كل حالة :

١ إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ + ك س − ٧ = ٠ .

٢ إذا كان : س = $\frac{٥}{٣}$ أحد جذرى المعادلة : ٩ $س^٢$ − ٩ س + ك = ٠ .

**مثال ٤**

إذا كان : $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٢ س + جـ = ٠ حيث جـ ∈ ح

فأوجد : ١ قيمة الجذر الآخر. ٢ قيمة جـ

**الحل**

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-(-٢)}{١}$ = ٢

∴ $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$ + الجذر الآخر = ٢ ∴ الجذر الآخر = ٢ − $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$

∴ **الجذر الآخر = ١ − $\sqrt{٢}$ ت**

**لاحظ مباشرة أنه :**

∵ معاملات الحدود ∈ ح ، أحد الجذرين مركب غير حقيقى

∴ الجذر الآخر هو مرافق الجذر المعطى أى أنه يساوى ١ − $\sqrt{٢}$ ت

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = حـ

∴ $(1 - \sqrt{2}\,ت)(1 + \sqrt{2}\,ت) =$ حـ ∴ $1^2 - (\sqrt{2}\,ت)^2 =$ حـ

∴ $1 - 2ت^2 =$ حـ ∴ $1 + 2 =$ حـ ∴ **حـ = ٣**

**حل اخر:**

∵ $(1 + \sqrt{2}\,ت)$ أحد جذرى المعادلة المعطاة ، فهو يحققها.

∴ $(1 + \sqrt{2}\,ت)^2 - 2(1 + \sqrt{2}\,ت) +$ حـ $= 0$

∴ $1 + 2\sqrt{2}\,ت + (\sqrt{2}\,ت)^2 - 2 - 2\sqrt{2}\,ت +$ حـ $= 0$

∴ $1 + \cancel{2\sqrt{2}\,ت} - 2 - 2 - \cancel{2\sqrt{2}\,ت} +$ حـ $= 0$

∴ $-3 +$ حـ $= 0$ ∴ **حـ = ٣**

**أى أن** $س^2 - 2س + 3 = 0$

ويمكن باستخدام القانون العام إيجاد الجذر الآخر المطلوب.

**حاول بنفسك**

إذا كان : $(\sqrt{2} + ت)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س^2 - 2\sqrt{2}\,س +$ حـ $= 0$ حيث حـ $\in ع$

فأوجد : **١** قيمة الجذر الآخر. **٢** قيمة حـ

**ملاحظات**

**فى المعادلة التربيعية : $أس^2 + ب س +$ حـ $= 0$**

**١** إذا كان : $أ = 1$ فإن : $ل + م = -ب$ ، $ل م =$ حـ

**أى أن** مجموع الجذرين = المعكوس الجمعى لمعامل س ، حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق.

**٢** إذا كان : $ب = 0$ فإن : $ل + م = 0$ **أى** $ل = -م$

**أى أن** أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر.

**٣** إذا كان : $أ =$ حـ فإن : $ل م = 1$ **أى** $ل = \frac{1}{م}$

**أى أن** أحد جذرى المعادلة معكوس ضربى للآخر.

## مثال ٥

١ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٣ س$^{٢}$ + (ك − ٣) س + ٧ = ٠
هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

٢ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ ك س$^{٢}$ + ٧ س + ك$^{٢}$ + ١ = ٠
هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

### الحل

١ ∵ أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر. ∴ ب = ٠
∴ ك − ٣ = ٠ ∴ ك = ٣

٢ ∵ أحد الجذرين معكوس ضربى للآخر. ∴ أ = حـ
∴ ك$^{٢}$ + ١ = ٢ ك ∴ ك$^{٢}$ − ٢ ك + ١ = ٠
∴ (ك − ١)$^{٢}$ = ٠ ∴ ك = ١

### حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة :

١ س$^{٢}$ + (ك − ٥) س − ٩ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر.

٢ س$^{٢}$ + ٣ س + ك = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر.

## مثال ٦

أوجد قيمة ء التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + ء س − ٥٠ = ٠ ضعف المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

### الحل

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = −٢ ل

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل (−٢ ل) = $\frac{-٥٠}{١}$

∴ −٢ ل$^{٢}$ = −٥٠ ∴ ل = ± ٥

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل + (−٢ ل) = $\frac{-ء}{١}$

∴ − ل = − ء ∴ ل = ء ∴ ء = ± ٥

### حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ك س + ١٢ = ٠ ثلاثة أمثال الجذر الآخر.

## مثال ٧

**أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{حـ} = ٠$ مساويًا المعكوس الجمعى لضعف الجذر الآخر.**

### الحل

بفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = −٢ ل

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ ل + (−٢ ل) = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ∴ ل = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$ ∴ ل × (−٢ ل) = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

∴ $\text{ل}^{٢} = \frac{-\text{حـ}}{٢\text{أ}}$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{-\text{حـ}}{٢\text{أ}}$ ∴ $\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{-\text{حـ}}{٢\text{أ}}$

∴ $\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}} = \frac{-\text{حـ}}{٢}$

∴ $٢\text{ب}^{٢} + \text{أ}\text{حـ} = ٠$ (وهذا هو الشرط اللازم)

### حاول بنفسك

أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{حـ} = ٠$ .
مساويًا أربعة أمثال الجذر الآخر.

# على العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

(١) س$^{٢}$ + ٣ س − ١٠ = ٠ .

(٢) س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠ .

(٣) ٤ س$^{٢}$ + ٤ س − ٣٥ = ٠ .

(٤) ٢ س$^{٢}$ − ٧ س − ٦ = ٠ .

(٥) ٣ س$^{٢}$ − ٤ = ٠ .

(٦) س$^{٢}$ − ٣ س = ٠ .

(٧) ٣ س$^{٢}$ = ٢٣ س − ٣٠

(٨) (٤ س + ١) (س + ٦) = (س − ٢) (٣ س − ٤)

(٩) $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{٢}$

(١٠) $\frac{٣\,\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

(١١) (أ − ١) س$^{٢}$ + س − أ$^{٢}$ س − ١ + أ = ٠ .

(١٢) (أ + ب) س$^{٢}$ + (أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$) س + أ$^{٢}$ + ٢ أ ب + ب$^{٢}$ = ٠ .

---

**٢** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ + ٢ س − $\frac{١}{٤}$ س$^{٢}$ = ٠ يساوى ..............

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) −١٢ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٢) المعادلة : ب س$^{٢}$ + حـ س + أ = ٠ حاصل ضرب جذريها يساوى ..............

(أ) $\frac{-\text{حـ}}{\text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (جـ) $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$ (د) $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}}$

(٣) مجموع جذرى المعادلة : ٥ س$^{٢}$ − ٣ = ٠ هو ..............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٥}{٣}$

(٤) إذا كان : ل ، (٣ − ل) هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − أ س − ٨ = ٠ فإن : أ = ..............

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٨ (د) −٨

(٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س$^{٢}$ − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر

فإن : أ = ..............

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − (ب − ٣) س + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ..............

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٧) فى المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ إذا كان مجموع جذريها = حاصل ضربهما

فإن : ب = ..............

(أ) أ (ب) − أ (جـ) حـ (د) − حـ

(٨) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : (ك − ٢) س$^{٢}$ − ٦ س + ١٢ = ٠ هو ٣

فإن : ك = ..................

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣٨

(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٣ س$^{٢}$ − (ك + ٢) س + ك$^{٢}$ + ٢ ك = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : ك = ..................

(أ) −٣ أ، ١ (ب) −٣ أ، −١ (جـ) ٣ أ، −١ (د) ٣ أ، ١

---

**٣** إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ س$^{٢}$ + ١٠ س − حـ = ٠ هو $\frac{-٨}{٣}$

فأوجد قيمة حـ ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «حـ = ٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = −٤»

---

**٤** إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ + ب س − ٥ = ٠ هو − $\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «ب = ٣ ، س = $\frac{-٥}{٢}$ أ، س = ١»

---

**٥** أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة أ فى كل مما يأتى حيث أ ∈ ع :

(١) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٢ س + أ = ٠ «٣ ، −٣»

(٢) إذا كان : س = $\frac{١}{٢}$ أحد جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − أ س + ٣ = ٠ «٣ ، ٧»

(٣) إذا كان : (١ + ت) أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٢ س + أ = ٠ «١ − ت ، ٢»

(٤) إذا كان : (٢ + ت) أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + أ س + ٥ = ٠ «٢ − ت ، −٤»

---

**٦** أوجد قيمتى أ ، ب فى كل من المعادلات الآتية إذا كان :

(١) ٢ ، ٥ جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + أ س + ب = ٠ «أ = −٧ ، ب = ١٠»

(٢) −٣ ، ٧ جذرى المعادلة : أ س$^{٢}$ − ب س − ٢١ = ٠ «أ = ١ ، ب = ٤»

(٣) −١ ، $\frac{٣}{٢}$ جذرى المعادلة : أ س$^{٢}$ − س + ب = ٠ «أ = ٢ ، ب = −٣»

(٤) $\sqrt{٣}$ ت ، − $\sqrt{٣}$ ت جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + أ س + ب = ٠ «أ = ٠ ، ب = ٣»

---

**٧** فى كل مما يأتى أوجد قيمة ك التى تجعل :

(١) أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + (ك − ١) س − ٣ = ٠ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر. «١»

(٢) أحد جذرى المعادلة : (ك − ٢) س$^{٢}$ + (ك − ٣) س − ٤ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر. «−٢»

(٣) أحد جذرى المعادلة : ٤ ك س$^{٢}$ + ٧ س + ك$^{٢}$ + ٤ = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «٢»

(٤) أحد جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ + ك$^{٢}$ = ٥ س + ٢ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «± ٢»

**٨** أوجد قيمة حـ التي تجعل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ – ٣ س + حـ = ٠ ضعف الجذر الآخر. «٢»

**٩** أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ + ك س – ٩٨ = ٠
ضعف المعكوس الجمعي للجذر الآخر. «± ٧»

**١٠** أوجد قيمة ن التي تجعل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ – ٥ س + ن = ٠ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١ «٦»

**١١** أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ – أ س + ٢١ = ٠
يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١ «–٩,٥ أ ، ١٠»

**١٢** فى المعادلة : (أ – ٢) س$^{٢}$ + (أ – ٣) س – ٤ = ٠ **أوجد قيمة أ إذا كان :**

(١) مجموع جذريها يساوى ٣ (٢) حاصل ضرب جذريها يساوى –٤ «$\frac{٩}{٤}$ ، ٣»

**١٣** فى المعادلة : (ك – ٤) س$^{٢}$ – (٣ – ك) س – ٣ = ٠ **أوجد قيمة ك إذا كان :**

(١) مجموع جذريها يساوى ٥ (٢) حاصل ضرب جذريها يساوى –٣

(٣) أحد جذريها يساوى المعكوس الجمعى للآخر.

(٤) أحد جذريها يساوى المعكوس الضربى للآخر. «$\frac{٢٣}{٦}$ ، ٥ ، ٣ ، ١»

**١٤** أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة : ٢ س$^{٢}$ – (ك – ١) س + (ك$^{٢}$ + ٢ ك – ٣) = ٠
ضعف الجذر الآخر. «–٣,٥ أ ، ١»

**١٥** أوجد قيمة أ إذا كان أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ – أ س + ٢ أ – ٤ = ٠
أربعة أمثال الجذر الآخر. «١٠ أ ، ٢$\frac{١}{٢}$»

**١٦** إذا كان مجموع جذري المعادلة : (أ – ٢) س$^{٢}$ – أ س + ب$^{٢}$ = ٠
يساوى ٣ وحاصل ضربهما ٥ **أوجد قيمتى : أ ، ب** «٣ ، ± $\sqrt{٥}$»

**١٧** أوجد قيمة حـ التي تجعل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ – ٦ س + حـ = ٠
يساوى مربع الجذر الآخر. «–٢٧ أ ، ٨»

**١٨** إذا كان أحد جذري المعادلة : ٨ س$^{٢}$ – ٣٠ س + حـ = ٠
يساوى مربع الجذر الآخر **فأوجد قيمة : حـ** «٢٧ أ ، –١٢٥»

**١٩** أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة : ٤ س$^{٢}$ – أ س – ٣ = ٠
يزيد عن المعكوس الجمعى للآخر بمقدار ١ «٤»

**٢٠** أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − أ س + ٣ = ٠
يزيد عن المعكوس الضربى للجذر الآخر بمقدار ١ «٧»

---

**٢١** أوجد قيمة حـ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ١٠ س + حـ = ٠
يقل عن مربع الجذر الآخر بمقدار ٢ «−٥٦ ، أ ٢١»

---

**٢٢** إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ كنسبة ٢ : ٣
أثبت أن : ٢٥ أ حـ = ٦ $ب^٢$

---

**٢٣** إذا كان جذرا المعادلة : ٨ $س^٢$ − ب س + ٣ = ٠ موجبين والنسبة بينهما ٢ : ٣ **فأوجد قيمة : ب** «١٠»

---

**٢٤** إذا كان مجموع جذرى المعادلة : (أ + ١) $س^٢$ + (٣ أ − ١) س + $أ^٢$ + ١ = ٠
يساوى حاصل ضربهما فما قيمة أ ؟ «٠ أ −٣»

---

**٢٥** **أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠**

(١) ضعف الجذر الآخر.

(٢) يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣ «٩ أ حـ = ٢ $ب^٢$ ، ٤ أ حـ = $ب^٢$ − ٩ $أ^٢$»

---

**٢٦** أوجد قيمة أ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة : $س^٢$ − (أ + ٤) س + ٣ $أ^٢$ = ٠
يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − ٧ أ س + $أ^٢$ = ٠ «٤ أ −٢»

## اكتشف الخطأ

**٢٧** إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢$ + ٤ س + ك = ٢ هو ١٢ **فأوجد قيمة : ك**

**إجابة مى**

∵ حاصل ضرب الجذرين = ١٢

∴ $\frac{ك}{١}$ = ١٢

∴ ك = ١٢

**إجابة نورا**

∵ $س^٢$ + ٤ س + ك = ٢

∴ $س^٢$ + ٤ س + ك − ٢ = ٠

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ١٢

∴ $\frac{ك - ٢}{١}$ = ١٢ ∴ ك − ٢ = ١٢

∴ ك = ١٤

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٢٨** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان (٢ ت) أحد جذرى المعادلة التربيعية : س$^{٢}$ + أ س + ب = ٠ حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ..............

(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (-٢ ت)　　(ب) مجموع جذرى المعادلة = صفر

(جـ) حاصل ضرب جذرى المعادلة = -٤　　(د) المميز للمعادلة التربيعية < صفر

(٢) لإيجاد قيم ب ، حـ الحقيقية فى المعادلة : س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ يكون كافيًا الحصول على ..............

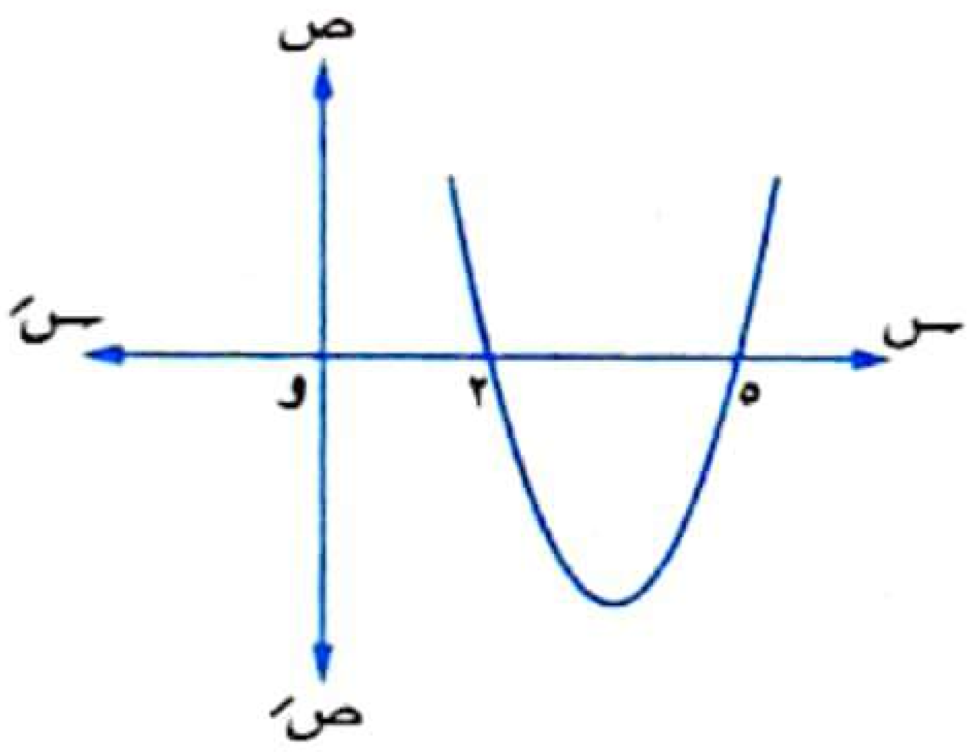
(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط.　　(ب) أحد الجذرين = (٣ + ت) فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.　　(د) لا شيء مما سبق.

(٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + حـ

فإن : $\frac{ب + حـ}{أ}$ = ..............




(أ) ٣　　(ب) ٥

(جـ) ٧　　(د) ١٠

(٤) حاصل ضرب جذور المعادلات :

أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ ، ب س$^{٢}$ + حـ س + أ = ٠ ، حـ س$^{٢}$ + أ س + ب = ٠

يساوى ..............

(أ) أ ب حـ　　(ب) -١　　(جـ) ١　　(د) صفر

(٥) إذا كان : س$_{١}$ ، س$_{٢}$ هما جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

وكان : س$_{١}$ < ٠ < س$_{٢}$ ، | س$_{١}$ | > | س$_{٢}$ | فأى من العبارات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) أ > ٠　　(ب) ب حـ > ٠　　(جـ) ب حـ < ٠　　(د) س$_{١}$ + س$_{٢}$ > ٠

---

**٢٩** أوجد قيم أ التى تجعل للمعادلة : ٣ س$^{٢}$ - (٢ أ - ١) س + (أ - ٤) = ٠

جذرين مختلفى الإشارة.　　«أ ∈ ]-∞ ، ٤[»



الدرس **4**

# تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$

وبضرب الطرفين فى $\frac{١}{\text{أ}}$ حيث أ ≠ ٠ تصبح المعادلة على الصورة :

$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠$ أى : $\text{س}^2 - \left(-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠$ (١)

ولكن : $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \text{ل} + \text{م}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \text{ل}\,\text{م}$

وبالتعويض فى (١) نحصل على المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م

وهى : $\text{س}^2 - (\text{ل} + \text{م})\,\text{س} + \text{ل}\,\text{م} = ٠$ (٢)

**أى** $\text{س}^2$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

وبتحليل المقدار الثلاثى فى الطرف الأيمن للمعادلة (٢) نحصل على صورة أخرى للمعادلة

**وهى** $(\text{س} - \text{ل})(\text{س} - \text{م}) = ٠$

**مثال ١**

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١ $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$

٢ $٣ + \sqrt{٢}$ ، $٣ - \sqrt{٢}$

٣ $\frac{-١ + \text{ت}}{\text{ت}}$ ، $\frac{٢}{١ + \text{ت}}$

**الحل**

١ مجموع الجذرين = $\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٣}{٢} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٥}{٨}$

، ∵ المعادلة هى : $\text{س}^2$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى : $\text{س}^2 - \frac{١١}{٤}\text{س} + \frac{١٥}{٨} = ٠$ وبضرب الطرفين فى ٨

∴ المعادلة هى : $٨\,\text{س}^2 - ٢٢\,\text{س} + ١٥ = ٠$

٢ مجموع الجذرين = ٣ + $\sqrt{٢}$ + ٣ − $\sqrt{٢}$ = ٦

، حاصل ضرب الجذرين = (٣ + $\sqrt{٢}$) (٣ − $\sqrt{٢}$) = ٩ − ٢ = ٧

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ − ٦ س + ٧ = ٠ .

٣ ∵ $\frac{-١ + ت}{ت} = \frac{(-١ + ت)\, ت}{ت \times ت} = \frac{-ت + ت^{٢}}{ت^{٢}} = \frac{-ت - ١}{-١}$ = ١ + ت

، $\frac{٢}{١ + ت} = \frac{٢\,(١ - ت)}{(١ + ت)\,(١ - ت)} = \frac{٢ - ٢ت}{١ - ت^{٢}} = \frac{٢ - ٢ت}{٢}$ = ١ − ت

∴ مجموع الجذرين = ١ + ت + ١ − ت = ٢ ، حاصل ضرب الجذرين = (١ + ت) (١ − ت) = ٢

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ − ٢ س + ٢ = ٠ .

**حاول بنفسك**

كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١ −٤ ، ٧

٢ ٣ − ٢ ت ، $\frac{٤ + ٧ ت}{٢ + ت}$

## تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

**مثال ٢**

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠ هما ل ، م

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل + ٧ ، م + ٧

**الحل**

فى هذا المثال المطلوب تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاة حيث توجد علاقة معينة بين جذرى كل من المعادلتين.

ولهذا المثال عدة طرق للحل نسردها فيما يلى :

### الطريقة الأولى

وتتلخص خطواتها فيما يلى :

١ نوجد جذرى المعادلة المعطاة.

٢ نوجد جذرى المعادلة المطلوبة.

٣ نكون المعادلة المطلوب تكوينها.

∵ س$^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠

∴ ٦ ، −١ هما جذرا المعادلة المعطاة.

وبفرض أن : ل = ٦ ، م = −١ ، جذرى المعادلة المطلوبة هما هـ ، و

∴ هـ = ل + ٧ = ٦ + ٧ = ١٣ ، و = م + ٧ = −١ + ٧ = ٦

∴ هـ + و = ١٣ + ٦ = ١٩ ، هـ و = ١٣ × ٦ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^{٢}$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠

### الطريقة الثانية

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ هـ + و = ل + ٧ + م + ٧ = ل + م + ١٤

، ∵ ل + م = ٥ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ + و = ٥ + ١٤ = ١٩

، هـ و = (ل + ٧) (م + ٧) = ل م + ٧ (ل + م) + ٤٩

، ∵ ل م = −٦ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ و = −٦ + ٧ × ٥ + ٤٩ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^{٢}$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠

### الطريقة الثالثة

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ ل = هـ − ٧ ، م = و − ٧

، ∵ ل أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ ل$^{٢}$ − ٥ ل − ٦ = ٠

، ∵ ل = هـ − ٧

∴ (هـ − ٧)$^{٢}$ − ٥ (هـ − ٧) − ٦ = ٠

∴ هـ$^{٢}$ − ١٤ هـ + ٤٩ − ٥ هـ + ٣٥ − ٦ = ٠

∴ هـ$^{٢}$ − ١٩ هـ + ٧٨ = ٠

**أى أن** هـ جذر للمعادلة : س$^{٢}$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠ وهى المعادلة المطلوبة.

**ملاحظة**

لا تستخدم الطريقة الثالثة إلا فى حالة أن تكون العلاقة بين الجذر الأول للمعادلة المطلوبة والجذر الأول للمعادلة المعطاة هى نفسها العلاقة بين الجذر الثانى للمعادلة المطلوبة والجذر الثانى للمعادلة المعطاة.

**تذكر المتطابقات الآتية**

١ ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م

٢ (ل − م)$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٤ ل م

٣ ل$^{٣}$ + م$^{٣}$ = (ل + م) [(ل + م)$^{٢}$ − ٣ ل م]

٤ ل$^{٣}$ − م$^{٣}$ = (ل − م) [(ل + م)$^{٢}$ − ل م]

٥ $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل} = \frac{ل + م}{ل م}$

٦ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

**مثال ٣**

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٧ س + ٩ = ٠ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

١ ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ ٢ ل$^{٢}$ + ٣ ل م + م$^{٢}$ ٣ ل − م ٤ ل$^{٢}$ − م$^{٢}$

**الحـــل**

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٧ س + ٩ = ٠ ∴ ل + م = ٧ ، ل م = ٩

١ ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م = ٧$^{٢}$ − ٢ × ٩ = ٤٩ − ١٨ = ٣١

٢ ل$^{٢}$ + ٣ ل م + م$^{٢}$ = (ل$^{٢}$ + ٢ ل م + م$^{٢}$) + ل م = (ل + م)$^{٢}$ + ل م = ٧$^{٢}$ + ٩ = ٤٩ + ٩ = ٥٨

٣ ∵ (ل − م)$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٤ ل م = ٧$^{٢}$ − ٤ × ٩ = ٤٩ − ٣٦ = ١٣

∴ ل − م = $\sqrt{١٣}$ حيث ل > م

٤ ∵ ل$^{٣}$ − م$^{٣}$ = (ل − م) [(ل + م)$^{٢}$ − ل م] وبالتعويض من ٣ :

∴ ل$^{٣}$ − م$^{٣}$ = $\sqrt{١٣}$ [٧$^{٢}$ − ٩] = $\sqrt{١٣}$ (٤٩ − ٩) = ٤٠ $\sqrt{١٣}$

**مثال ٤**

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٨ س + ٥ = ٠ هما ل ، م فكوّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

**الحـــل**

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ ل + م = ٨ ، ل م = ٥

، ∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة. ∴ مجموع الجذرين = $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{م + ل}{ل م}$ = $\frac{٨}{٥}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$ = $\frac{١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^{٢}$ − $\frac{٨}{٥}$ س + $\frac{١}{٥}$ = ٠ أى ٥ س$^{٢}$ − ٨ س + ١ = ٠

**مثال ٥**

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٩ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها : ل$^{٢}$ ، م$^{٢}$

**الحـــل**

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ ل + م = ٥ ، ل م = ٩

، ∵ ل$^{٢}$ ، م$^{٢}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين = ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م = ٥$^{٢}$ − ٢ × ٩ = ٧

، حاصل ضرب الجذرين = ل$^{٢}$ × م$^{٢}$ = (ل م)$^{٢}$ = ٩$^{٢}$ = ٨١

∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^{٢}$ − ٧ س + ٨١ = ٠

**مثال ٦**

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س$^{٢}$ + ٥ س − ٧ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها : ل + $\frac{١}{م}$ ، م + $\frac{١}{ل}$

**الحل**

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\text{ل} + \text{م} = \frac{-٥}{٣}$ ، $\text{ل م} = \frac{-٧}{٣}$

، ∵ $\text{ل} + \frac{١}{\text{م}}$ ، $\text{م} + \frac{١}{\text{ل}}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين $= \text{ل} + \frac{١}{\text{م}} + \text{م} + \frac{١}{\text{ل}} = \text{ل} + \text{م} + \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}}$

$$= \frac{-٥}{٣} + \frac{\frac{-٥}{٣}}{\frac{-٧}{٣}} = \frac{-٥}{٣} + \frac{٥}{٧} = \frac{-٣٥ + ١٥}{٢١} = -\frac{٢٠}{٢١}$$

، حاصل ضرب الجذرين $= \left(\text{ل} + \frac{١}{\text{م}}\right)\left(\text{م} + \frac{١}{\text{ل}}\right) = \text{ل م} + \frac{١}{\text{ل م}} + ٢$

$$= \frac{-٧}{٣} - \frac{٣}{٧} + ٢ = \frac{-٤٩ - ٩ + ٤٢}{٢١} = \frac{-١٦}{٢١}$$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^٢ - \frac{-٢٠}{٢١}\text{س} + \frac{-١٦}{٢١} = ٠$

**أى** $٢١\,\text{س}^٢ + ٢٠\,\text{س} - ١٦ = ٠$

## حاول بنفسك

إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $٢\,\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} - ١ = ٠$ **فكوّن المعادلة التى جذراها :** $\text{ل}^٢$ ، $\text{م}^٢$

## مثال ٧

إذا كان $\frac{٢}{\text{ل}}$ ، $\frac{٢}{\text{م}}$ هما جذرا المعادلة : $\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} + ٤ = ٠$ **فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م**

**الحل**

∵ $\frac{٢}{\text{ل}}$ ، $\frac{٢}{\text{م}}$ هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\frac{٢}{\text{ل}} \times \frac{٢}{\text{م}} = ٤$

∴ $\frac{٤}{\text{ل م}} = ٤$ ∴ $\text{ل م} = ١$

، $\frac{٢}{\text{ل}} + \frac{٢}{\text{م}} = ٦$ ∴ $\frac{٢\,\text{ل} + ٢\,\text{م}}{\text{ل م}} = ٦$

∴ $\frac{٢\,(\text{ل} + \text{م})}{١} = ٦$ ∴ $\text{ل} + \text{م} = \frac{٦}{٢} = ٣$

، ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة ، ل + م = ٣ ، ل م = ١

∴ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ١ = ٠$

## حاول بنفسك

إذا كان $\frac{١}{\text{ل}}$ ، $\frac{١}{\text{م}}$ هما جذرا المعادلة : $٦\,\text{س}^٢ - ٥\,\text{س} + ١ = ٠$ **فكوّن المعادلة التى جذراها : ل ، م**

## مثال ٨

**إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$ فأوجد قيمة : ك**

### الحل

بفرض أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ هما : ل ، م

∴ ل + م = ك ، ل م = ٤ ك

، ∵ الفرق بين ل ، م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$

∴ ل − م = −٣ ك

∵ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤$ ل م (من المتطابقات السابق ذكرها)

∴ $(-٣ ك)^٢ = ك^٢ - ٤ (٤ ك)$ ∴ $٩ ك^٢ = ك^٢ - ١٦ ك$

∴ $٨ ك^٢ + ١٦ ك = ٠$ ∴ $٨ ك (ك + ٢) = ٠$ ∴ ك = ٠

أ، ك + ٢ = ٠ ومنها ك = −٢

**حل آخر : (باستخدام قانون الفرق بين الجذرين) :**

∵ $ل - م = \frac{\pm \sqrt{المميز}}{أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{أ}$

**لاحظ أنه**

يمكن استنتاج قانون الفرق بين الجذرين من القانون العام بنفس الطريقة التى أوجدنا بها قانون مجموع الجذرين فى الدرس السابق.

ومن المعادلة : $س^٢ - ك س + ٤ ك = ٠$ نجد أن :

$ل - م = \pm \sqrt{ك^٢ - ١٦ ك}$ (١)

، ∵ ل − م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ك = ٠$

∴ ل − م = −٣ ك (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\pm \sqrt{ك^٢ - ١٦ ك} = -٣ ك$ وبتربيع الطرفين.

∴ $ك^٢ - ١٦ ك = ٩ ك^٢$ ∴ $٨ ك^٢ + ١٦ ك = ٠$

∴ ك = ٠ ، أ، ك = −٢

**حاول بنفسك**

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^٢ + ك س + ٢ ك = ٠$

يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٦ س^٢ + ٥ س + ك = ٠$ **فأوجد قيمة : ك**

# على تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

من أسئلة الكتاب المدرسي

**١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) المعادلة التربيعية التى مجموع جذريها −١ وحاصل ضربهما −٣ هى ..........

(أ) $س^{٢} - س - ٣ = ٠$ (ب) $س^{٢} + س + ٣ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - س + ٣ = ٠$ (د) $س^{٢} + س - ٣ = ٠$

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ ، −٥ هى ..........

(أ) $س^{٢} + ٢س - ١٥ = ٠$ (ب) $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

(جـ) $س^{٢} - ٢س + ١٥ = ٠$ (د) $س^{٢} + ٢س + ١٥ = ٠$

(٣) إذا كان ل ، $ل^{٢}$ هما جذرا المعادلة : $٢س^{٢} + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن : ب = ..........

(أ) −١٢ (ب) −٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

(٤) إذا كان م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : $أس^{٢} + ب س + ١٢ = ٠$ فإن : أ = ..........

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

**٢ كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها :**

(١) −٢ ، ٤

(٢) ٧ ، ٧

(٣) −٧ ، صفر

(٤) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

(٥) $\frac{٣}{٥}$ ، $-٢\frac{١}{٥}$

(٦) $٥\sqrt{٣}$ ، $-٢\sqrt{٣}$

(٧) $٧ + ٢\sqrt{٥}$ ، $٧ - ٢\sqrt{٥}$

(٨) −٥ت ، ٥ت

(٩) ١ − ٣ت ، ١ + ٣ت

(١٠) $٣ - ٢\sqrt{٢}ت$ ، $٣ + ٢\sqrt{٢}ت$

(١١) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

(١٢) $\frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت}$ ، $\frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت}$

(١٣) أ − ب ، أ + ب

(١٤) $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ - ب}$ ، $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ^{٢} + أب + ب^{٢}}$

**٣** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٧س + ٥ = ٠$ .

**فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :**

(١) $ل^{٢}م + م^{٢}ل$

(٢) $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل}$

(٣) (ل − ٢) (م − ٢)

(٤) $(ل + \frac{١}{م})(م + \frac{١}{ل})$

٣٥ ، $\frac{٧}{٥}$ ، −٥ ، $٧\frac{١}{٥}$

**٤** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٤ س + ٢ = ٠ حيث ل > م

**فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :**

(١) ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ | (٢) ل − م | (٣) ل$^{٣}$ + م$^{٣}$

(٤) ل$^{٢}$ − ٤ ل + ٧ | (٥) ٢ م$^{٢}$ − ٨ م + ١٥

«١٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤٠ ، ٥ ، ١١»

---

**٥** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س − ٥ = ٠ .

**فأوجد المعادلة التى جذراها : ل − ٤ ، م − ٤**

«س$^{٢}$ + ٥ س − ١ = ٠»

---

**٦** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٣ = ٠ .

**أوجد المعادلة التى جذراها : ٢ ل ، ٢ م**

«س$^{٢}$ − ١٠ س + ١٢ = ٠»

---

**٧** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ٥ س − ٧ = ٠ .

**أوجد المعادلة التى جذراها : ١ − ل ، ١ − م**

«٢ س$^{٢}$ + س − ١٠ = ٠»

---

**٨** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س + ١ = ٠ .

**فكوّن المعادلة التى جذراها : ل + م ، ل م**

«س$^{٢}$ − ٤ س + ٣ = ٠»

---

**٩** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س − ٤ = ٠ .

**أوجد المعادلة التى جذراها :** $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

«٤ س$^{٢}$ + ٣ س − ١ = ٠»

---

**١٠** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ٣ س − ٦ = ٠ .

**فكوّن المعادلة التى جذراها :** $\frac{ل}{٤}$ ، $\frac{م}{٤}$

«١٦ س$^{٢}$ − ٦ س − ٣ = ٠»

---

**١١** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ٥ س + ١ = ٠ .

**أوجد المعادلة التى جذراها : ٢ ل$^{٢}$ ، ٢ م$^{٢}$**

«٢ س$^{٢}$ − ٢١ س + ٢ = ٠»

---

**١٢** **كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ − ٧ س − ٩ = ٠ .

«س$^{٢}$ − ٩ س − ١ = ٠»

---

**١٣** **كوّن المعادلة التربيعية التى كل جذر من جذريها يساوى نصف نظيره من جذرى المعادلة :**

٤ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٧ = ٠ .

«١٦ س$^{٢}$ − ٢٤ س + ٧ = ٠»

---

**١٤** **كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ + ٣ س − ٥ = ٠ .

«س$^{٢}$ − ١٩ س + ٢٥ = ٠»

---

**١٥** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ٣ س − ١ = ٠ .

**كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها :** $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

«٢ س$^{٢}$ + ١٣ س + ٢ = ٠»

١٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ + ٥ س + ٦ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ل − م ، م − ل

«$س^{٢}$ − ١ = ٠»

---

١٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٢ س − ٤ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$

«١٦ $س^{٢}$ − ١٢ س + ١ = ٠»

---

١٨ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^{٢}$ − ٥ س + ٢ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : $\frac{ل^{٢}}{م}$ ، $\frac{م^{٢}}{ل}$

«١٨ $س^{٢}$ − ٣٥ س + ١٢ = ٠»

---

١٩ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ١٠ $س^{٢}$ + ١٢ س − ١ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ٢ ل + $\frac{١}{م}$ ، ٢ م + $\frac{١}{ل}$

«٥ $س^{٢}$ − ٤٨ س − ٣٢ = ٠»

---

٢٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س − ٥ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}$ م ، $م^{٢}$ ل

«$س^{٢}$ + ١٥ س − ١٢٥ = ٠»

---

٢١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ٦ ، $ل^{٢}$ + $م^{٢}$

«$س^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠»

---

٢٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س − ١ = ٠ حيث ل > م

كوِّن المعادلة التى جذراها : ٣ ل − ٢ م ، ٢ ل − ٣ م

«$س^{٢}$ − ٥ $\sqrt{١٣}$ س + ٧٩ = ٠»

---

٢٣ إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ١١ س + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م

«$س^{٢}$ − ٧ س − ١٥ = ٠»

---

٢٤ إذا كان ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٥ س + ١١ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}$ م ، $م^{٢}$ ل

«$س^{٢}$ + ٥ س + ١٢٥ = ٠»

---

٢٥ إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س + ١ = ٠

كوِّن المعادلة التى جذراها : ل م − ٧ ، ل + م + ٣

«$س^{٢}$ − ٣٦ = ٠»

---

٢٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ − ٢ س − ٥ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : $ل^{٢}$ + م ، $م^{٢}$ + ل

«$س^{٢}$ − ١٦ س + ٥٨ = ٠»

**٢٧** إذا كان $\frac{٣}{ل}$ ، $\frac{٣}{م}$ هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = ٠

فكوّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٣}}$ ، $\frac{١}{م^{٣}}$ «س$^{٢}$ − ٥٢ س + ١ = ٠»

---

**٢٨** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : ٦ س$^{٢}$ − ٧ س + ١ = حـ هو $\frac{١١}{٦}$

أوجد : قيمة حـ «٤»

---

**٢٩** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : ٣ س$^{٢}$ − ٢ س + حـ = ٠ يساوى الفرق بين جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − حـ س + ٣ = ٠ فأثبت أن : ٩ حـ$^{٢}$ + ٤٨ حـ − ٢٣٢ = ٠

---

**٣٠** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + ك س + ٢ ك = ٠

يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + ٣ س + ك = ٠ أوجد : قيمة ك «٠ ، $\frac{-٨}{٣}$»

---

**٣١** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٤ س$^{٢}$ − ٦ س + أ = ٠ وكان : ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = ٧ ل م

أوجد : قيمة أ «١»

---

**٣٢** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٨ س + حـ = ٠ وكان : ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = ٤٠

فأوجد قيمة حـ العددية ، ثم كوّن المعادلة التى جذراها : ل$^{٢}$ م + م$^{٢}$ ل ، ل م

«حـ = ١٢ ، س$^{٢}$ − ١٠٨ س + ١١٥٢ = ٠»

---

**٣٣** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٤ س − ٥ = ٠ حيث ل $>$ م

فكوّن المعادلة التى جذراها : ل − ٧ ، ٢ م$^{٢}$ + ١ «س$^{٢}$ − س − ٦ = ٠»

## اكتشف الخطأ

**٣٤** إذا كان ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ٥ س + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها : ل ، م

**حل يوسف**

∵ (ل + ١) + (م + ١) = −٥

∴ ل + م + ٢ = −٥ ∴ ل + م = −٧

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ٣

∴ ل م + (ل + م) + ١ = ٣

∴ ل م − ٧ + ١ = ٣ ∴ ل م = ٩

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ + ٧ س + ٩ = ٠

**حل أميرة**

∵ ل + م = −٥ ، ل م = ٣

∴ (ل + ١) + (م + ١)

= ل + م + ٢ = −٥ + ٢ = −٣

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= ٣ − ٣ + ١ = ١

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ + ٣ س + ١ = ٠

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٣٥** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التى جذراها بعدا مستطيل مساحته ١٥ سم$^{٢}$ ومحيطه ٢٦ سم هى ..............

(أ) س$^{٢}$ − ٢٦ س + ١٥ = ٠ (ب) س$^{٢}$ + ٢٦ س − ١٥ = ٠

(جـ) س$^{٢}$ − ١٣ س − ١٥ = ٠ (د) س$^{٢}$ − ١٣ س + ١٥ = ٠

(٢) إذا كان : أ$^{٢}$ + ٣ أ + ١ = ٠ ، ب$^{٢}$ + ٣ ب + ١ = ٠

حيث أ ، ب عددان حقيقيان مختلفان

فإن : $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{ب}{أ}$ = ..............

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) −٥ (د) ١١

(٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : (س − أ) (س − ب) = ك فإن المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى ..............

(أ) (س − ل) (س − م) = ٠ (ب) (س − ل) (س − م) + ك = ٠

(جـ) (س − ل) (س − م) = ك (د) س$^{٢}$ − (ل + م) س + ك = ٠

(٤) لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م حيث ل ، م عددان حقيقيان يكون كافيًا الحصول على ..............

(أ) ل + م = ٥ فقط. (ب) (ل + م + ٤)$^{٢}$ + (ل م − ٣)$^{٢}$ = صفر فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٥) عمر وخالد يحاولان حل معادلة تربيعية ، أخطأ عمر فى كتابة الحد المطلق فى المعادلة فوجد أن جذرى المعادلة هما ٣ ، ٤ بينما أخطأ خالد فى كتابة معامل س فى المعادلة فوجد أن جذرى المعادلة هما ٢ ، ٣ فإن الجذرين الصحيحين للمعادلة هما ..............

(أ) ٢ ، ٤ (ب) −٢ ، −٤ (جـ) ١ ، ٦ (د) −١ ، −٦

(٦) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ عددين فرديين متتاليين

فإن : ب$^{٢}$ − ٤ حـ = ..............

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ - ب س + حـ = ٠$ عددين صحيحين مختلفين وكل من ب ، حـ عددًا أوليًا فأى من العبارات الآتية صحيحة ؟

① الفرق بين جذرى المعادلة عدد فردى. ② $ب^٢ - حـ$ عدد أولى.

③ ب + حـ عدد أولى.

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ③ فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

(٨) إذا قطع منحنى الدالة د حيث $د(س) = أ س^٢ + ب س + حـ$ محور السينات فى س = ل ، س = م حيث $|ل - م| > ١$ فإن : ..............

(أ) $د(ل + ١) > د(ل) > د(ل - ١)$ (ب) $د(ل - ١) > د(ل) > ل(ل + ١)$

(جـ) $د(ل) > د(ل + ١) > د(ل - ١)$ (د) $د(ل + ١) × د(ل - ١) > ٠$

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - (طا θ) س - ١ = ٠$ وكان : $ل^٢ + م^٢ = ٣$ حيث $٠° > θ > ٩٠°$ فإن : θ = ..............

(أ) $\frac{π}{١٢}$ (ب) $\frac{π}{٦}$ (جـ) $\frac{π}{٤}$ (د) $\frac{π}{٣}$

---

**٣٦** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ٢ ب س + حـ = ٠$ حيث $أ ≠ ٠$ ، ل > م

وكان : ل − م = ٢

فأثبت أن : (١) $ب^٢ = أ(أ + حـ)$ (٢) $ل = ١ - \frac{ب}{أ}$

---

**٣٧** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث $أ ≠ ٠$

يساوى ضعف مجموع معكوسيهما الضربيين أثبت أن : $حـ^٢ (ب^٢ - ٤ أ حـ) = ٤ أ^٢ ب^٢$



# الدرس 5

# إشارة الدالة

## بحث إشارة الدالة

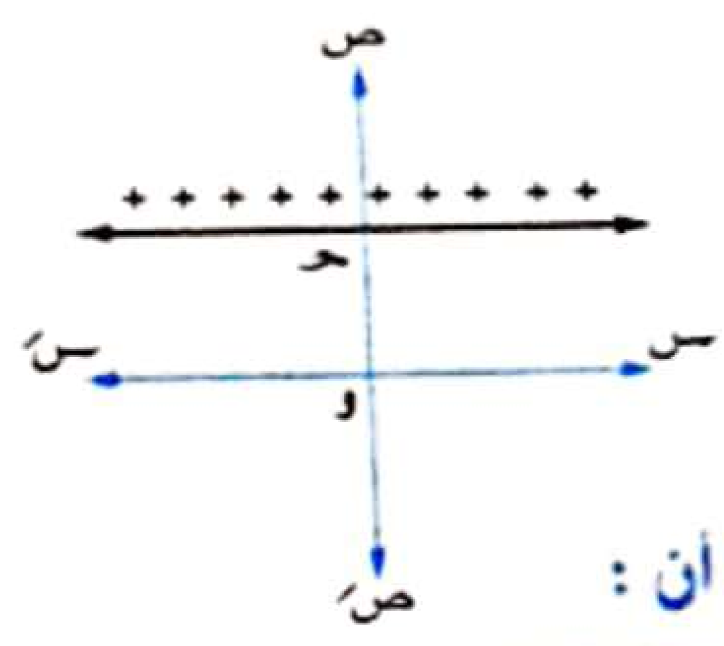
المقصود ببحث إشارة الدالة د فى المتغير س هو تحديد قيم س التى تكون عندها قيم الدالة على النحو التالى :

- موجبة أى : د (س) > ٠
- سالبة أى : د (س) < ٠
- مساوية للصفر أى : د (س) = ٠

## أولًا إشارة الدالة الثابتة

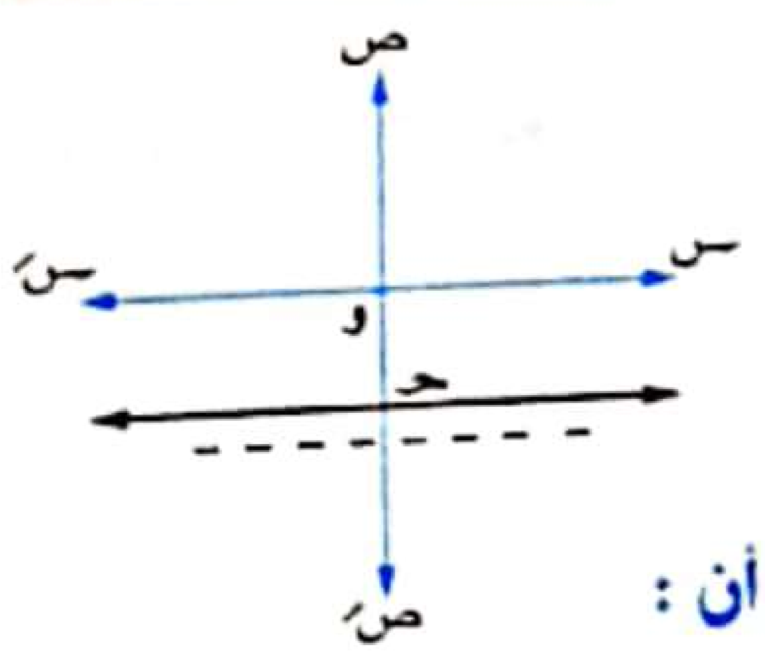
لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

د : د (س) = حـ (حيث حـ موجبة)




نلاحظ أن : إشارة الدالة موجبة لجميع قيم س ∈ ح

د : د (س) = حـ (حيث حـ سالبة)




نلاحظ أن : إشارة الدالة سالبة لجميع قيم س ∈ ح

**مما سبق نستنتج أن :**

- إشارة الدالة الثابتة د : د (س) = حـ ، حـ ∈ ح* هى نفس إشارة حـ لجميع قيم س ∈ ح

**فمثلًا**

- إذا كانت د (س) = ٥ فإن إشارة الدالة د تكون موجبة لجميع قيم س ∈ ح
- وإذا كانت د (س) = −٣ فإن إشارة الدالة د تكون سالبة لجميع قيم س ∈ ح

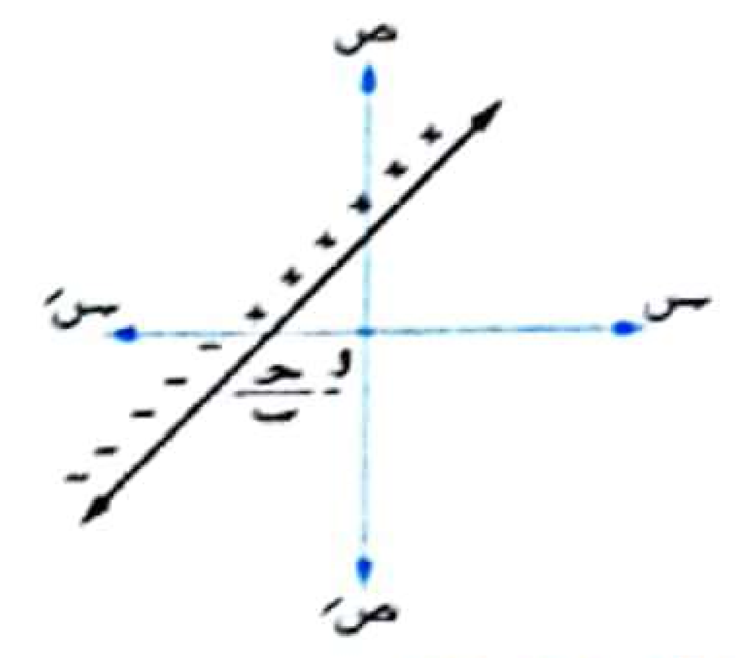
**حاول بنفسك**

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين : [١] د : د (س) = ١٠ [٢] د : د (س) = $-\frac{٢}{٥}$

## ثانيًا إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

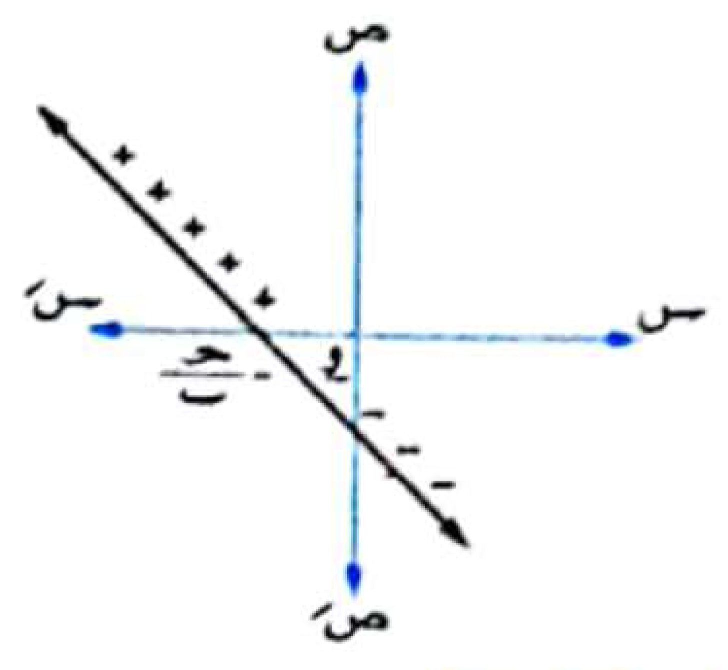
**د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب موجبة)**




**نلاحظ أن إشارة الدالة :**

- مثل إشارة ب (موجبة) عندما س > $-\frac{ح}{ب}$
- مخالفة لإشارة ب (سالبة) عندما س < $-\frac{ح}{ب}$
- مساوية للصفر عندما س = $-\frac{ح}{ب}$

**د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب سالبة)**




**نلاحظ أن إشارة الدالة :**

- مثل إشارة ب (سالبة) عندما س < $-\frac{ح}{ب}$
- مخالفة لإشارة ب (موجبة) عندما س > $-\frac{ح}{ب}$
- مساوية للصفر عندما س = $-\frac{ح}{ب}$

**مما سبق نستنتج أنه :**

لإيجاد إشارة الدالة الخطية د : د (س) = ب س + حـ ، ب ≠ ٠

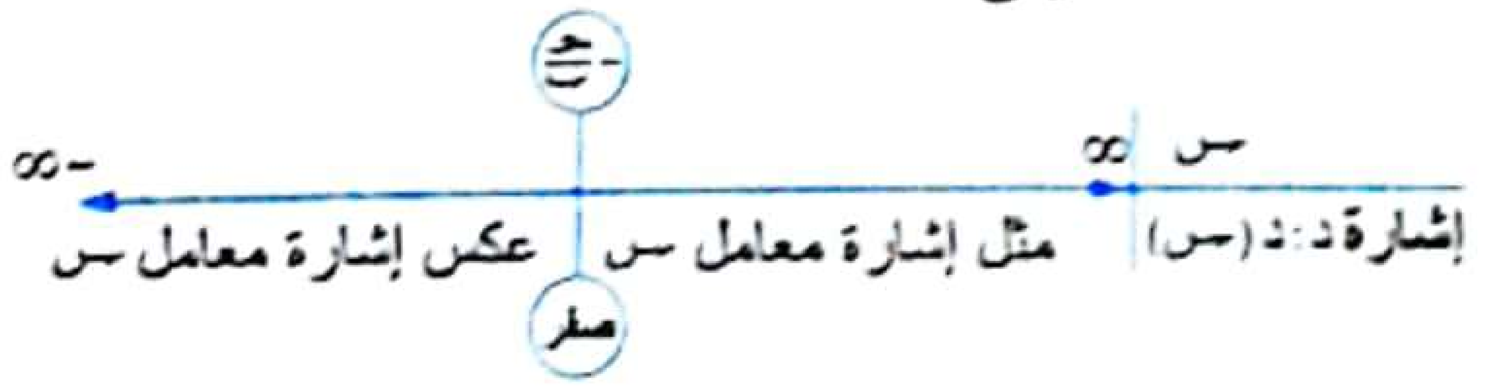
نضع د (س) = ٠ ∴ ب س + حـ = ٠ ∴ س = $\frac{-ح}{ب}$

- **فتكون إشارة الدالة د :**

[١] مثل إشارة ب عندما س > $\frac{-ح}{ب}$ [٢] عكس إشارة ب عندما س < $\frac{-ح}{ب}$

[٣] د (س) = ٠ عندما س = $\frac{-ح}{ب}$

- **ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :**




**مثال ١**

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين مع التوضيح على خط الأعداد :

[١] د : د (س) = ٣ س + ٦ [٢] د : د (س) = ١ − $\frac{١}{٢}$ س

## الحـــل

١ ∵ د (س) = ٣ س + ٦ وبوضع د (س) = ٠

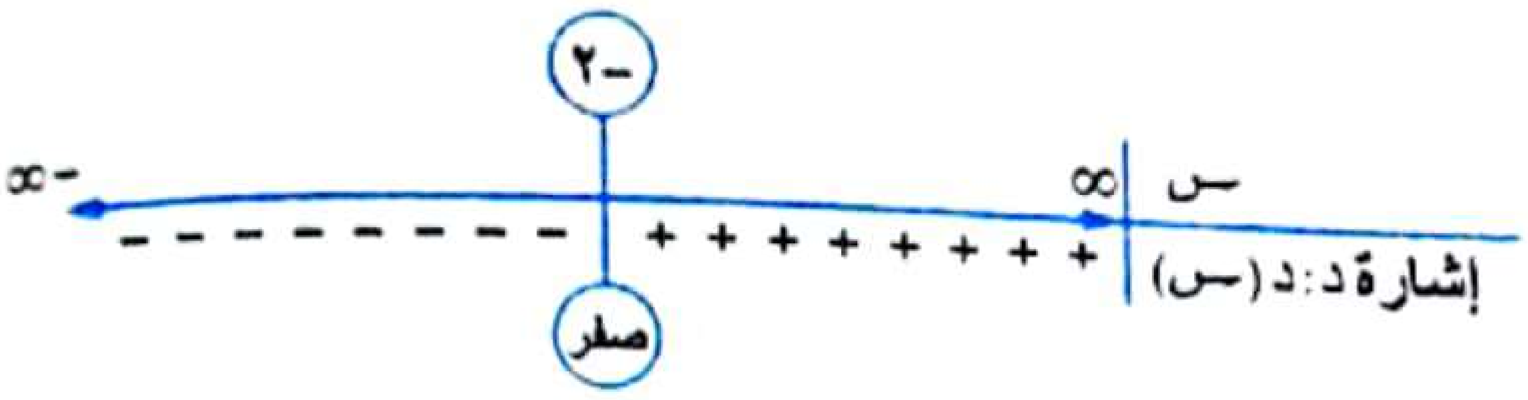
∴ ٣ س + ٦ = ٠ ∴ س = -٢

∴ إشارة الدالة د تكون :

• موجبة عندما س > -٢ • سالبة عندما س < -٢

• د (س) = ٠ عندما س = -٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد فى الشكل المقابل :




٢ ∵ د (س) = -$\frac{١}{٢}$ س + ١ وبوضع د (س) = ٠

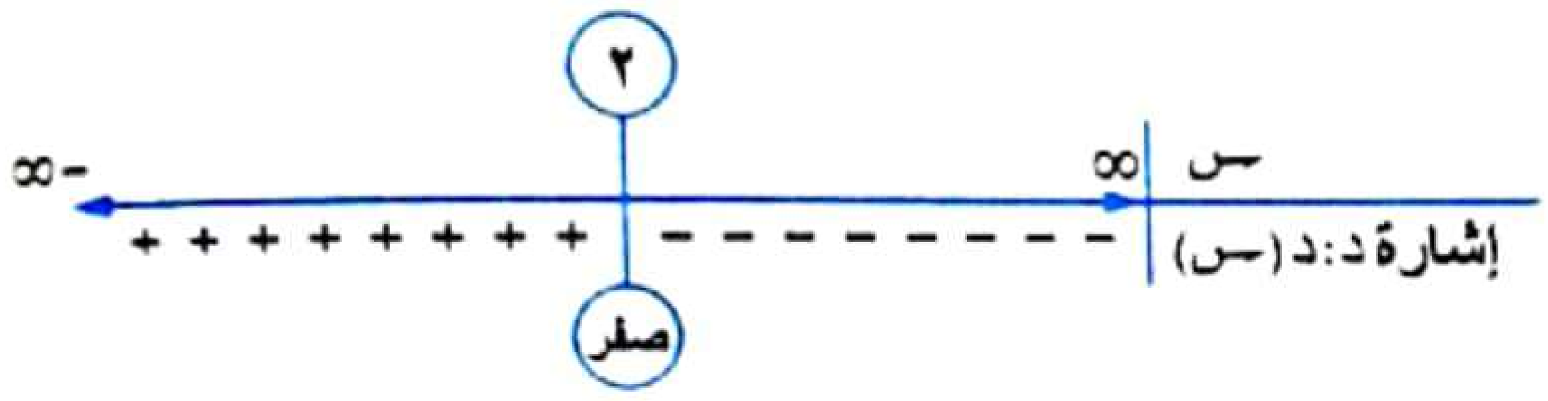
∴ -$\frac{١}{٢}$ س = -١ ∴ س = ٢

∴ إشارة الدالة د تكون :

• سالبة عندما س > ٢ • موجبة عندما س < ٢

• د (س) = ٠ عندما س = ٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد فى الشكل المقابل :




### حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

١ د : د (س) = -٣ س + ٦ ٢ د : د (س) = ٢ + $\frac{١}{٢}$ س

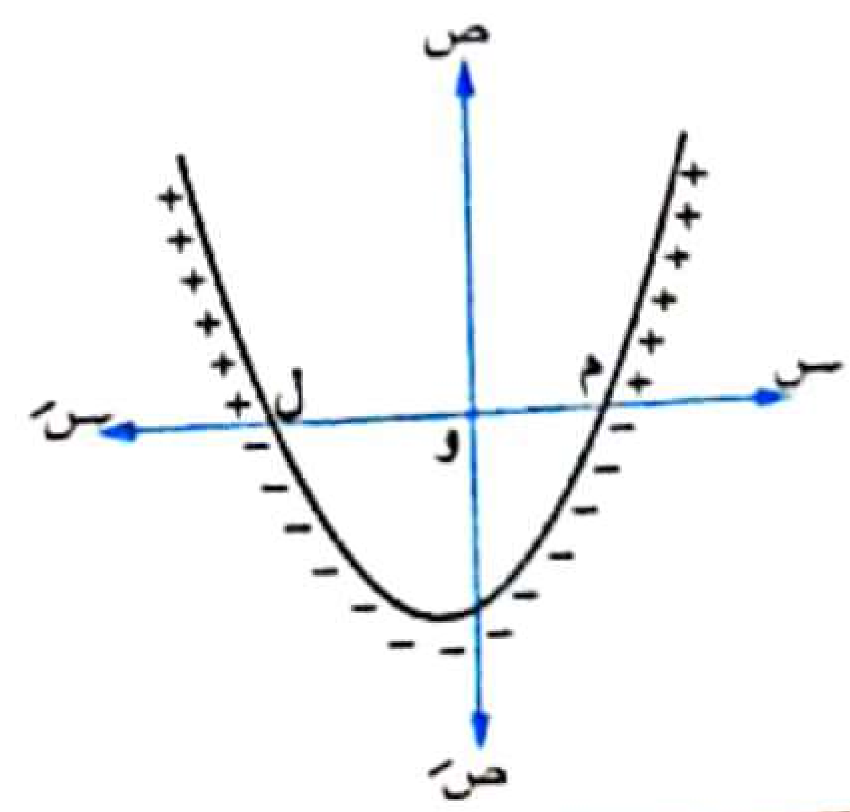
## ثالثًا إشارة دالة الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د : د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + حـ ، أ ≠ ٠ .

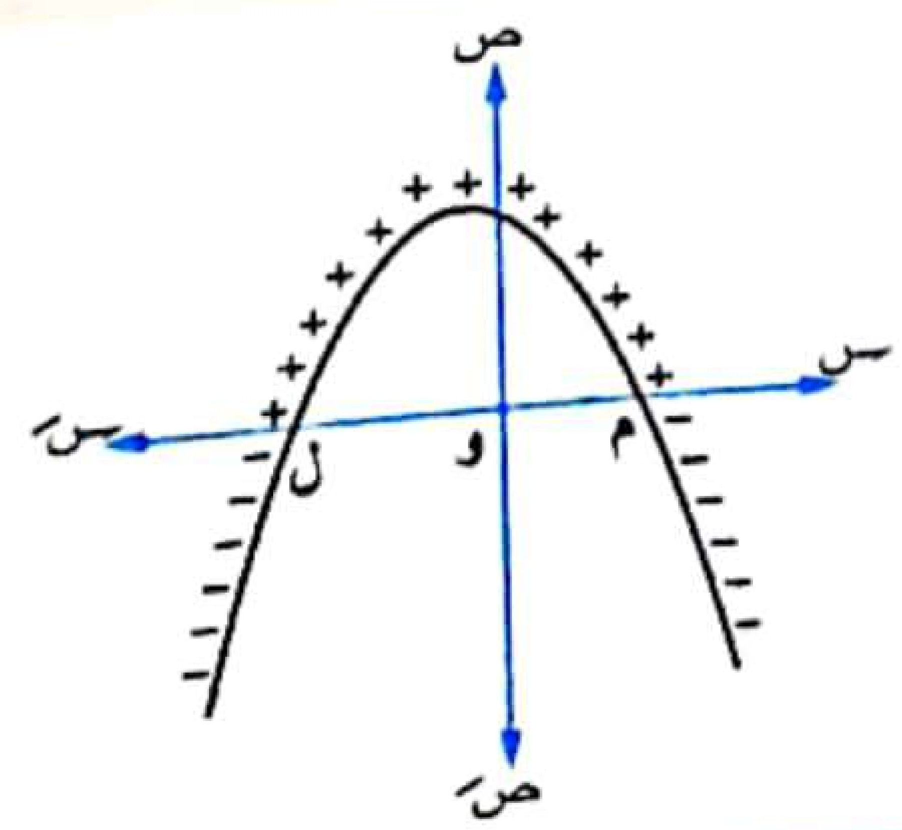
فإننا نوجد مميز المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ وتوجد ثلاث حالات :

١ المميز ب$^{٢}$ - ٤ أ حـ > ٠ فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيان نفرض أنهما ل ، م حيث ل < م :

إذا كانت : أ موجبة



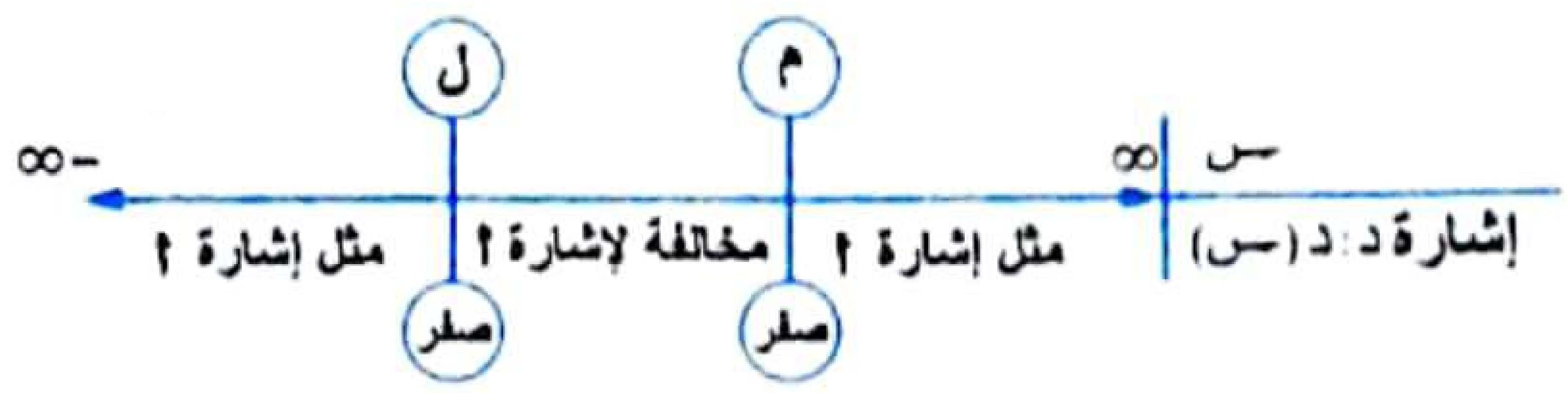

إذا كانت : أ سالبة



**وتكون إشارة الدالة كما يلى :**

- **مثل** إشارة أ عندما س ∈ ح - [ل ، م]
- **مخالفة** لإشارة أ عندما س ∈ ]ل ، م[
- **مساوية** للصفر عندما س ∈ {ل ، م}

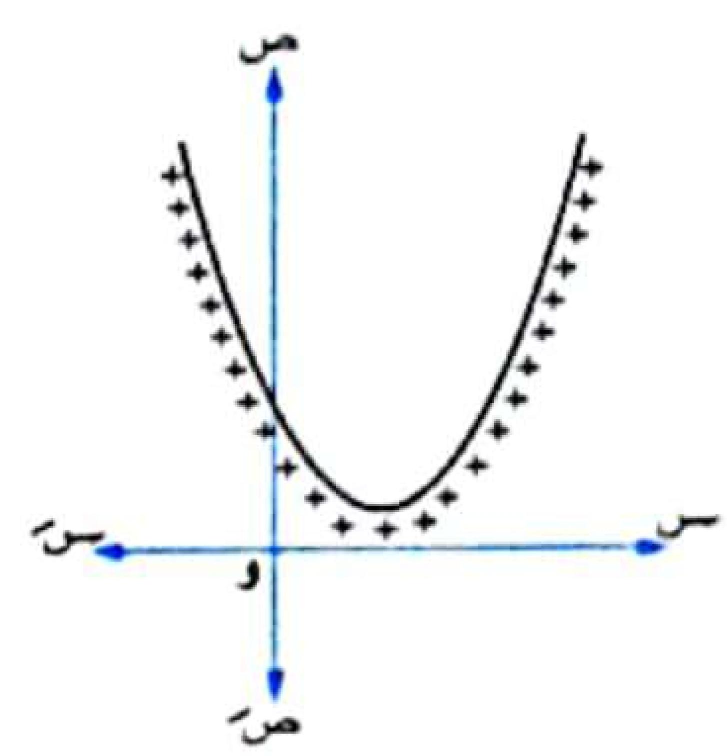
ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلى :



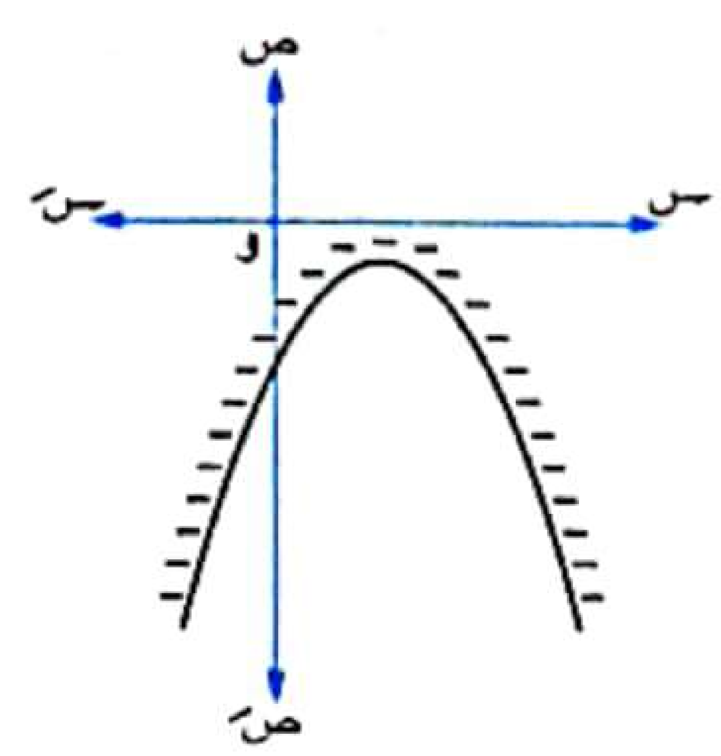

## ٢ المميز ب$^{٢}$ - ٤ أ حـ < ٠

فإنه لا توجد للمعادلة جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة كما يلى :

**إذا كانت : أ موجبة**




**إذا كانت : أ سالبة**

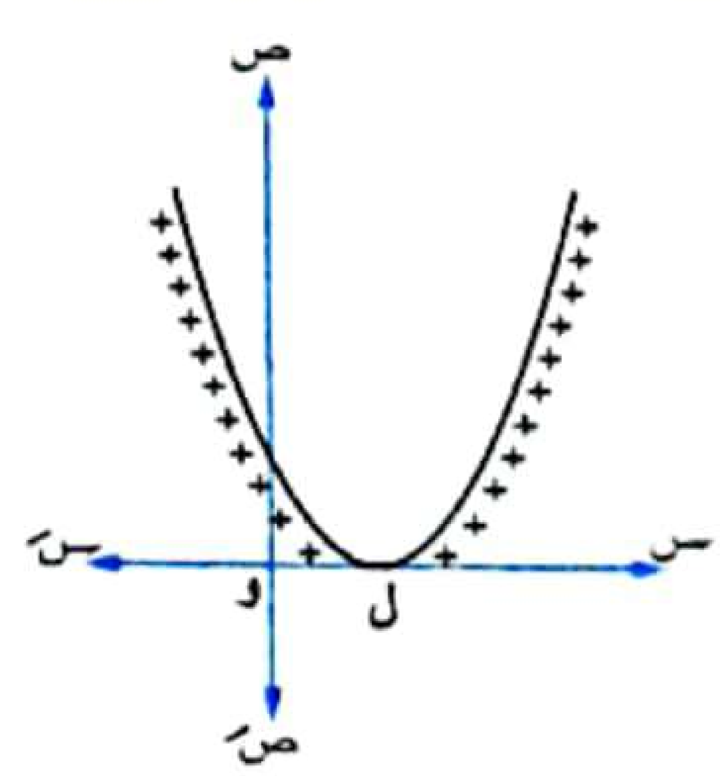



إشارة الدالة مثل إشارة أ لجميع قيم س ∈ ح

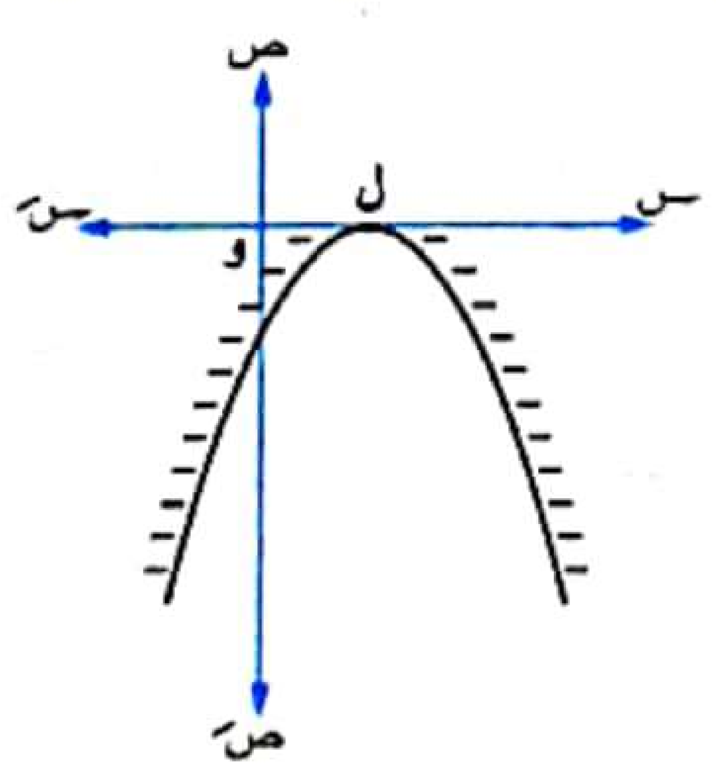
## ٣ المميز ب$^{٢}$ - ٤ أ حـ = ٠

فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ، وليكن كل منهما يساوى ل :

**إذا كانت : أ موجبة**



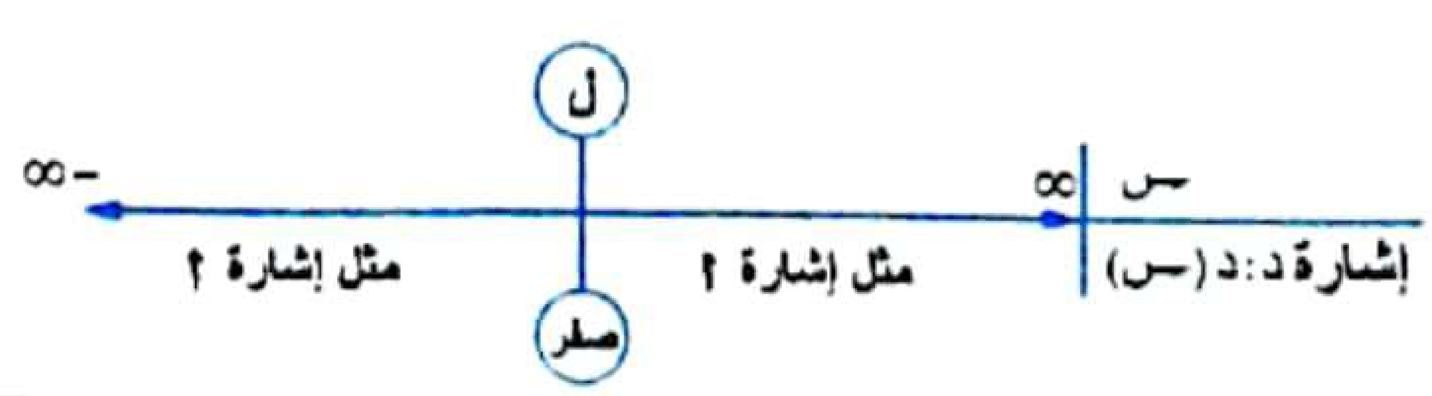

**إذا كانت : أ سالبة**




**وتكون إشارة الدالة كما يلى :**

- مثل إشارة أ عندما س ≠ ل
- مساوية للصفر عندما س = ل

ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلى :

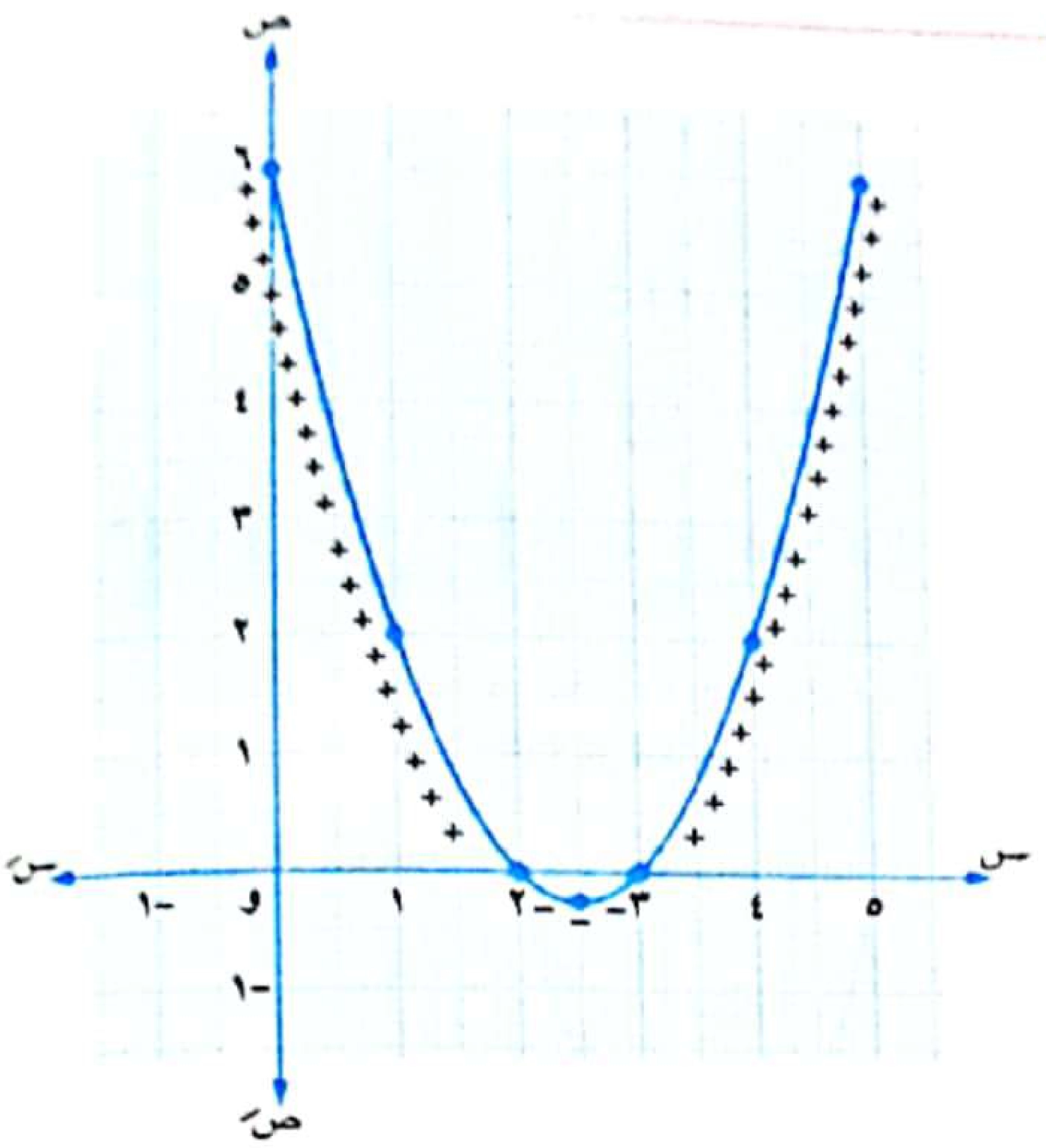


## مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ فى الفترة [٠ ، ٥] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

### الحل

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٢,٥ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٦ | ٢ | ٠ | −٠,٢٥ | ٠ | ٢ | ٦ |



ومن الرسم نلاحظ أن إشارة د تكون :

- موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈ ]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

### ملاحظة

إذا طُلب بحث إشارة الدالة فى الفترة المعطاة فإن إشارة د تكون :

- موجبة عندما س ∈ [٠ ، ٢[ ∪ ]٣ ، ٥] أ، [٠ ، ٥] − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈ ]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

### تذكر أن :

فى المثال السابق :

- مجال الدالة د هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح
- مدى الدالة د هو [−٠,٢٥ ، ∞[
- نقطة رأس المنحنى هى (٢,٥ ، −٠,٢٥) وتكون للدالة عندها قيمة صغرى وهى −٠,٢٥ .
- معادلة محور تماثل المنحنى هى : س = ٢,٥

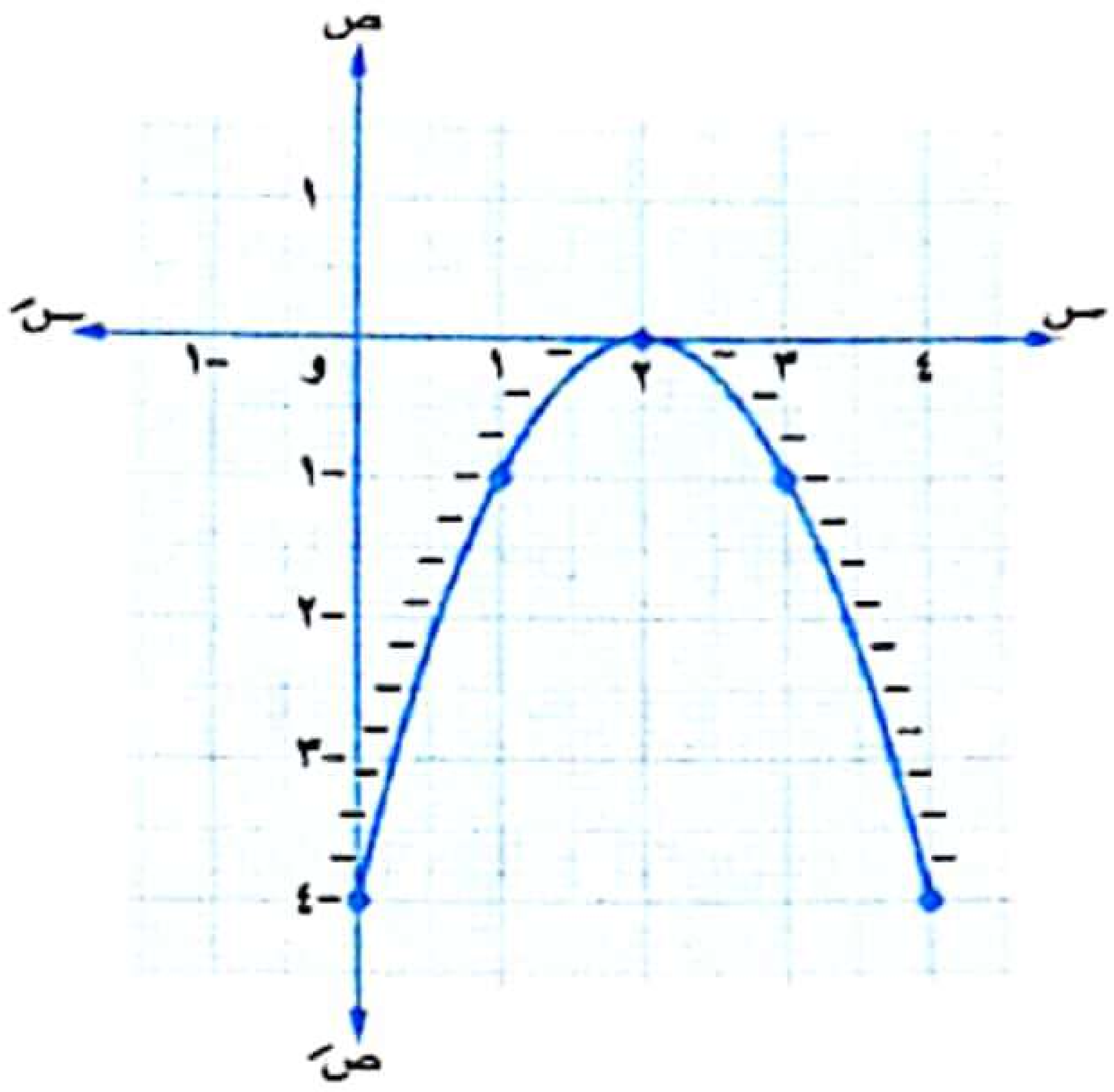
## مثال ٣

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س$^{٢}$ + ٤ س − ٤ فى الفترة [٠ ، ٤] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

### الحل

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | −٤ | −١ | ٠ | −١ | −٤ |

ومن الرسم نلاحظ أن :



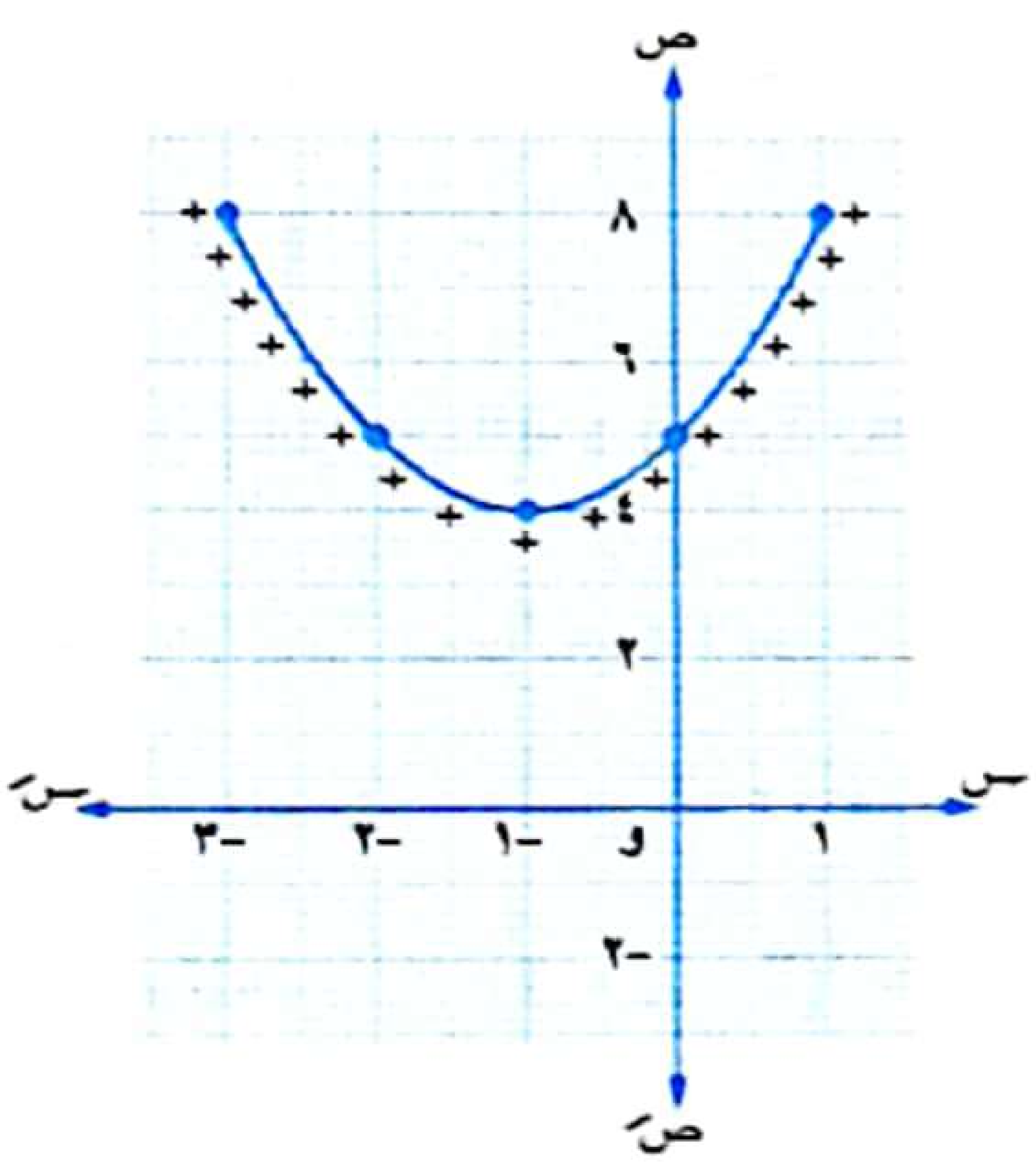

- د (س) = ٠ عندما س = ٢
- إشارة الدالة د سالبة عندما س ∈ ح - {٢}

**مثال ٤**

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س + ٥ في الفترة [-٣ ، ١] ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د في ح

**الحل**

| س | -٣ | -٢ | -١ | ٠ | ١ |
|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٨ | ٥ | ٤ | ٥ | ٨ |




ومن الرسم نلاحظ أن :

إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

**حاول بنفسك**

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ - ٢ س - ٣ في الفترة [-٢ ، ٤]

ومن الرسم عيّن إشارة الدالة د في ح

**مثال ٥**

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

١ د : د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س - ٣

٢ د : د (س) = س$^{٢}$ - ٣ س + ٥

٣ د : د (س) = ٤ س$^{٢}$ - ١٢ س + ٩

٤ د : د (س) = ٩ + ٢ س - س$^{٢}$

**الحـل**

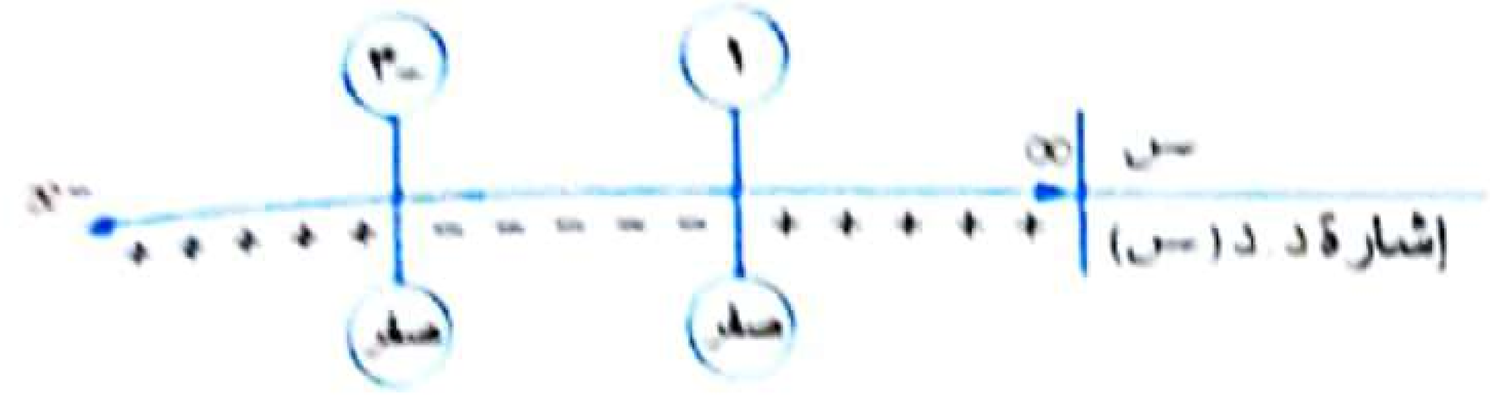
**١** ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × (−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦ ( > صفر )

∴ المعادلة : س$^{٢}$ + ٢ س − ٣ = ٠ لها جذران.

وبالتحليل ∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠ ∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ (معامل س$^{٢}$) = ١ > ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**




- موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ١]
- سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ١[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

**٢** ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ٥ = ٩ − ٢٠ = −١١ ( < صفر )

∴ المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية




، ∵ أ = ١ > ٠

∴ **إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح**

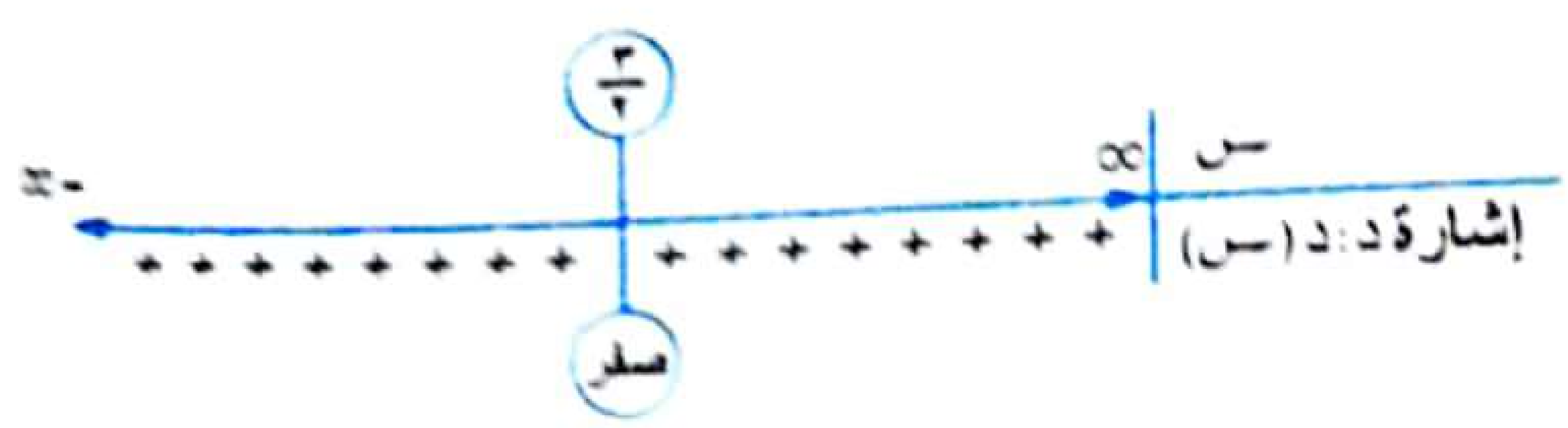
**٣** ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ١٤٤ − ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ − ١٤٤ = ٠

∴ المعادلة : ٤ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل ∴ (٢ س − ٣)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

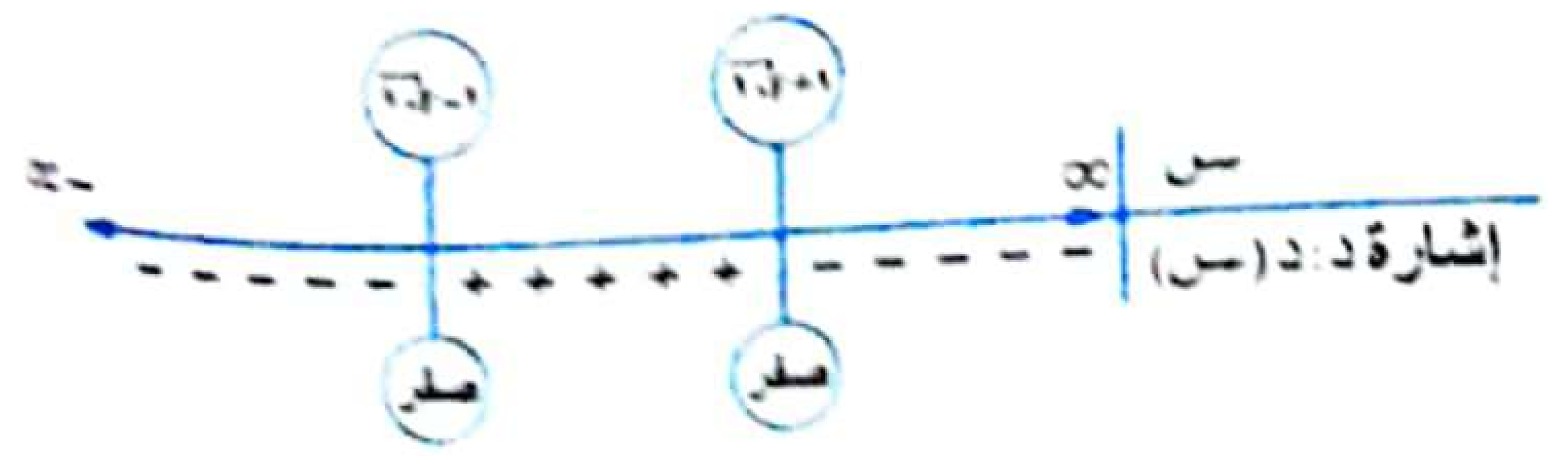



- موجبة عندما س ∈ ح − {$\frac{٣}{٢}$}
- د (س) = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

**٤** ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × (−١) × ٩ = ٤٠ ( > صفر )

∴ المعادلة : ٩ + ٢ س − س$^{٢}$ = ٠ لها جذران وباستخدام القانون العام :

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤٠}}{-٢}$ = $\frac{-٢ \pm ٢\sqrt{١٠}}{-٢}$ = ١ ± $\sqrt{١٠}$




، ∵ أ (معامل س$^{٢}$) = −١ < ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

• سالبة عندما س ∈ ح - [١ - √١٠ ، ١ + √١٠]
• موجبة عندما س ∈ ]١ - √١٠ ، ١ + √١٠[
• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ - √١٠ ، ١ + √١٠}

**حاول بنفسك**

عيّن إشارة كل من الدوال الآتية :

١ د : د (س) = س$^{٢}$ - س - ٦
٢ د : د (س) = - س$^{٢}$ - ٤ س - ٤
٣ د : د (س) = س$^{٢}$ - ٤ س + ٥

**مثال ٦**

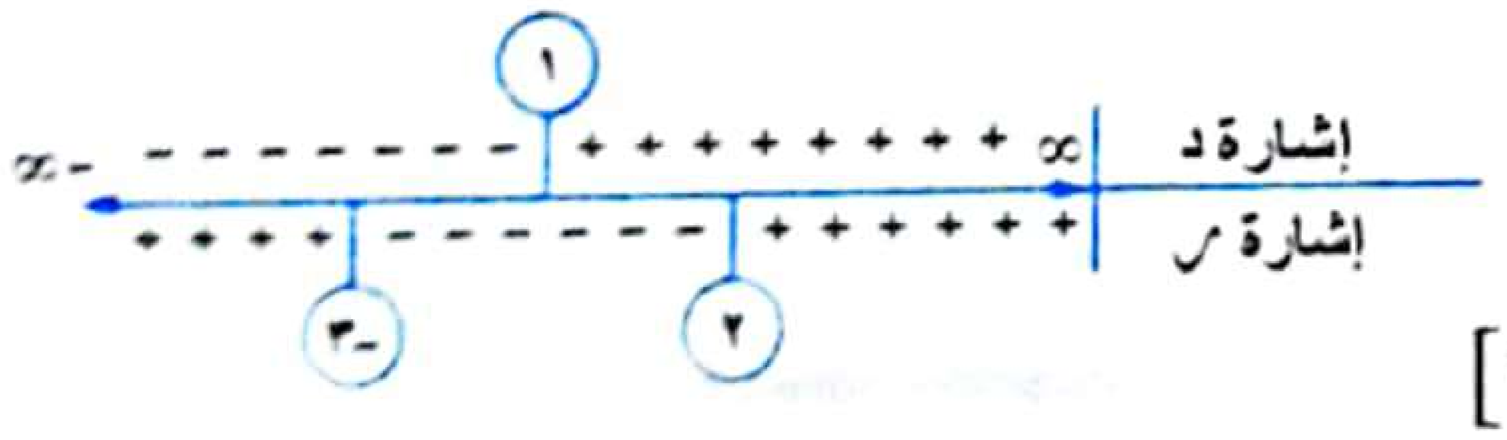
**إذا كانت د : د (س) = س - ١ ، ر : ر (س) = س$^{٢}$ + س - ٦**

**فأوجد الفترة التى تكون فيها د ، ر موجبتين معًا ، وكذلك الفترة التى تكون فيها د ، ر سالبتين معًا.**

**الحل**

∵ د (س) = س - ١ ∴ د (س) = صفر عندما س = ١
، د تكون موجبة عندما س > ١ أى فى الفترة ]١ ، ∞[
، د تكون سالبة عندما س < ١ أى فى الفترة ]- ∞ ، ١[
، ∵ ر (س) = س$^{٢}$ + س - ٦ نوجد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ + س - ٦ = ٠ كما يلى :
(س - ٢) (س + ٣) = ٠ ∴ س = ٢ أ، س = -٣ ∴ ر (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، -٣}
، ر تكون موجبة عندما س ∈ ح - [-٣ ، ٢] ، ر تكون سالبة عندما س ∈ ]-٣ ، ٢[

**بملاحظة الشكل المقابل نجد أن :**




• د ، ر موجبتان معًا فى الفترة ]٢ ، ∞[
وهى الفترة التى تعبر عن : ]١ ، ∞[ ∩ ح - [-٣ ، ٢]
• د ، ر سالبتان معًا فى الفترة ]-٣ ، ١[ وهى الفترة التى تعبر عن : ]- ∞ ، ١[ ∩ ]-٣ ، ٢[

**حاول بنفسك**

عيّن إشارة كل من الدالتين د$_{١}$ : د$_{١}$ (س) = ٢ - س ، د$_{٢}$ : د$_{٢}$ (س) = س$^{٢}$ - ٩ س + ١٨

ومتى تكون إشارتاهما سالبتين معًا ؟

**مثال ٧**

**أثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح يكون جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ٢ ك س + ك - ٢ = ٠ حقيقين مختلفين.**

∵ سـ$^{٢}$ + ٢ ك سـ + ك − ٢ = ٠ ∴ أ = ١ ، ب = ٢ ك ، حـ = ك − ٢

∴ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = (٢ ك)$^{٢}$ − ٤ (ك − ٢) = ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٨

**ويكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا**

ولذلك سنبحث إشارة الدالة د : د (ك) = ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٨ كما يلى :

∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = (−٤)$^{٢}$ − ٤ × ٤ × ٨ = ١٦ − ١٢٨ = − ١١٢ ( < صفر )

∴ المعادلة : ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٨ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ > ٠ ∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ع

وبالتالى فإن مميز المعادلة : سـ$^{٢}$ + ٢ ك سـ + ك − ٢ = ٠ موجب لجميع قيم سـ ∈ ع

∴ جذرا المعادلة : سـ$^{٢}$ + ٢ ك سـ + ك − ٢ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل سـ ∈ ع

## حل اخر :

∵ مميز المعادلة : سـ$^{٢}$ + ٢ ك سـ + ك − ٢ = ٠ هو : ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٨

، ∵ ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٨ = ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ١ + ٧

= (٢ ك − ١)$^{٢}$ + ٧ وهو مقدار موجب لكل ك ∈ ع

∴ جذرا المعادلة : سـ$^{٢}$ + ٢ ك سـ + ك − ٢ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل سـ ∈ ع

## استخدام التكنولوچيا

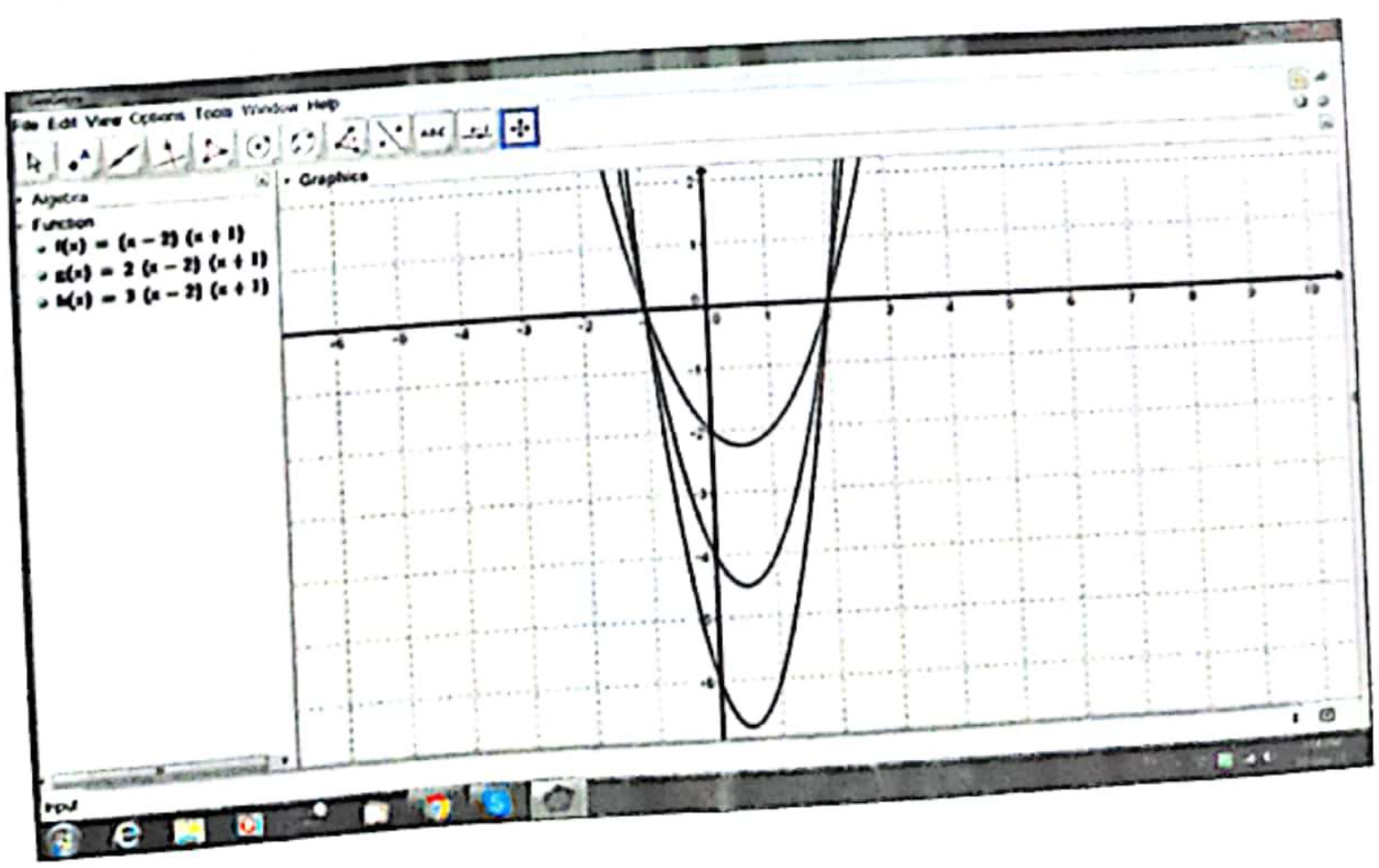
**باستخدام برنامج GeoGebra ارسم فى شكل واحد الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :**

١ د (سـ) = (سـ − ٢) (سـ + ١)

٢ ر (سـ) = ٢ (سـ − ٢) (سـ + ١)

٣ ك (سـ) = ٣ (سـ − ٢) (سـ + ١)

سوف تحصل على الشكل التالى :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأعلى ويقطع كل منها محور السينات فى النقطتين (٢ ، ٠) ، (-١ ، ٠) وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هى {٢ ، -١}

- حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

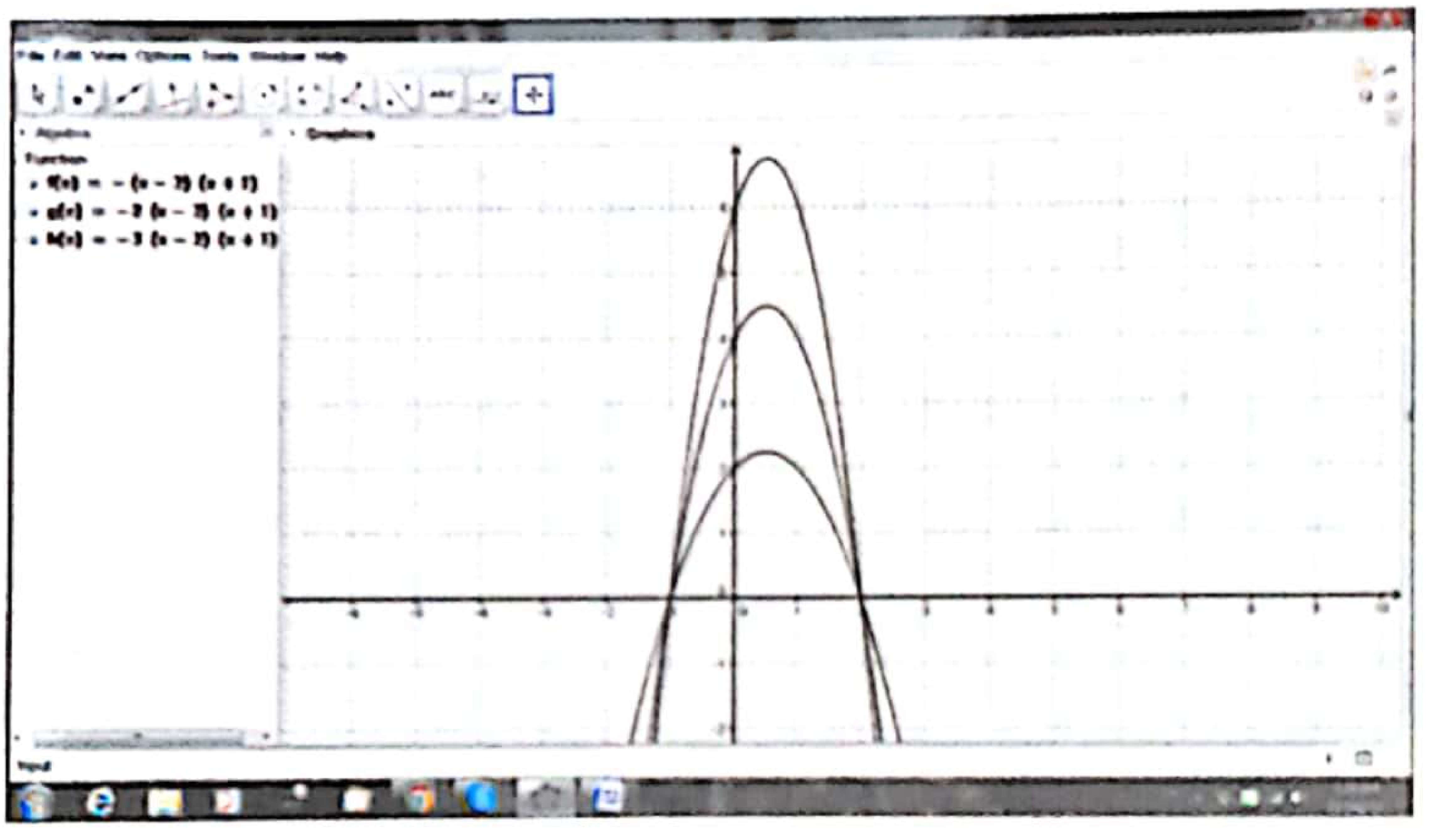
**أيضًا باستخدام نفس البرنامج ارسم فى شكل واحد الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :**

١ د (س) = - (س - ٢) (س + ١)

٢ ر (س) = -٢ (س - ٢) (س + ١)

٣ ك (س) = -٣ (س - ٢) (س + ١)

سوف تحصل على الشكل التالى :



نلاحظ من الرسم أن منحنيات الدوال الثلاثة مفتوحة لأسفل ويقطع كل منها محور السينات فى نفس النقطتين السابقتين (٢ ، ٠) ، (-١ ، ٠) وتكون مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الثلاثة المرتبطة بكل دالة هى نفس مجموعة الحل السابقة {٢ ، -١}

- حاول بنفسك بحث إشارة كل دالة مما سبق.

**استنتاج :**

- إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية فإنه يمكن كتابة قاعدة الدالة المرتبطة بالمعادلة التربيعية على الصورة :

د (س) = أ (س - ل) (س - م) حيث أ ∈ ح - {٠}

- ويكون : • المنحنى مفتوحًا لأعلى إذا كانت : أ > ٠
  - المنحنى مفتوحًا لأسفل إذا كانت : أ < ٠

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** ابحث إشارة كل من الدوال التى تتعين بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = −١

(٢) 📖 د (س) = ٢

(٣) 📖 د (س) = ٢ س

(٤) 📖 د (س) = −٣ س

(٥) د (س) = ٥ س − ٧

(٦) د (س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

**٢** عيِّن إشارة كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) 📖 د (س) = (س − ٢) (س + ٣)

(٢) 📖 د (س) = (٢ س − ٣)$^{٢}$

(٣) د (س) = ٢ س$^{٢}$ + ٥ س − ٧

(٤) د (س) = س$^{٢}$ − ٤ س + ٣

(٥) 📖 د (س) = س$^{٢}$ − ٨ س + ١٦

(٦) د (س) = ٢ س$^{٢}$ − ٣ س + ٥

(٧) د (س) = ٤ س − ٧ − س$^{٢}$

(٨) د (س) = ٩ − ٤ س$^{٢}$

(٩) 📖 د (س) = ٢ س$^{٢}$

**٣** ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ٢ س$^{٢}$ − ٨ فى الفترة [−٢ ، ٢] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى ح

**٤** ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ٢ س$^{٢}$ − ٣ س + ٤ فى الفترة [−١ ، ٢$\frac{١}{٢}$]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى ح

**٥** ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س$^{٢}$ + ٨ س − ١٥ متخذًا الفترة [١ ، ٧]

ومن الرسم بيِّن إشارة الدالة د فى ح وكذلك مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ . «{٣ ، ٥}»

**٦** 📖 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ − ٩ فى الفترة [−٣ ، ٤]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

**٧** 📖 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س$^{٢}$ + ٢ س + ٤ فى الفترة [−٣ ، ٥]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

**٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الدالة د : د (س) = −٤ تكون سالبة فى الفترة ..............

(أ) ]−∞ ، ٤[ (ب) ]−٤ ، ٤[ (جـ) ]−∞ ، ∞[ (د) ]−٢ ، ٢[

(٢) الدالة د : د (س) = ٥ س − ٣ تكون موجبة عندما ..............

(أ) س > ٣/٥ (ب) س < ٣/٥ (جـ) س > ٥/٣ (د) س < −٥/٣

(٣) إذا كانت : د (س) = س + ٢ حيث س ∈ ]−٤ ، ٣[ فإن : د تكون موجبة عندما
س ∈ ..............

(أ) ]−∞ ، −٢[ (ب) ]−٢ ، ∞[ (جـ) ]−٤ ، −٢[ (د) ]−٢ ، ٣[

(٤) الدالة د : د (س) = أ لها إشارة .............. دائمًا.

(أ) موجبة (ب) سالبة (جـ) س (د) أ

(٥) إذا كانت : د (س) = ٣ س فإن : إشارة الدالة تكون سالبة فى الفترة ..............

(أ) ]−∞ ، ٣[ (ب) ]٣ ، ∞[ (جـ) ]−∞ ، ٠[ (د) ]−٣ ، ∞[

(٦) الدالة د : د (س) = س² − ٩ سالبة لكل س ∈ ..............

(أ) ح − [−٣ ، ٣] (ب) ]−٣ ، ٣[ (جـ) ]−∞ ، −٩[ (د) ]−∞ ، −٣[

(٧) الدالة د : د (س) = س² + ١ تكون موجبة لكل س ∈ ..............

(أ) ]٠ ، ∞[ (ب) ]١ ، ∞[ (جـ) ]−∞ ، ١[ (د) ح

(٨) الدالة د : د (س) = س² − ٦ س + ٩ موجبة فى الفترة ..............

(أ) ]٠ ، ∞[ (ب) ]−∞ ، ٣[ (جـ) ح − {٣} (د) ح − {٠}

(٩) الدالة د : د (س) = أس² + ب س + حـ يكون لها إشارة واحدة فى ح عندما ..............

(أ) ب² − ٤ أحـ > ٠ (ب) ب² − ٤ أحـ < ٠ (جـ) ب² − ٤ أحـ = ٠ (د) ب² − ٤ أحـ ≥ ٠

(١٠) إذا كانت الدالة د : د (س) = أس² + ب س + حـ وكانت : أ > ٠ وجذرا د (س) = ٠ هما ٢ ، −٥
فإن الدالة د تكون موجبة فى الفترة ..............

(أ) {−٥ ، ٢} (ب) ح − ]−٥ ، ٢[ (جـ) ]−٥ ، ٢[ (د) ]−∞ ، −٥[

(١١) لبحث إشارة الدالة د يكون كافيًا إذا علم أن ..............

(أ) منحنى الدالة د يوازى محور السينات فقط.

(ب) منحنى الدالة د يقع بأكمله تحت محور السينات فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(١٢) إذا كانت : د (ـس) = أ ـس + ب وكان : ـس = ل جذرًا للمعادلة د (ـس) = ٠

فإن : د (ل + ١) × د (ل − ١) ∈ ..............

(أ) ح$^{+}$ (ب) ح$^{-}$ (جـ) [−١ ، ١] (د) [−٥ ، ٥]

(١٣) أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم ـس ∈ ح ؟

(أ) د : د (ـس) = ـس$^{٢}$ + ٤ (ب) د : د (ـس) = ٣

(جـ) د : د (ـس) = (ـس − ١)$^{٢}$ + ٩ (د) كل ما سبق.

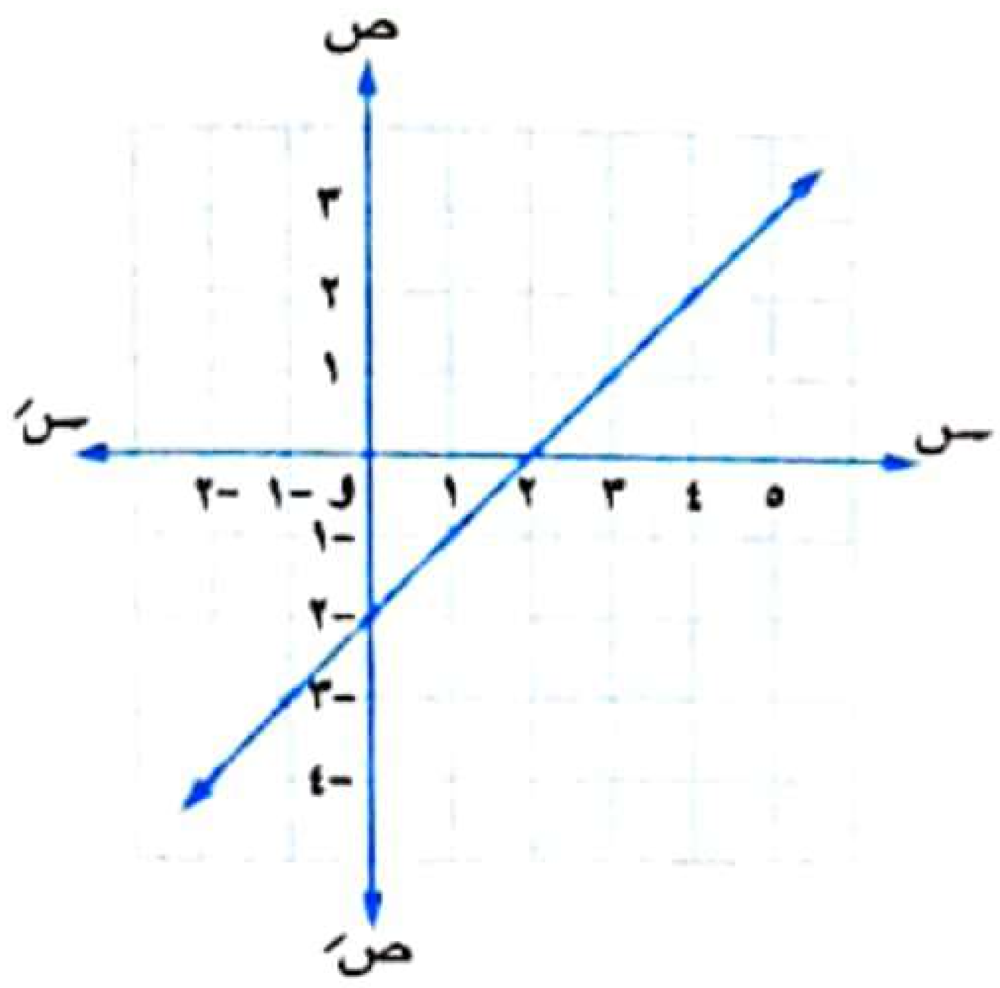
(١٤) الدالة د : د (ـس) = ١٢ + ٤ ـس − ـس$^{٢}$ تكون غير سالبة فى الفترة ..............

(أ) ]−٢ ، ٦[ (ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح − ]−٢ ، ٦[ (د) ]−∞ ، ∞[

(١٥) الدالة د حيث د (ـس) = − (ـس − ١) (ـس + ٢) موجبة فى الفترة ..............

(أ) ]١ ، ٢[ (ب) [−١ ، ٢] (جـ) ]−٢ ، ١[ (د) ]−∞ ، ∞[

(١٦) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الأولى فى ـس :




أولًا : د موجبة فى الفترة ..............

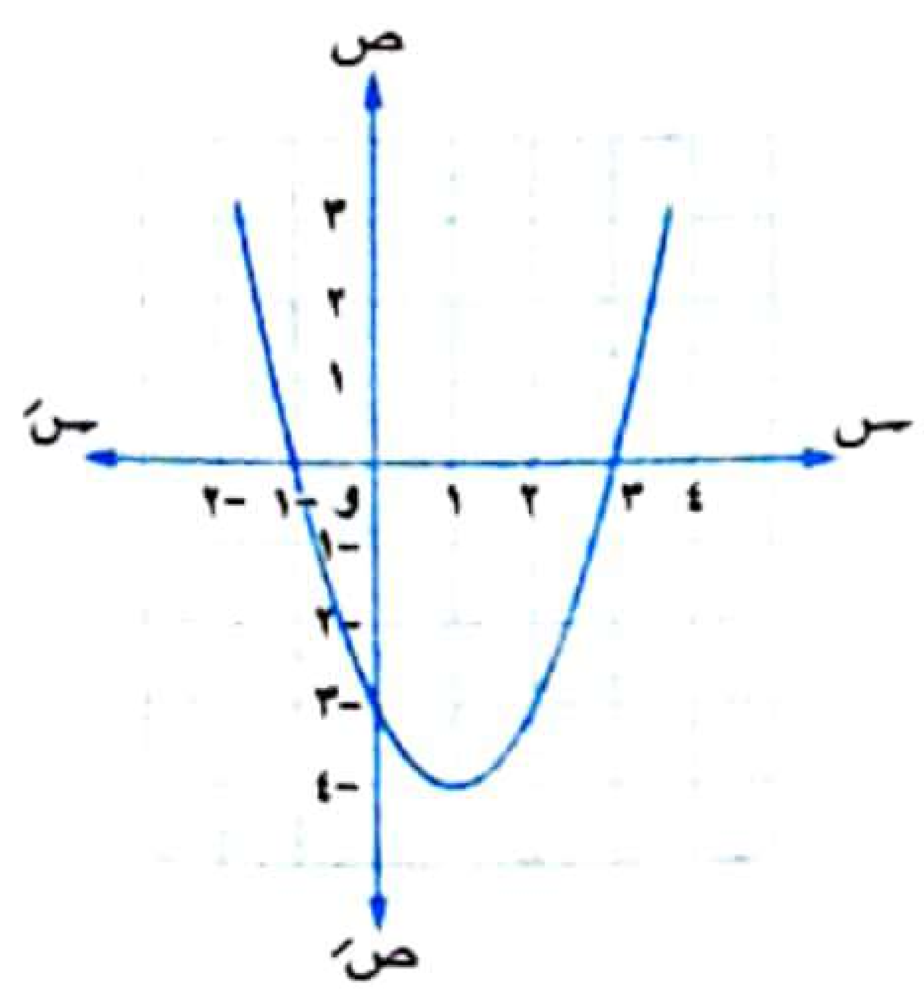
(أ) [٢ ، ∞[ (ب) ]١ ، ∞[

(جـ) ]−∞ ، ٢[ (د) ]٢ ، ∞[

ثانيًا : د سالبة فى الفترة ..............

(أ) ]−∞ ، ٢] (ب) ]−٢ ، ٢[ (جـ) ]−∞ ، ٢[ (د) ]٢ ، ∞[

(١٧) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الثانية فى ـس :




أولًا : د (ـس) = ٠ عندما ـس ∈ ..............

(أ) ح (ب) ط

(جـ) [−١ ، ٣] (د) {٣ ، −١}

ثانيًا : د (ـس) > ٠ عندما ـس ∈ ..............

(أ) ]−١ ، ٣[ (ب) [−١ ، ٣] (جـ) ح − [−١ ، ٣] (د) ح

ثالثًا : د (ـس) < ٠ عندما ـس ∈ ..............

(أ) ]−١ ، ٣[ (ب) [−١ ، ٣] (جـ) ح − [−١ ، ٣] (د) ح

**٩** ابحث إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د : [-١ ، ٦] ⟵ ح حيث د (س) = ٣ - س

(٢) د : [-٢ ، ٨] ⟵ ح حيث د (س) = س$^{٢}$ - ٥ س - ٦

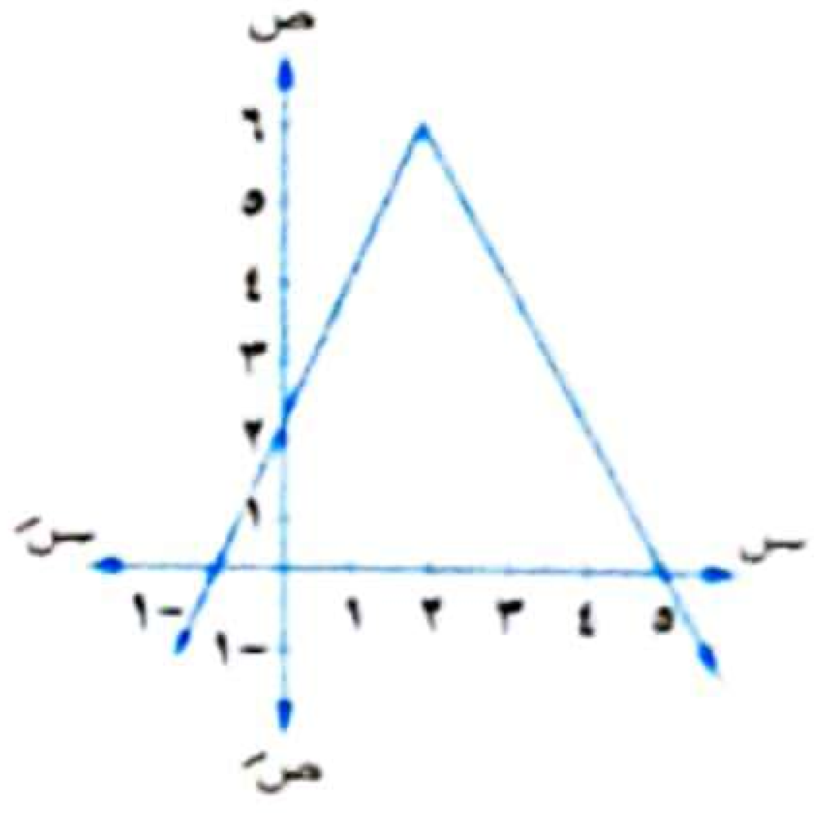
**١٠** ابحث إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

(١) د (س) = { س + ١ عندما س ≥ -١ ، - س - ١ عندما س < -١ }

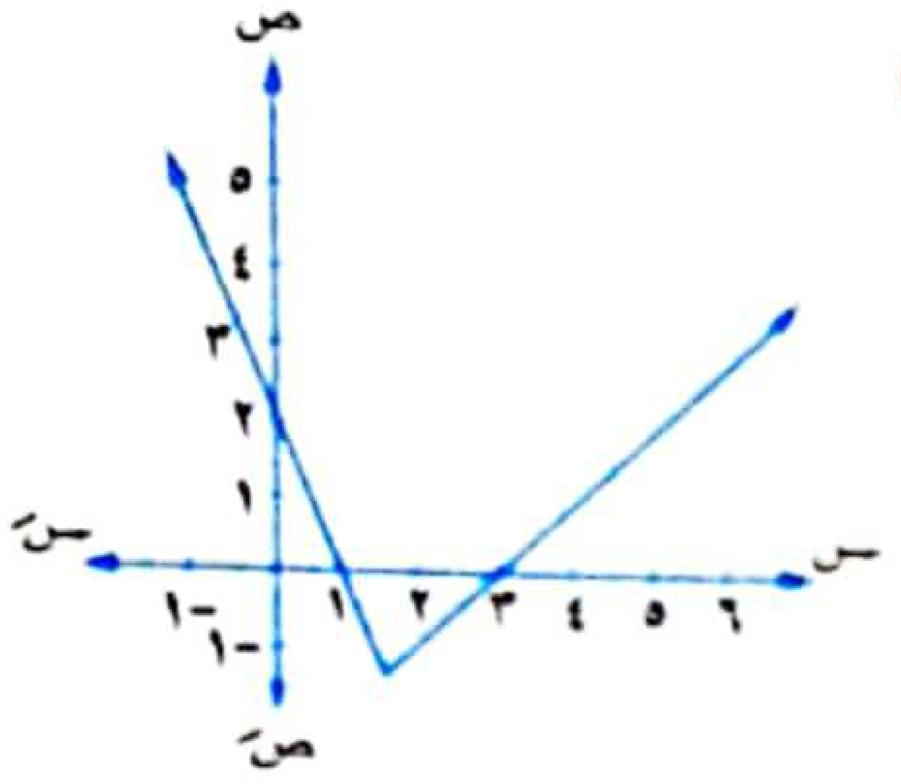
(٢) د (س) = { ٣ س + ٦ عندما س ≥ -٢ ، -٣ س - ٦ عندما س < -٢ }

**١١** ابحث إشارة كل من الدالتين الممثلتين فى الشكلين التاليين :

(١)




(٢)




**١٢** عيِّن إشارة كل من الدالتين د : د (س) = س - ٣ ، ر : ر (س) = س$^{٢}$ - ٥ س - ٦

ومتى تكون إشارتاهما موجبتين معًا ؟

**١٣** إذا كانت : د$_{١}$ (س) = س - ٣ ، د$_{٢}$ (س) = ٥ + ٤ س - س$^{٢}$ ابحث إشارة كل من :

د$_{١}$ ، د$_{٢}$ على خط الأعداد وعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان سالبتين معًا.

**١٤** إذا كانت : د (س) = س$^{٢}$ - ٥ س + ٦ ، ر (س) = ٢ س$^{٢}$ - ٥ س - ١٨

فبيِّن متى تكون الدالتان د ، ر موجبتين معًا أو سالبتين معًا.

**١٥** أثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة :

٢ س$^{٢}$ - ك س + ك - ٣ = صفر حقيقيين مختلفين.

## اكتشف الخطأ

**١٦** إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ - $س^٢$

فعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

**إجابة يوسف**

س = -١ تجعل د (س) = ٠

د (س) موجبة فى الفترة ]-١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠

ر (س) موجبة فى الفترة ]-١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]-١ ، ∞[ ∪ ]-١ ، ١[ = ]-١، ∞[

**إجابة أميرة**

س = -١ تجعل د (س) = ٠

د (س) موجبة فى الفترة ]-١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠

ر (س) موجبة فى الفترة ]-١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]-١ ، ∞[ ∩ ]-١ ، ١[ = ]-١ ، ١[

أى الإجابتين تكون صحيحة ؟ مثل كلًا من الدالتين بيانيًا وتأكد من صحة الإجابة.

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٧** ادرس إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

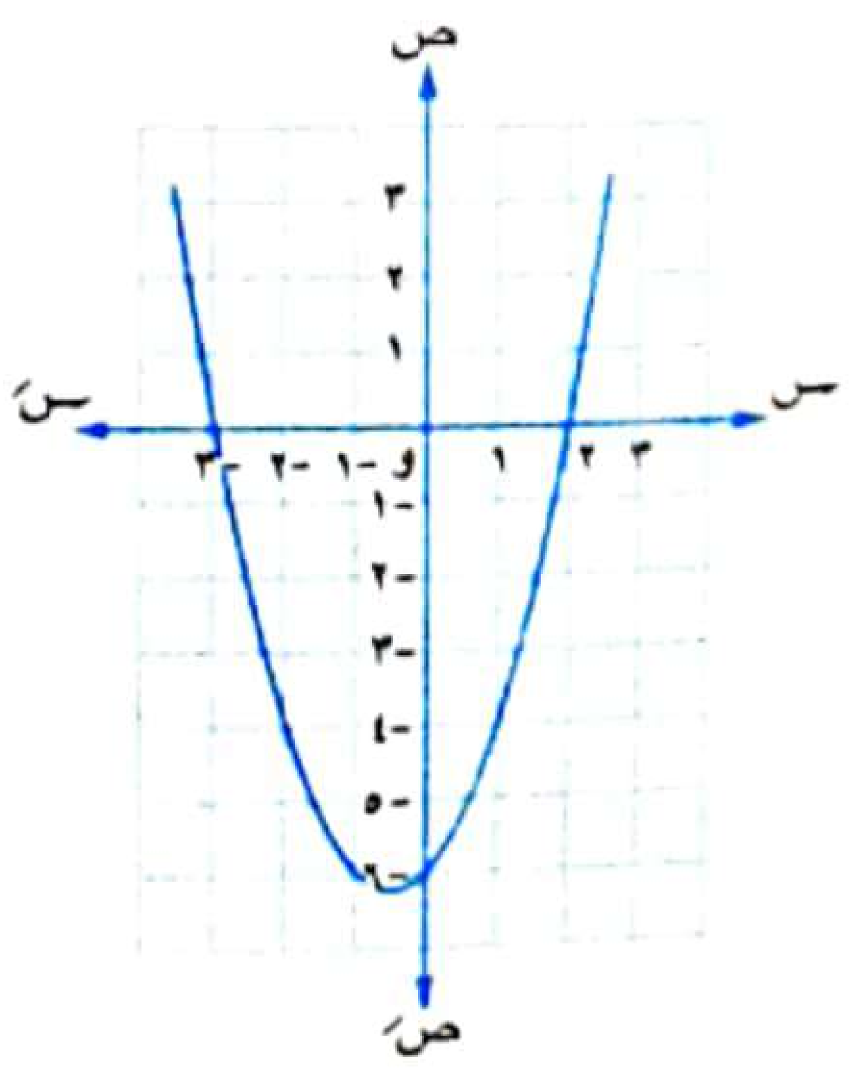
(١) د : د (س) = -٢ $س^٢$ - ٢ $\sqrt{٢}$ س - ١

(٢) د : د (س) = س + (س + ١) (٢ س + ٣) - ٤ (س + ١) + ١

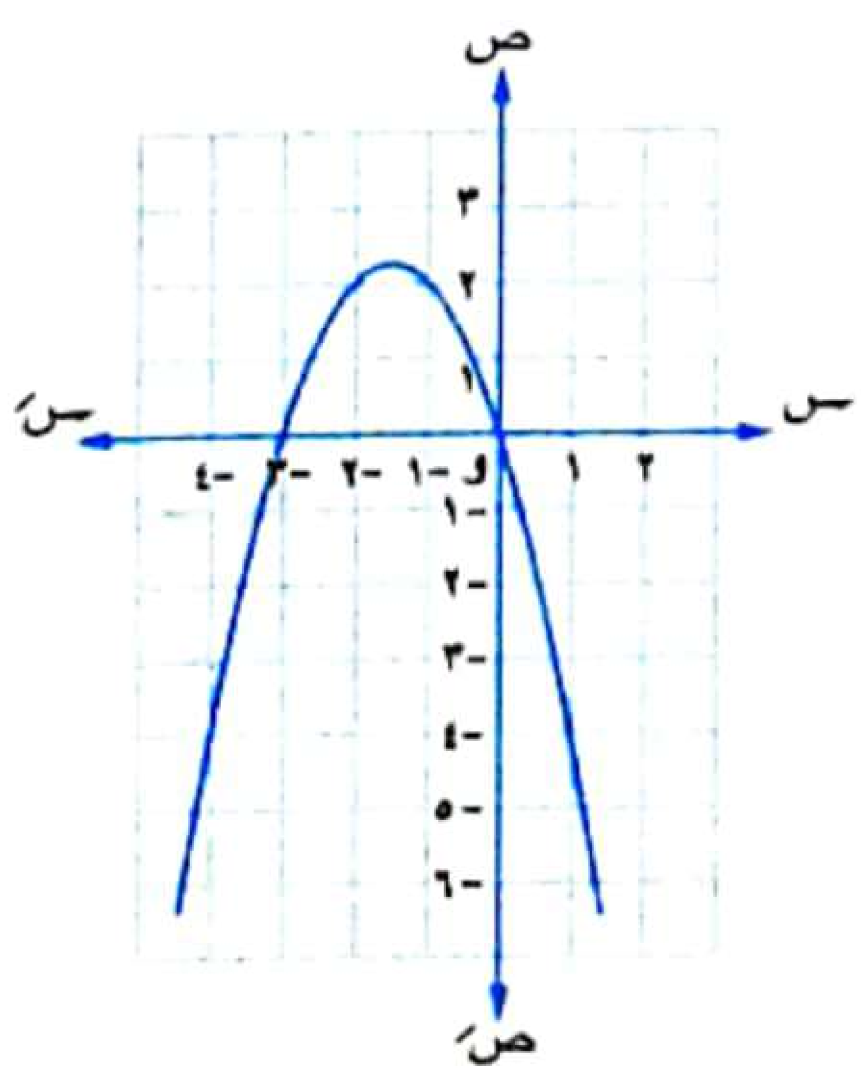
**١٨** يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

ادرس إشارة كل دالة فى ح ، ثم أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال :

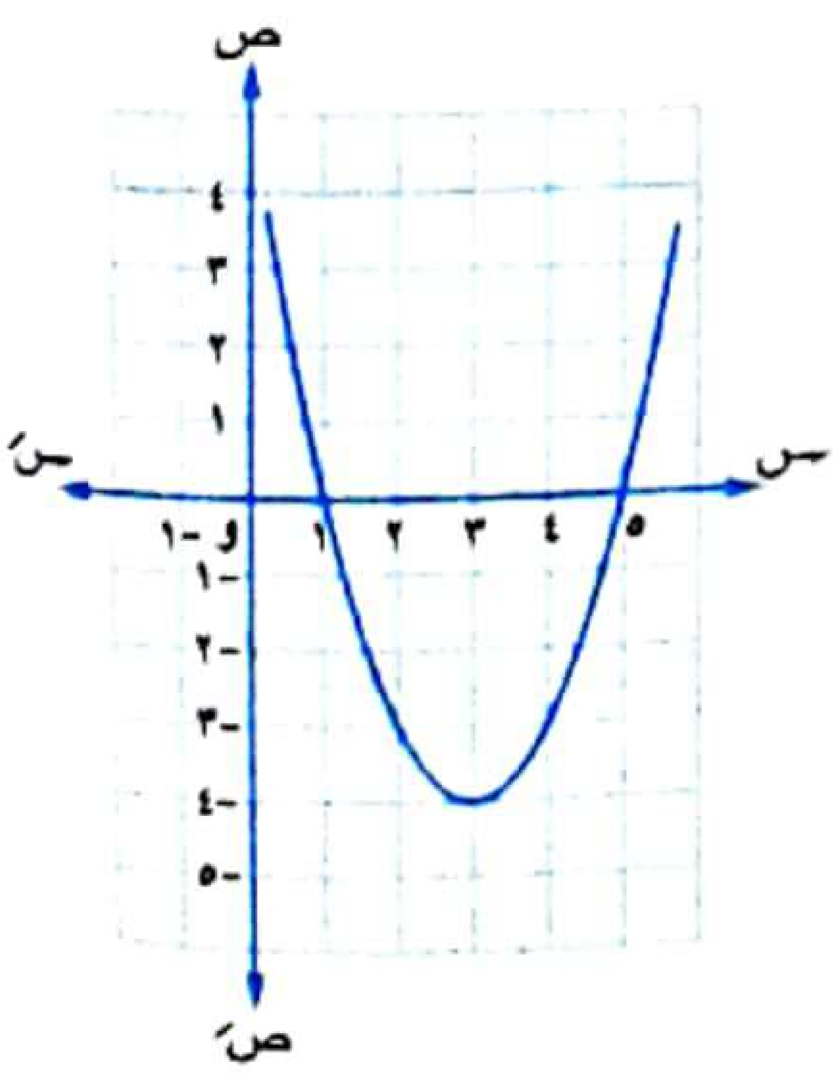
(١)



(٢)



(٣)





# الدرس 6 متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

## تمهيد ..

سبق أن درسنا فى المرحلة الإعدادية متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد مثل :

س + ٣ > ٥ ، ٤ - ٢ س ≥ ٢ ، ٧ (س - ١) ≤ ٩ س - ٦

وعلمنا أن حل المتباينة يعنى إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة وعند حل هذه المتباينات فى ح وجدنا أن مجموعة الحل تُكتب على صورة فترة

**فمثلًا** عند حل المتباينة -٢ س + ٦ > ١٠ فى ح نجد أن :

-٢ س > ٤ ومنها س < -٢ «لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب»

وتكون مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية التى كل منها أقل من -٢




**أى أن** مجموعة الحل = ]- ∞ ، -٢[

وفى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية حل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد (المتباينات التربيعية) فى ح

مثل المتباينات :

$س^٢$ - ٥ س + ٦ > ٠ ، $س^٢$ + س ≤ ٢ ، س (س - ٦) < -٥

## حل المتباينات التربيعية فى ح

**لحل المتباينة التربيعية فى ح نتبع الخطوات التالية :**

١ نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة.

٢ ندرس إشارة الدالة التربيعية التى كتبناها.

٣ نحدد الفترات التى تحقق المتباينة.

**والأمثلة التالية توضح كيفية حل المتباينة التربيعية.**

## مثال ١

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ > ٠

### الحل

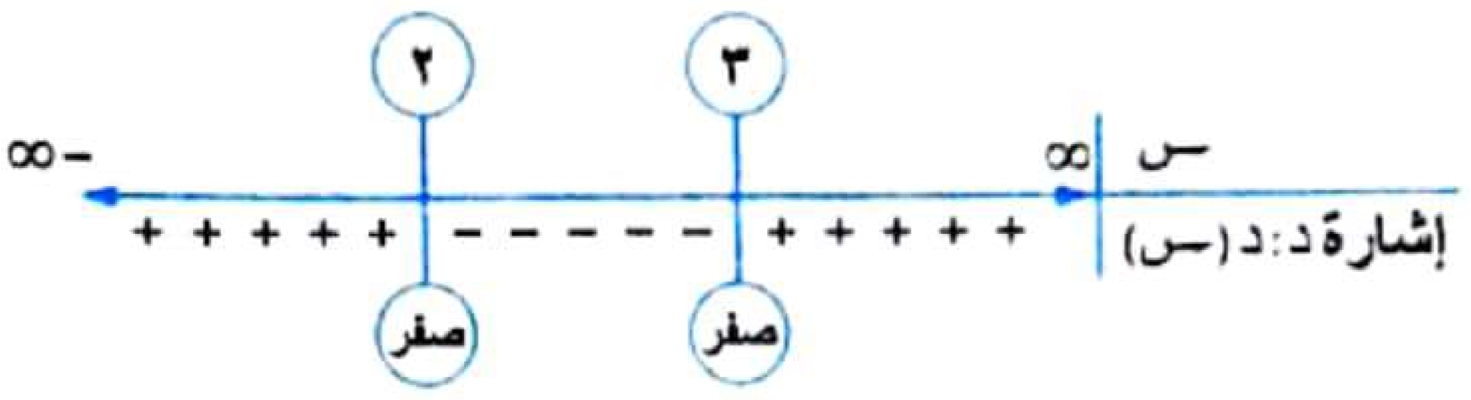
**أولا :** نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ، كما يلى : د (س) = س$^{٢}$ − ٥ س + ٦

**ثانيًا :** ندرس إشارة الدالة د كما يلى :

∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٢٥ − ٤ × ١ × ٦ = ١ (> صفر)

∴ المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠ لها جذران مختلفان

وبالتحليل : ∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠ ∴ س = ٢ أ، س = ٣




**ثالثًا :** نحدد الفترات التى تحقق أن : س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ > ٠ (موجبة) فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة = ]−∞ ، ٢[ ∪ ]٣ ، ∞[ أ، ح − [٢ ، ٣]




**لاحظ أنه**

من المثال السابق مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ < ٠ فى ح هى ]٢ ، ٣[

**حاول بنفسك**

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١ س$^{٢}$ − ٢ س − ٨ > ٠ .

٢ س$^{٢}$ − ٢ س − ٨ < ٠ .

## مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س − ١) ≤ س + ٥

### الحل

∵ (س + ٥) (س − ١) ≤ س + ٥ ∴ س$^{٢}$ + ٤ س − ٥ ≤ س + ٥

∴ س$^{٢}$ + ٣ س − ١٠ ≤ ٠ .

**أولا : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :** د (س) = $س^{٢}$ + ٣ س − ١٠

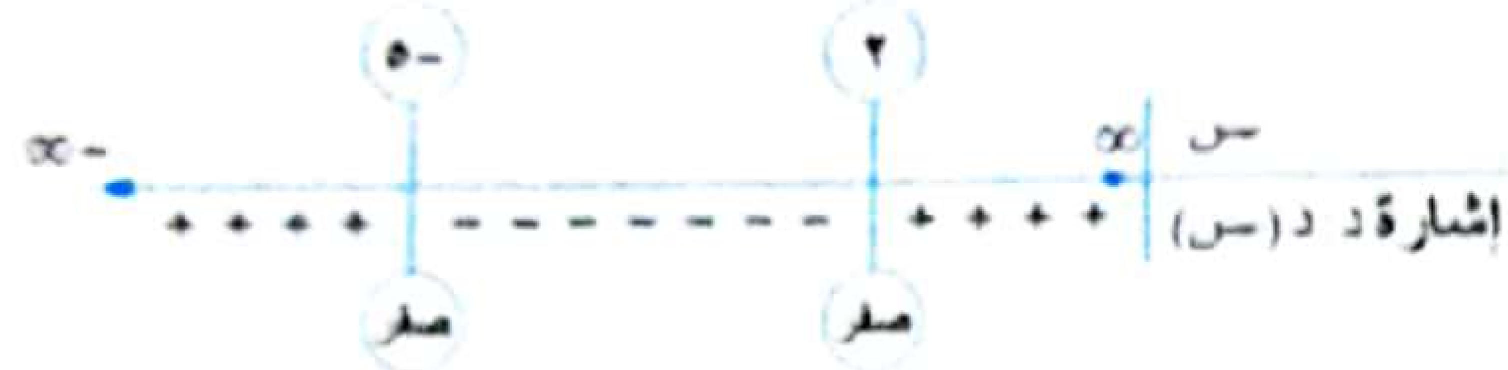
**ثانيا : ندرس إشارة الدالة د كما يلى :**

∵ المميز = $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × (−١٠) = ٤٩ (> صفر)

∴ المعادلة : $س^{٢}$ + ٣ س − ١٠ = ٠ لها جذران مختلفان وبالتحليل :

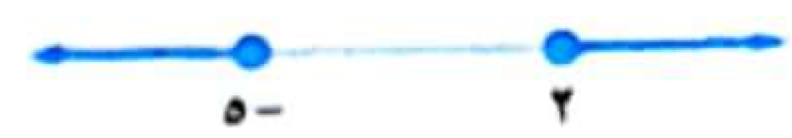
∴ (س − ٢) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٥




**ثالثا : نحدد الفترات التى تحقق أن : $س^{٢}$ + ٣ س − ١٠ ≥ ٠ فنجد أن :**

مجموعة حل المتباينة = ]−∞ ، −٥] ∪ [٢ ، ∞[ أ، ح − ]−٥ ، ٢[




**لاحظ أن**

مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س − ١) ≤ س + ٥ فى ح هى [−٥ ، ٢]

**حاول بنفسك**

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١ ٢ $س^{٢}$ + ٥ س ≥ ٣

٢ س (س + ٦) > ٤ س + ١٥

## مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ < ٠

٢ $س^{٢}$ + ٢ س + ٤ > ٠

٣ ٤ س − $س^{٢}$ − ٤ < ٠

٤ $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ ≤ ٠

### الحل

١ بوضع د (س) = $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ٥ = −١١ (< صفر)

∴ المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠ ∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ − ٣ س + ٥ < ٠ هى ∅

٢ بوضع د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س + ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × ٤ = −١٢ (< صفر)

∴ المعادلة : س$^{٢}$ + ٢ س + ٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

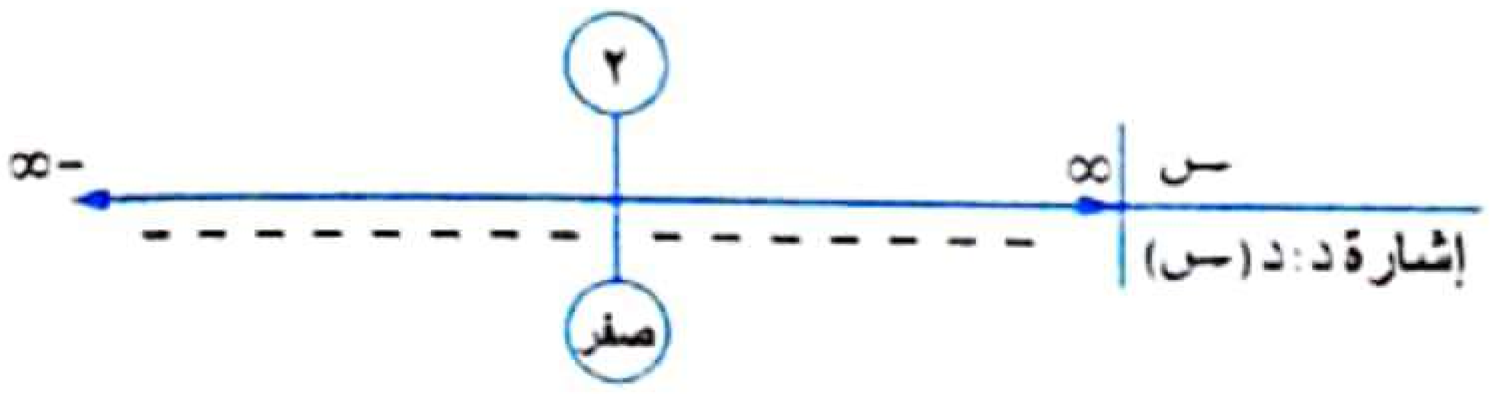
∴ مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ + ٢ س + ٤ > ٠ هى ح

٣ بوضع د (س) = ٤ س − س$^{٢}$ − ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ١٦ − ٤ × (−١) × (−٤) = ٠

∴ المعادلة : ٤ س − س$^{٢}$ − ٤ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ (س − ٢)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٢




، ∵ أ = −١ < ٠

∴ الدالة سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د (س) = ٠ عندما س = ٢

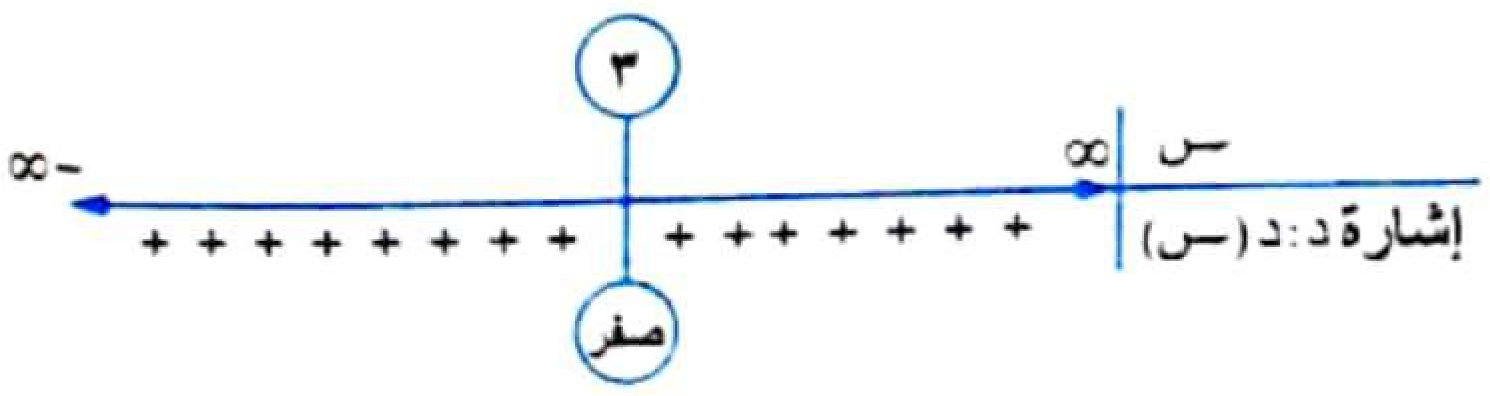
∴ مجموعة حل المتباينة : ٤ س − س$^{٢}$ − ٤ < ٠ هى ح − {٢}

٤ بوضع د (س) = س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٣٦ − ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ المعادلة : س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ (س − ٣)$^{٢}$ = ٠




∴ س = ٣ ، ∵ أ = ١ > ٠

∴ الدالة موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س = ٣

∴ مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ ≤ ٠ هى {٣}

## حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ س$^{٢}$ + س + ١٢ > ٠ .

٢ − س$^{٢}$ + س − ١ > ٠ .

٣ س$^{٢}$ − ٢ س + ١ > ٠ .

٤ ١٠ س − س$^{٢}$ − ٢٥ ≥ ٠ .

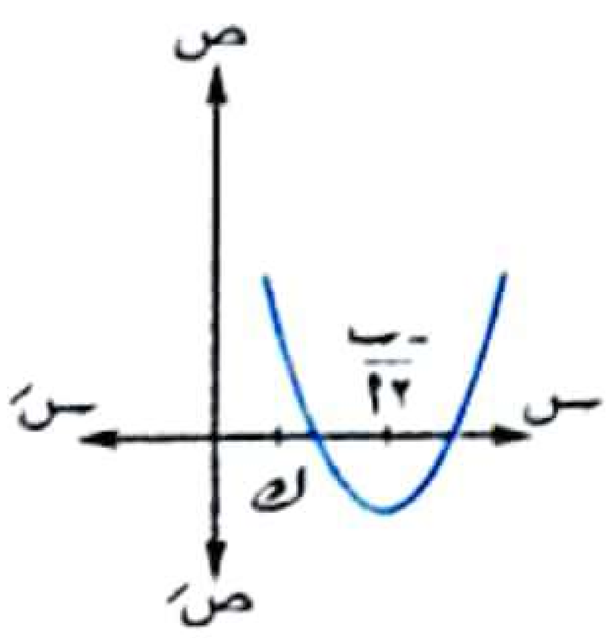
## ملاحظات

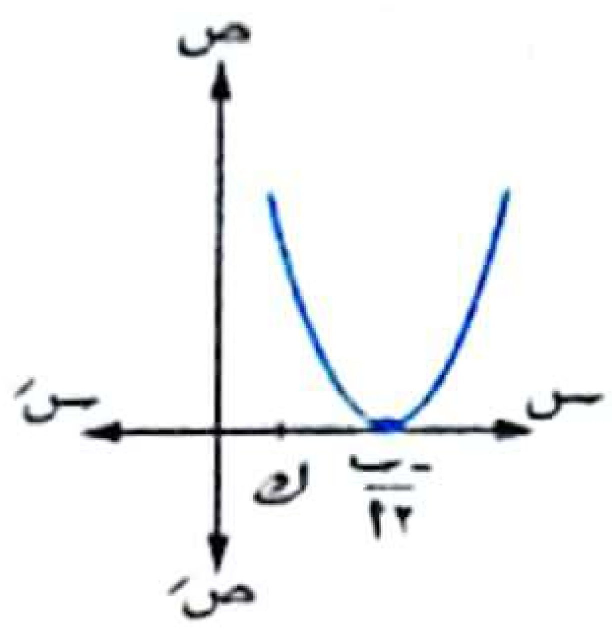
إذا كانت المعادلة التربيعية أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ .

حيث د هى الدالة التربيعية المرتبطة بها فإن :

**١ شروط أن يكون كل من جذرى المعادلة أكبر من عدد حقيقى ك هى :**

- ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ ≥ ٠ .
- أ د (ك) > ٠ .
- $\frac{-ب}{٢أ}$ > ك




## فمثلًا

إذا كان كل من جذرى المعادلة س$^{٢}$ − ٥ س + م = ٠ أكبر من ٢

فإن : • (٢٥) − ٤ × م ≥ ٠ . ∴ م ≤ ٦ $\frac{١}{٤}$

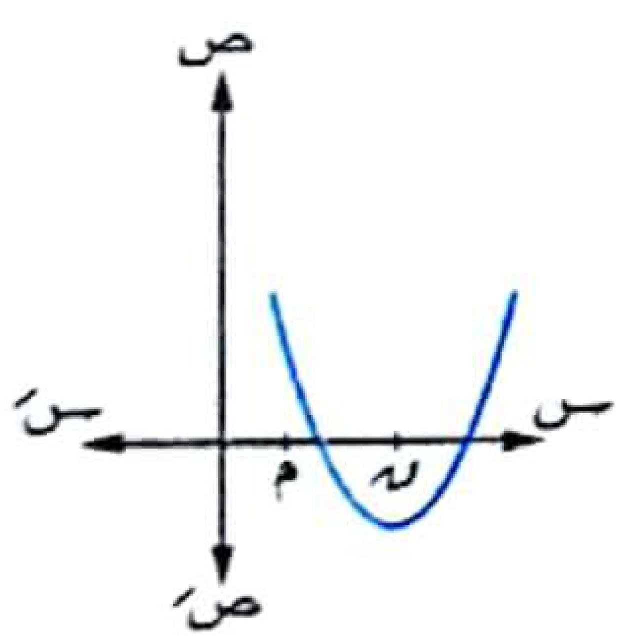
• ٤ − ٥ (٢) + م > ٠ . ∴ م > ٦

• $\frac{٥}{٢}$ > ٢ متحققة لكل قيم م

وحتى تتحقق الشروط الثلاثة فإن : ٦ < م ≤ ٦ $\frac{١}{٤}$

**٢ شرط وجود أحد الجذرين فقط بين العددين الحقيقيين م ، ن هو :**

د (م) × د (ن) < صفر




## فمثلًا

إذا كان أحد جذرى المعادلة س$^{٢}$ − ب س + ١٢ = ٠ .

ينتمى للفترة ]١ ، ٤[

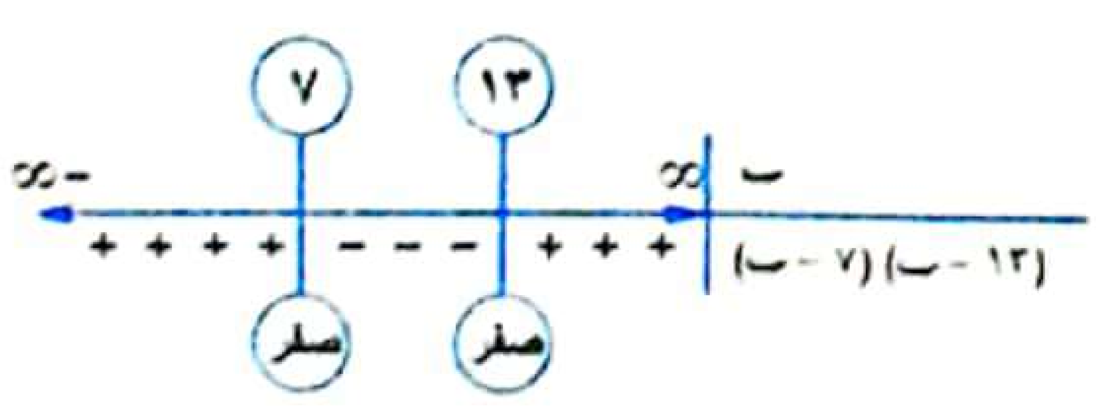
فإن : د (١) × د (٤) < ٠ .

∴ (١ − ب + ١٢) (١٦ − ٤ ب + ١٢) < ٠

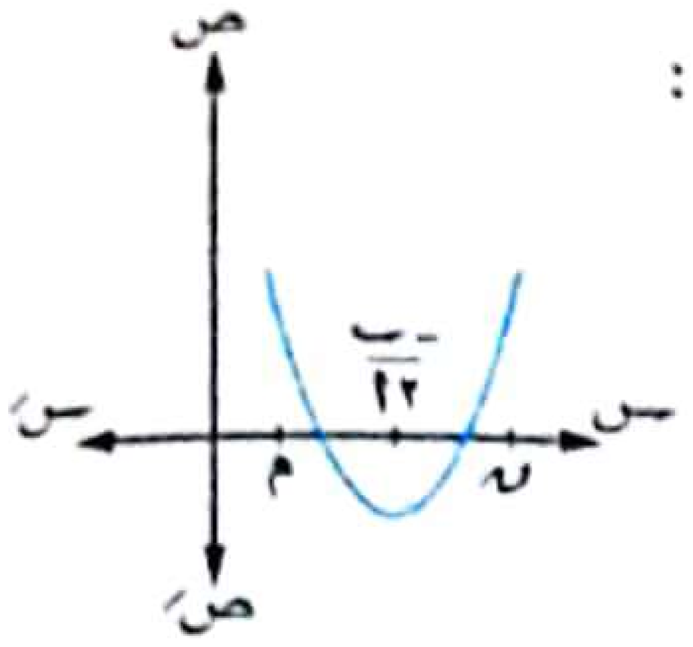
∴ (١٣ − ب) (٢٨ − ٤ ب) < ٠

∴ (١٣ − ب) (٧ − ب) < ٠

∴ ب ∈ ]٧ ، ١٣[



٣ شروط أن يكون جذرا المعادلة بين العددين الحقيقيين م ، ن حيث م < ن هي :




- $ب^{٢} - ٤ أ حـ \geq ٠$
- $أ د(م) > ٠$
- $أ د(ن) > ٠$
- $م < \frac{-ب}{٢ أ} < ن$

## فمثلاً

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية $٤ س^{٢} - ٢ س + هـ = ٠$

ينتميان للفترة ]−١ ، ١[

فإن : • $٤ - ٤ \times ٤ \times هـ \geq ٠$   $\therefore$ $هـ \leq \frac{١}{٤}$   (١)

• $٤ \times د(-١) > ٠$   $\therefore ٤ \times (٤ + ٢ + هـ) > ٠$   $\therefore هـ > -٦$   (٢)

• $٤ \times د(١) > ٠$   $\therefore ٤ \times (٤ - ٢ + هـ) > ٠$   $\therefore هـ > -٢$   (٣)

• $-١ < \frac{٢}{٤ \times ٢} < ١$ متحققة لجميع قيم هـ   (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : $\therefore -٢ < هـ \leq \frac{١}{٤}$

## تمارين 6 على متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) 📖 س$^{٢}$ + ٢ س − ٨ > ٠ .

(٢) س$^{٢}$ + ٣ س − ٤ ≥ ٠ .

(٣) س$^{٢}$ − ٥ س − ٦ < ٠ .

(٤) س$^{٢}$ − س − ٢ ≤ ٠ .

(٥) ٤ − ٣ س − س$^{٢}$ ≥ ٠ .

(٦) ٥ س − س$^{٢}$ − ٦ < ٠ .

(٧) 📖 س$^{٢}$ − ١ ≤ ٠ .

(٨) ٤ − س$^{٢}$ < ٠ .

(٩) 📖 ٧ + س$^{٢}$ − ٤ س < ٠ .

(١٠) ٢ س + س$^{٢}$ + ٥ > ٠ .

(١١) 📖 س$^{٢}$ − ٤ س + ٤ ≥ ٠ .

(١٢) ٦ س − س$^{٢}$ − ٩ < ٠ .

(١٣) س$^{٢}$ − ٨ س + ١٦ < ٠ .

(١٤) − س$^{٢}$ − ١٠ س − ٢٥ ≥ ٠ .

(١٥) 📖 ٢ س − س$^{٢}$ < ٠ .

**٢** أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) 📖 س$^{٢}$ ≤ ٩

(٢) س$^{٢}$ > ١٦

(٣) س$^{٢}$ + ٥ س < −٤

(٤) 📖 ٥ س$^{٢}$ + ١٢ س ≥ ٤٤

(٥) 📖 ٣ س$^{٢}$ ≤ ١١ س + ٤

(٦) 📖 س$^{٢}$ ≥ ٦ س − ٩

(٧) 📖 ٣ − ٢ س ≥ س$^{٢}$

(٨) ٧ س + ١٥ ≤ ٢ س$^{٢}$

(٩) 📖 س$^{٢}$ + ٥ ≤ ١

(١٠) − س$^{٢}$ − ٧ < ٢

(١١) (س − ٢)$^{٢}$ ≥ ٩

(١٢) 📖 (س − ٢)$^{٢}$ ≤ −٥

(١٣) 📖 س (س + ٢) − ٣ ≤ ٠ .

(١٤) (س + ٢)$^{٢}$ + (س + ١) (س − ٤) < ٠ .

(١٥) 📖 (س + ٣)$^{٢}$ < ١٠ − ٣ (س + ٣)

(١٦) 📖 ٥ − ٢ س ≤ س$^{٢}$

**٣** عيِّن إشارة الدالة د حيث د (س) = س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ ومن ذلك عيِّن فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) < ٠ .

**٤** ابحث إشارة الدالة د حيث د (س) = ٢ س$^{٢}$ + ٧ س − ١٥ ومن ذلك أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :

٢ س$^{٢}$ + ٧ س ≤ ١٥

**٥** عين إشارة الدالة د حيث د (س) = س$^{٢}$ + ٤ ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ صفر

---

**٦** **ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س$^{٢}$ + ٢ س + ٣ فى الفترة [−٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد فى ح :**

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠      (٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

---

**٧** **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) مجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (س − ٥) < ٠ فى ح هى ..........

(أ) {٢ ، ٥}    (ب) ]٢ ، ٥[    (جـ) [٢ ، ٥]    (د) ح − [٢ ، ٥]

(٢) مجموعة حل المتباينة : س (س − ١) > ٠ فى ح هى ..........

(أ) {٠ ، ١}    (ب) ]٠ ، ١[    (جـ) [٠ ، ١]    (د) ح − [٠ ، ١]

(٣) مجموعة حل المتباينة : − س (س + ٢) ≤ ٠ فى ح هى ..........

(أ) {٠ ، −٢}    (ب) [−٢ ، ٠]    (جـ) ]−٢ ، ٠[    (د) [−٢ ، ٢]

(٤) مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ + ٩ > ٠ فى ح هى ..........

(أ) ∅    (ب) ح    (جـ) ]−٣ ، ٣[    (د) ح − [−٣ ، ٣]

(٥) مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ + ١ ≤ ٠ فى ح هى ..........

(أ) ∅    (ب) ح    (جـ) [−١ ، ١]    (د) ح − ]−١ ، ١[

(٦) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

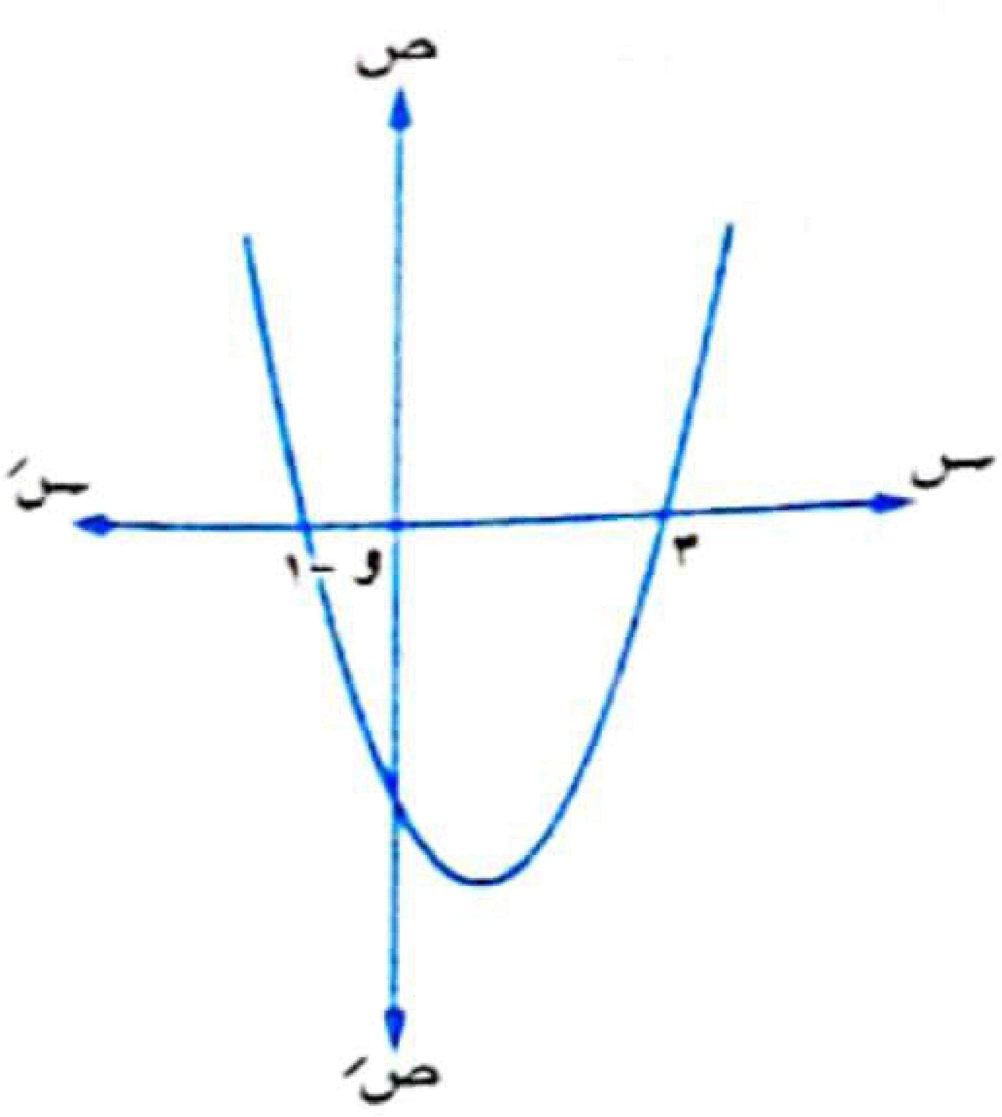
الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ − ٢ س − ٣

فإن مجموعة حل المتباينة :

س$^{٢}$ − ٢ س − ٣ ≥ ٠ فى ح هى ..........

(أ) ]−١ ، ٣[    (ب) ]−∞ ، ٢[

(جـ) ]٣ ، ∞[    (د) ]−∞ ، −١] ∪ [٣ ، ∞[



## اكتشف الخطأ

**٨** أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : (س + ١)$^{٢}$ < ٤ (٢ س − ١)$^{٢}$

**حل يوسف**

∵ (س + ١)$^{٢}$ < ٤ (٢ س − ١)$^{٢}$

∴ س + ١ < ٢ (٢ س − ١)

وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين.

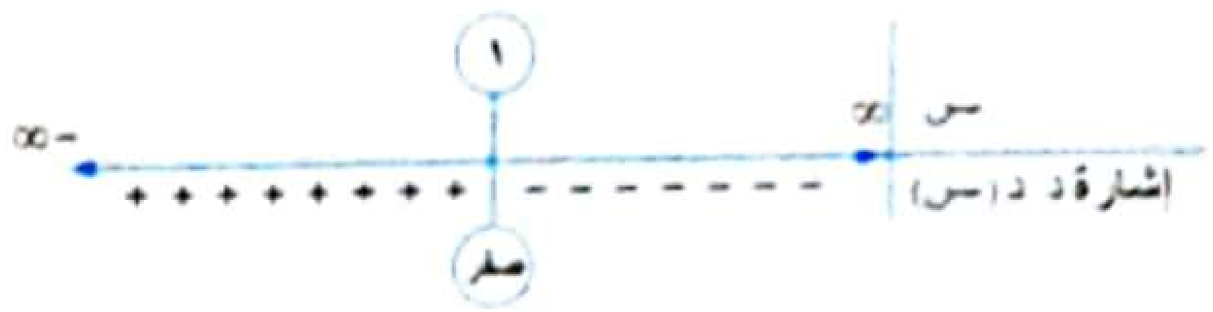
∴ −٤ س + س + ٢ + ١ < ٠

∴ −٣ س + ٣ < ٠

**المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :** −٣ س + ٣ = ٠

مجموعة الحل هى {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث د (س) = −٣ س + ٣



**نجد أن :** مجموعة حل المتباينة هى ]١ ، ∞[

**حل نور**

∵ (س + ١)$^{٢}$ < ٤ (٢ س − ١)$^{٢}$

∴ س$^{٢}$ + ٢ س + ١ < ١٦ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٤

∴ ١٥ س$^{٢}$ − ١٨ س + ٣ > ٠

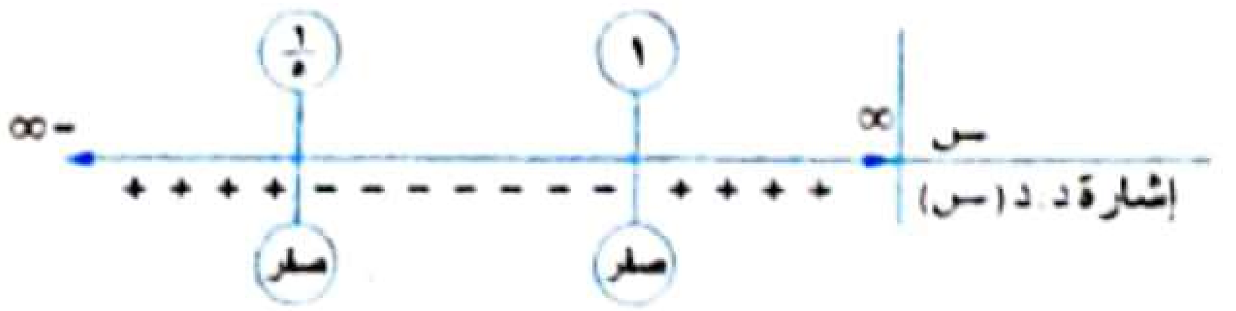
**المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :**

∴ ٣ (٥ س − ١) (س − ١) = ٠

مجموعة الحل هى {١ ، $\frac{١}{٥}$}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

د (س) = ١٥ س$^{٢}$ − ١٨ س + ٣



**نجد أن :** مجموعة حل المتباينة هى ح − [$\frac{١}{٥}$ ، ١]

أى الحلين صحيح ؟

---

**٩** أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ٢ س + ١ ≥ ٠ .

**حل باسم**

∵ المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

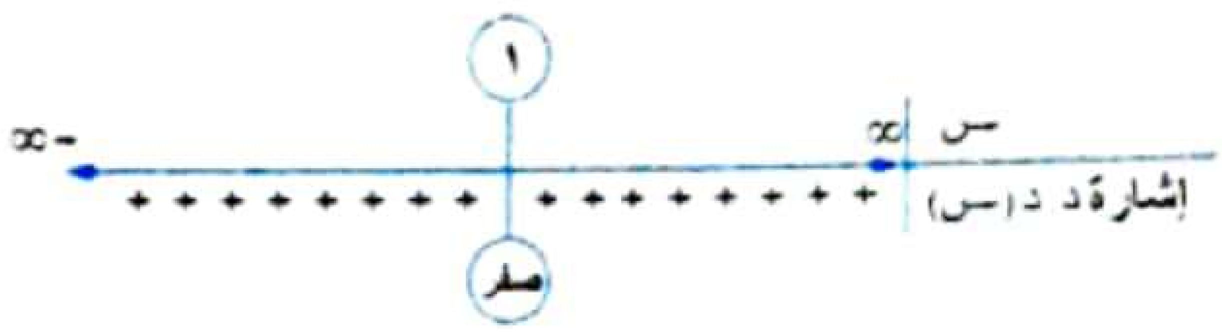
س$^{٢}$ − ٢ س + ١ = ٠

∴ (س − ١)$^{٢}$ = ٠

∴ مجموعة الحل = {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

د (س) = س$^{٢}$ − ٢ س + ١



**نجد أن :** مجموعة الحل = ح − {١}

**حل إسلام**

∵ المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

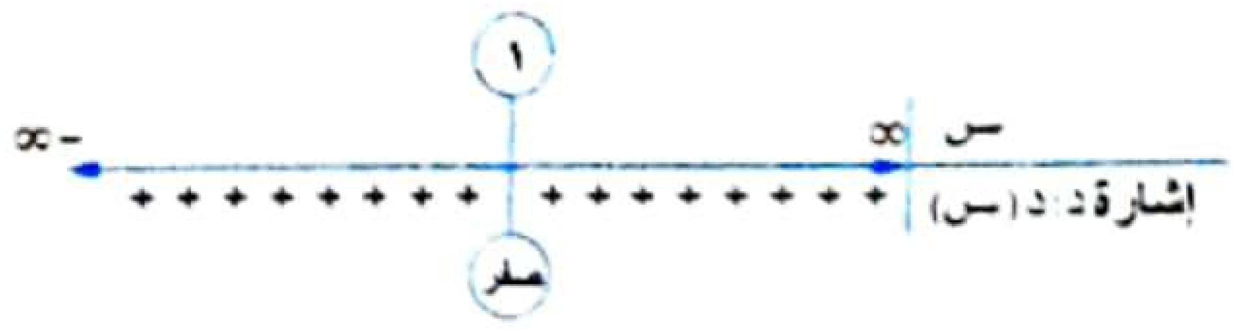
س$^{٢}$ − ٢ س + ١ = ٠

∴ (س − ١)$^{٢}$ = ٠

∴ مجموعة الحل = {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

د (س) = س$^{٢}$ − ٢ س + ١



**نجد أن :** مجموعة الحل = ح

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت : د (س) = س$^{٢}$ − ٧ س + ١٢ ، س ∈ ح فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ...............

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هى ح − [٣ ، ٤]

(جـ) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى ]٣ ، ٤[

(د) د موجبة فى الفترة ح − ]٣ ، ٤[

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (٣ س − ١) ≥ ٠ يساوى ...............

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) مجموعة حل المتباينة : (س + ٣)$^{٢}$ > ٤ (س + ١)$^{٢}$ فى ح هى ...............

(أ) ]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[ (ب) ح − ]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[ (جـ) [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١] (د) ح − [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

(٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ > ٠ ، ل > م

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ > ٠ فى ح هى ...............

(أ) ]−∞ ، ل[ (ب) ]ل ، م[ (جـ) ]م ، ∞[ (د) ح − [ل ، م]

(٥) إذا كان مميز المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ سالبًا

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ > ٠ حيث أ > ٠ فى ح هى ...............

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) ح$^{+}$ (د) ح$^{-}$

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ + (ك − ٢) س − ٥ = ٠ وكان : −١ > ل > م فإن ...............

(أ) −١ > ك > ٠ (ب) ك > ٦ (جـ) ك > −١ (د) −١ > ك > ٦

(٧) إذا كان كل من جذرى المعادلة التربيعية : س$^{٢}$ − ٢ ك س + ك$^{٢}$ + ك − ٥ = ٠ أقل من ٥

فإن : ك ∈ ...............

(أ) [٤ ، ٥] (ب) [٤ ، ∞[ (جـ) ]−∞ ، ٤[ (د) ح − [٤ ، ٥]

(٨) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س$^{٢}$ − ك س + ١ = ٠ غير حقيقيين فإن : ...............

(أ) ك ∈ ص$^{-}$ (ب) −٢ > ك > ٢ (جـ) ك > ٢ (د) ك > −٢

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ٤ ≥ س + ك هى [−٢ ، ٣] فإن : ك = ……………

(أ) −٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠

(١٠) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ١٠ < ب س هى ]−٢ ، ٥[ فإن : ب = ……………

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ب س + ٣ = ٠ ينتمى للفترة ]١ ، ٢[ فإن : ب ∈ ……………

(أ) ]١ ، ٢[ (ب) ]−∞ ، ٣[ (جـ) ]٣$\frac{١}{٢}$ ، ٤[ (د) ح − ]٣$\frac{١}{٢}$ ، ٤[

(١٢) إذا كانت م$_{١}$ هى مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − س − ٢ ≥ ٠ وكانت م$_{٢}$

هى مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ + س − ٢ ≥ ٠ فإن : م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ……………

(أ) ∅ (ب) [−٢ ، ٢] (جـ) [−١ ، ١] (د) ح − ]−١ ، ١[

(١٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + أ س + أ + ٢ = ٠ وكان ٢ ∈ ]ل ، م[

فإن : أ ∈ ……………

(أ) [١ ، ٢] (ب) ح$^{+}$ (جـ) ]$\frac{-٢}{٧}$ ، ٠[ (د) ]$\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$[

---

**١١** أوجد مجموعة حل المتباينة : ١٠ > س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ ≥ ٣ فى ح

# تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى




**١** أُطلقت قذيفة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ع تساوى ٢٤,٥ متر/ث احسب الفترة الزمنية ن بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ٢٩,٤ متر ، علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) والزمن (ن)
هى كالآتى : ف = ع ن − ٤,٩ ن$^{٢}$

«٢ أ ، ٣»

---



**٢** يبدأ غواص بالقفز من على منصة بارتفاع ١٠ أمتار فوق سطح الماء فإذا كان ارتفاع الغواص عن سطح الماء ف مترًا تعبر عنه العلاقة :
ف = −٤,٩ ن$^{٢}$ + ٣,٥ ن + ١٠ حيث ن الزمن بالثوانى.
بعد كم ثانية يصل الغواص إلى سطح الماء ؟

« $\frac{٥}{٧}$ ثانية»

---

**٣** 📖 قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار ، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار.
أوجد المقدار المضاف.

«٣ أمتار»

---



**٤** يضرب لاعب كرة جولف لتصل إلى مكان معين والعلاقة التالية تعبر عن الارتفاع الذى تصل إليه الكرة بالقدم : ص = −١٦ ن$^{٢}$ + ٨٠ ن + ٢٠
حيث ن الزمن بالثانية.

(١) بعد كم ثانية ستصل الكرة إلى سطح الأرض ؟

(٢) هل ستصل الكرة إلى ارتفاع ١٣٠ قدمًا ؟

«٥,٢٤ ثانية»

---

**٥** 📖 يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :
ع = ن$^{٢}$ + ١,٢ ن + ٩١ حيث (ع) عدد السكان بالمليون ، (ن) عدد السنوات.

(١) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟ (٢) قدر عدد السكان عام ٢٠٣٣

(٣) قدر عدد السنوات التى يبلغ عدد السكان فيها ٢٠٣ ملايين.

«٩١ مليونًا ، ١٥٥ مليونًا ، ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٢٣»

٦ أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى (٤ - ٢ ت) أمبير وفى المقاومة الثانية $\frac{٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ أمبير

(علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين) «(٧ - ٢ ت) أمبير»

---

٧ إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى (٦ + ٤ ت) أمبير ، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤ - ت}$ أمبير ، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى. «(٢ + ٣ ت) أمبير»

---

٨ فى الفترة من عام ١٩٩٠م إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية يتحدد بالدالة د : د (ن) = ١٢ $ن^٢$ - ٩٦ ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات ، د (ن) إنتاج الذهب.

(١) ابحث إشارة دالة الإنتاج د

(٢) أوجد إنتاج منجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠ ، ٢٠٠٥

(٣) فى أى عام كان إنتاج المنجم مساويًا ٢٠١٦ ألف أوقية ؟ «٤٨٠ ألف أوقية ، ١٧٤٠ ألف أوقية ، ٢٠٠٦»

# الوحدة 2

# حساب المثلثات



## فى نهاية الوحدة

- **تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية.**

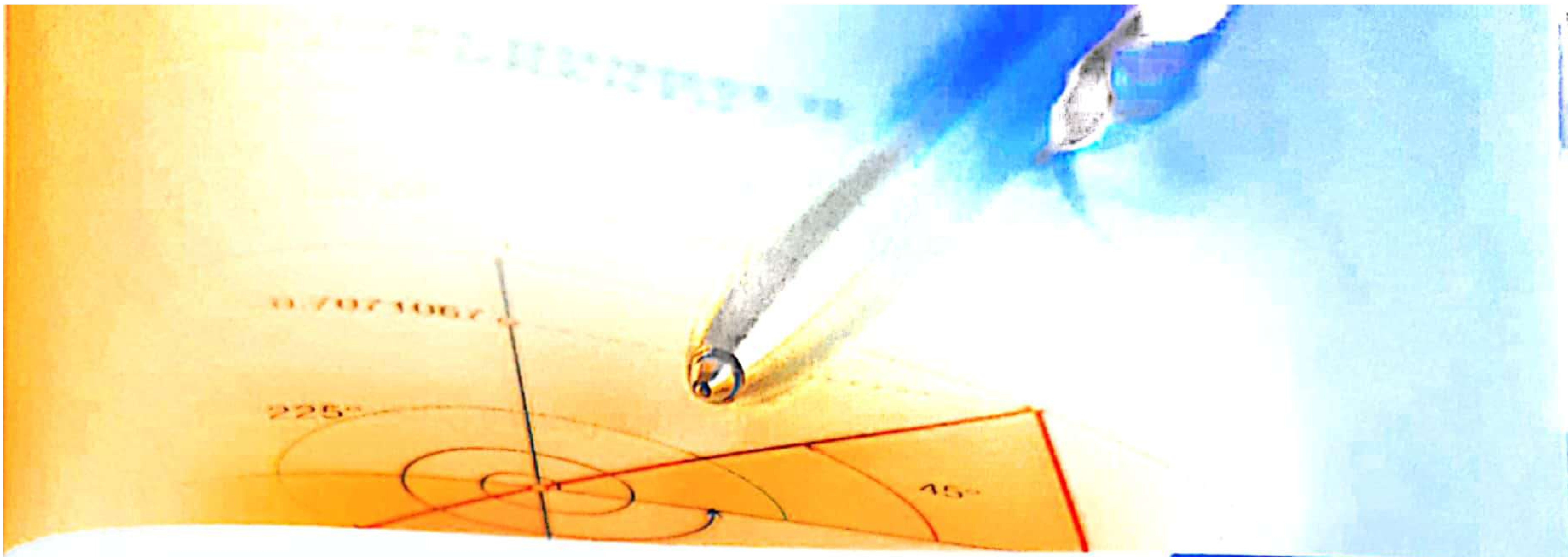
# دروس الوحدة



## نواتج التعلُم

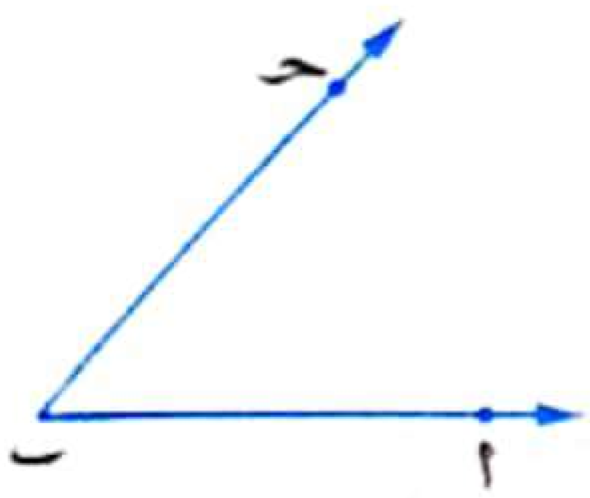
فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف مفهوم الزوايا المتكافئة.
- يحدد الربع الذى تقع فيه زاوية فى وضعها القياسى.
- يتعرف القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة.
- يحوِّل من القياس الستينى للزاوية إلى القياس الدائرى لها والعكس.
- يتعرف إشارات الدوال المثلثية فى كل ربع.
- يوجد الدوال المثلثية لبعض الزوايا المنتسبة لزاوية خاصة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد النسب المثلثية.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الستينى للدائرى والعكس.
- يرسم الدوال المثلثية (دالة الجيب - دالة جيب التمام).
- يستخدم الحاسب الآلى فى تمثيل الدوال المثلثية.
- يحل بعض التطبيقات الحياتية باستخدام الدوال المثلثية.
- يوجد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.




الدرس **1**

# الزاوية الموجهة




- سبق أن تعلمنا أن الزاوية هى اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة.

**ففى الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة ب

فإن : $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cup \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ∠ أ ب حـ ويُسمى الشعاعان $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ضلعى الزاوية

، والنقطة ب رأس الزاوية.

- كما علمنا أن ترتيب ضلعى الزاوية غير هام.

فيمكن أن نكتب : ∠ أ ب حـ أو ∠ حـ ب أ لتعبر عن نفس الزاوية.

- وفى هذا الدرس سوف نتناول مفهومًا جديدًا وهو مفهوم «الزاوية الموجهة» وبعض الموضوعات الأخرى المتعلقة بها.

## الزاوية الموجهة

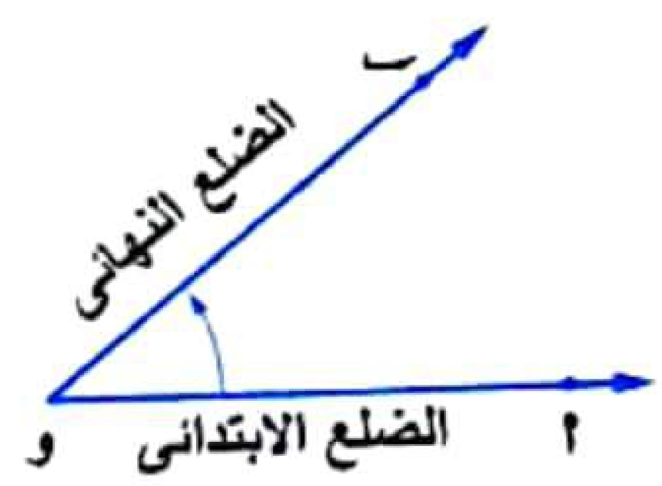
إذا أخذنا فى الاعتبار ترتيب ضلعى الزاوية بحيث يكون أحدهما ضلعًا ابتدائيًا والآخر ضلعًا نهائيًا ، ففى هذه الحالة تكتب الزاوية على شكل «زوج مرتب» مسقطه الأول هو الضلع الابتدائى ومسقطه الثانى هو الضلع النهائى وتسمى الزاوية بـ «الزاوية الموجهة» ، وعند رسمها اصطلح على رسم سهم بين ضلعيها يخرج من الضلع الابتدائى متجهًا نحو الضلع النهائى.

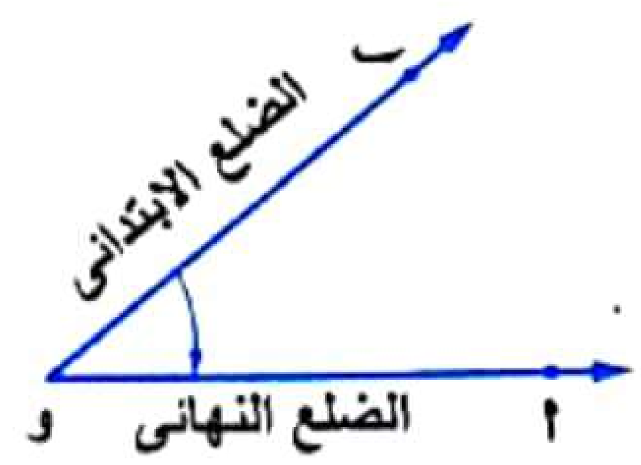
## تعريف الزاوية الموجهة

هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

فإذا كان : $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ضلعى زاوية رأسها نقطة و فإن :

| | |
|---|---|
| الزوج المرتب ($\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ أ و ب ضلعها الابتدائى $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، ضلعها النهائى $\overleftarrow{\text{و ب}}$ | الزوج المرتب ($\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ ب و أ ضلعها الابتدائى $\overleftarrow{\text{و ب}}$، ضلعها النهائى $\overleftarrow{\text{و أ}}$ |



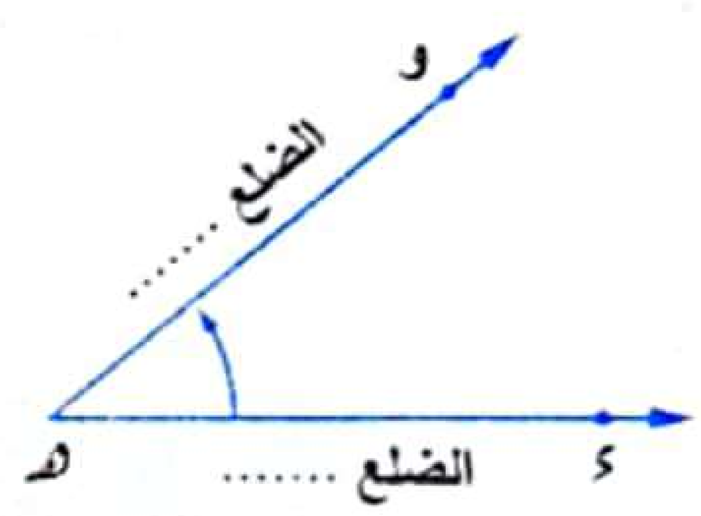




## نستنتج مما سبق أن

∠ أ و ب الموجهة ≠ ∠ ب و أ الموجهة وذلك لأن : ($\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$) ≠ ($\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$)

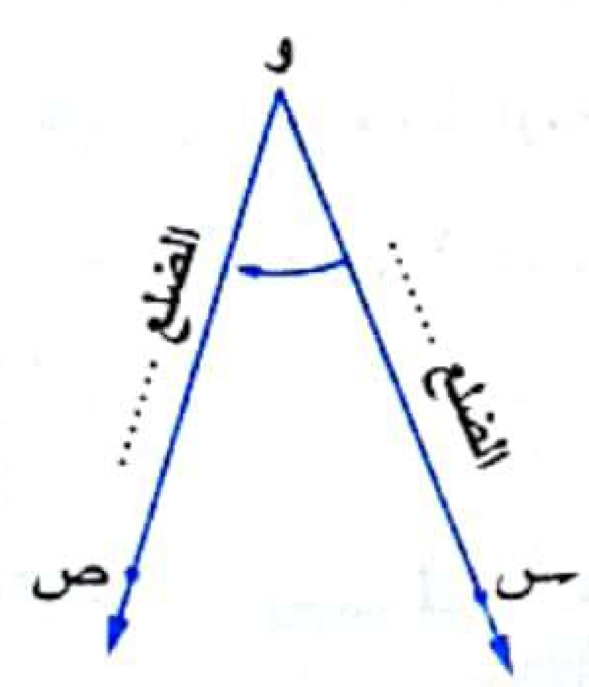
## تحقق من فهمك

أكمل : **1**




($\overleftarrow{\text{هـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$) يعبر عن ∠ ..... الموجهة.

**2**



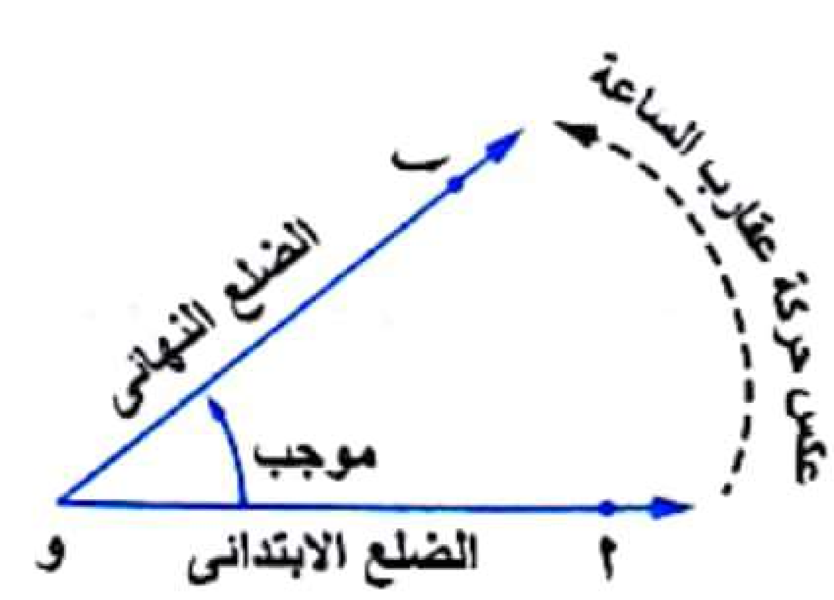

(..... ، .....) يعبر عن ∠ س و ص الموجهة.

## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يكون قياس الزاوية الموجهة أ و ب

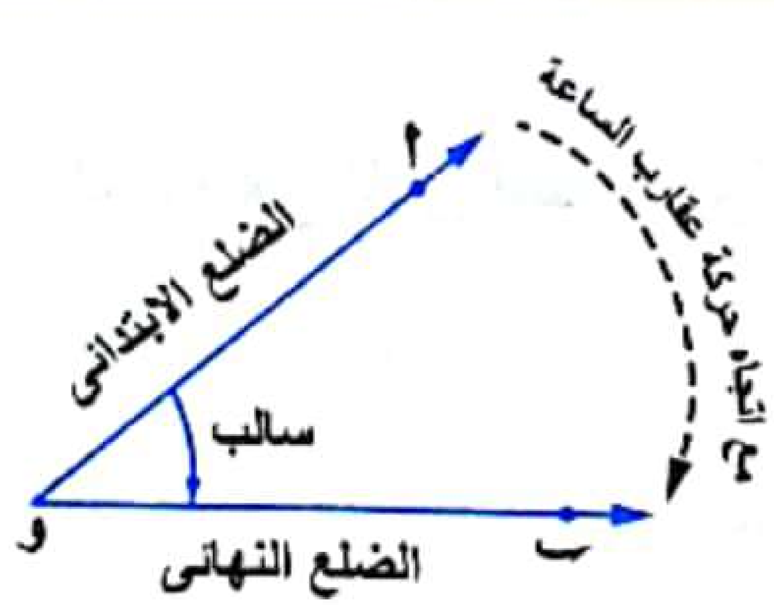
**موجبًا**

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **عكس** اتجاه حركة عقارب الساعة.




**سالبًا**

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **نفس** اتجاه حركة عقارب الساعة.



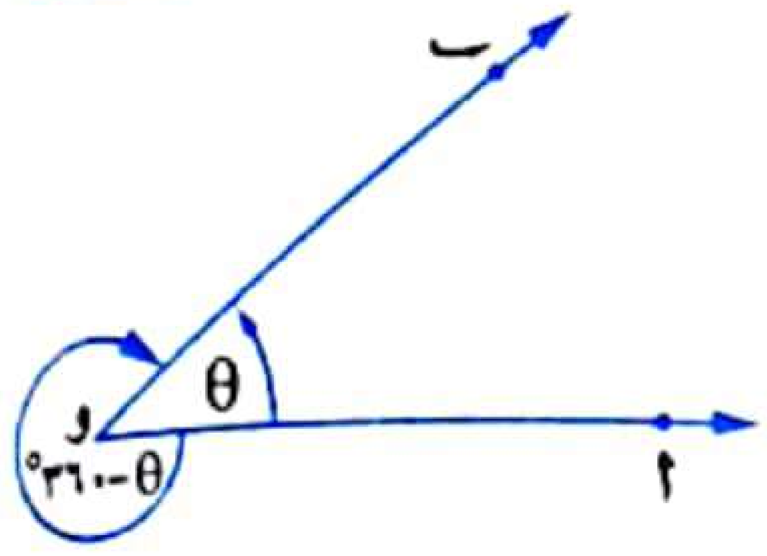
**ملاحظـة**

لكل زاوية موجهة غير صفرية قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين يساوى ٣٦٠°




**أى أن** | القياس الموجب للزاوية الموجهة | + | القياس السالب للزاوية الموجهة | = ٣٦٠°

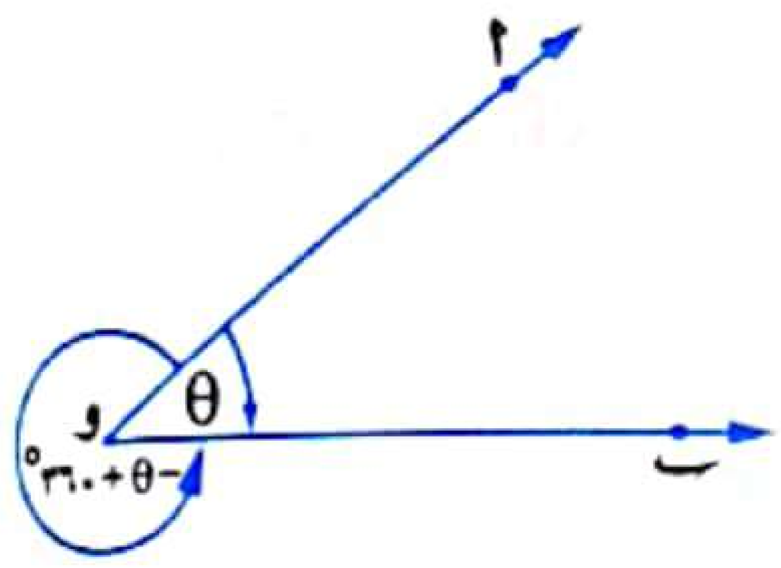
## وعلى هذا فإنه




١ إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة = $\theta$

فإن القياس السالب لنفس الزاوية = $\theta$ −٣٦٠°

**فمثلًا** القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٢١٠° = ٢١٠° − ٣٦٠° = −١٥٠°




٢ إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة = − $\theta$

فإن القياس الموجب لنفس الزاوية = − $\theta$ + ٣٦٠°

**فمثلًا** القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٢٠°)

= −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

## حاول بنفسك

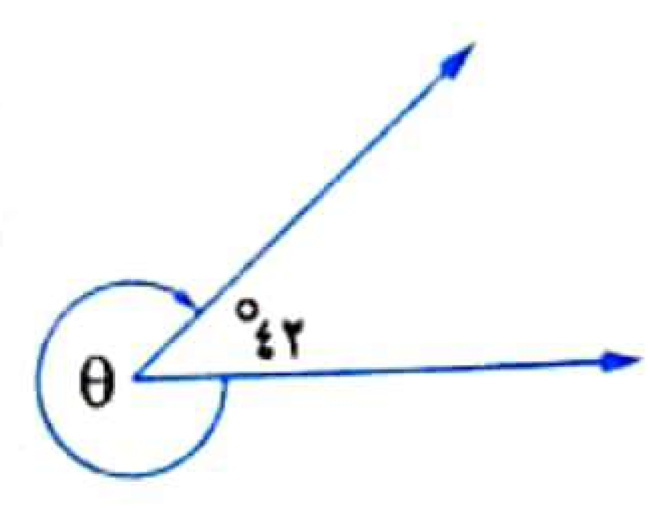
أوجد : ١ القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٧٠°)

٢ القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٣٢٠°

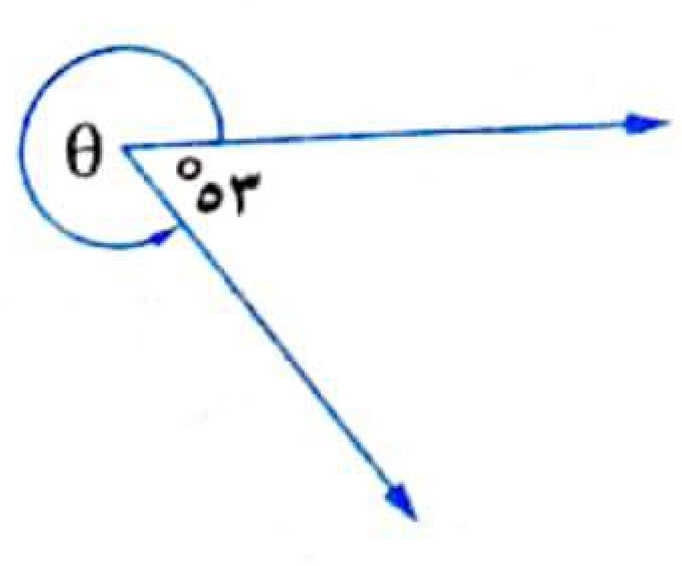
## مثال ١

أوجد قياس الزاوية الموجهة $\theta$ فى كل من الشكلين الآتيين :

١




٢




## الحـل

١ ∵ اتجاه السهم فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

∴ قياس الزاوية سالب.

∴ $\theta$ = ٤٢° − ٣٦٠° = −٣١٨°

٢ ∵ اتجاه السهم ضد اتجاه حركة عقارب الساعة.

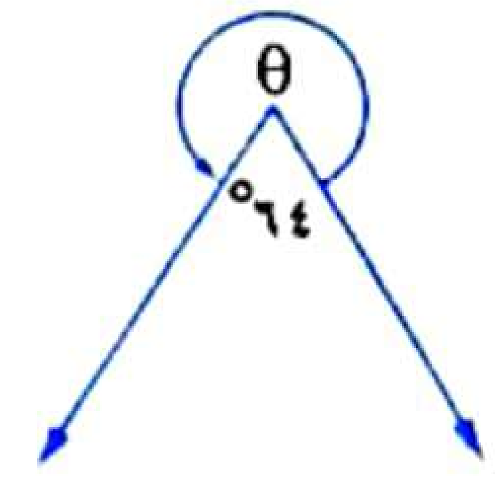
∴ قياس الزاوية موجب.

∴ $\theta$ = −٥٣° + ٣٦٠° = ٣٠٧°

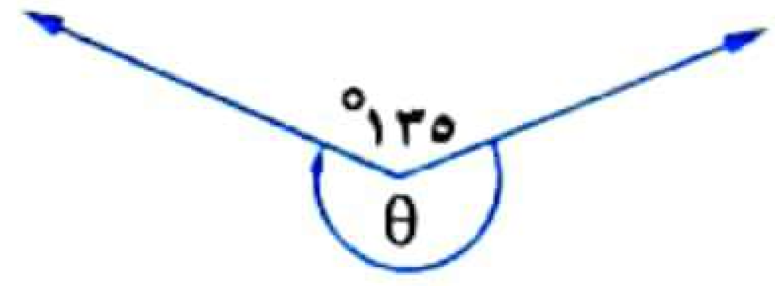
## حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ فى كل من الأشكال الآتية :

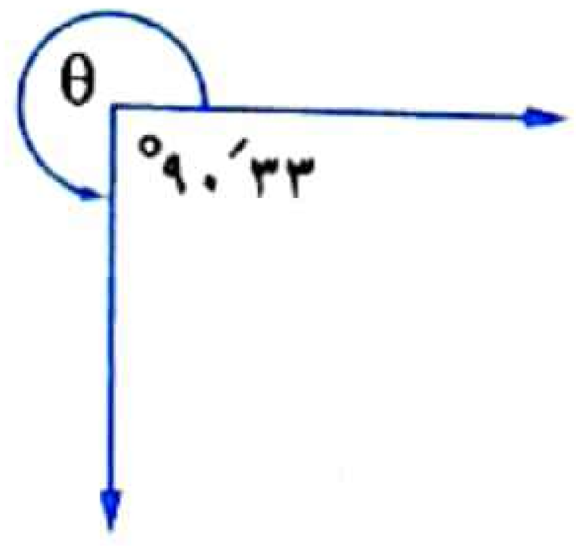
١




٢




٣




## الوضع القياسى للزاوية الموجهة

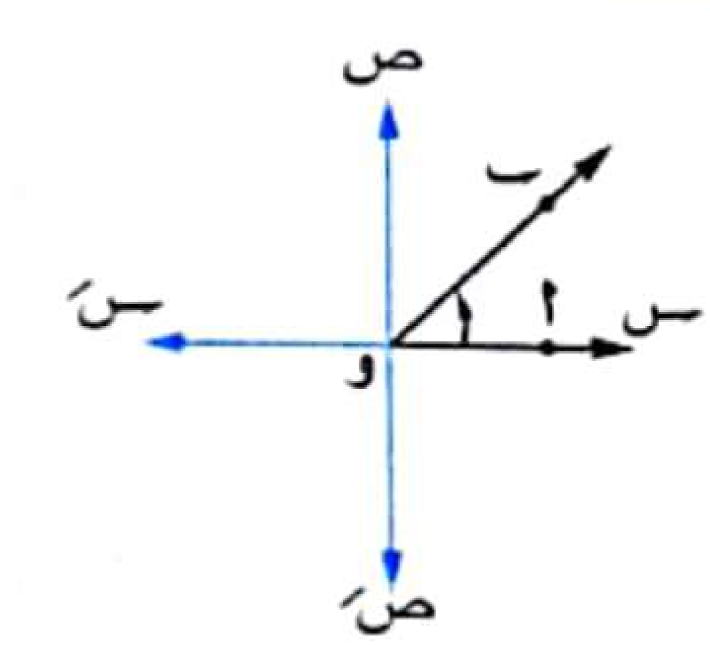
**تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان**

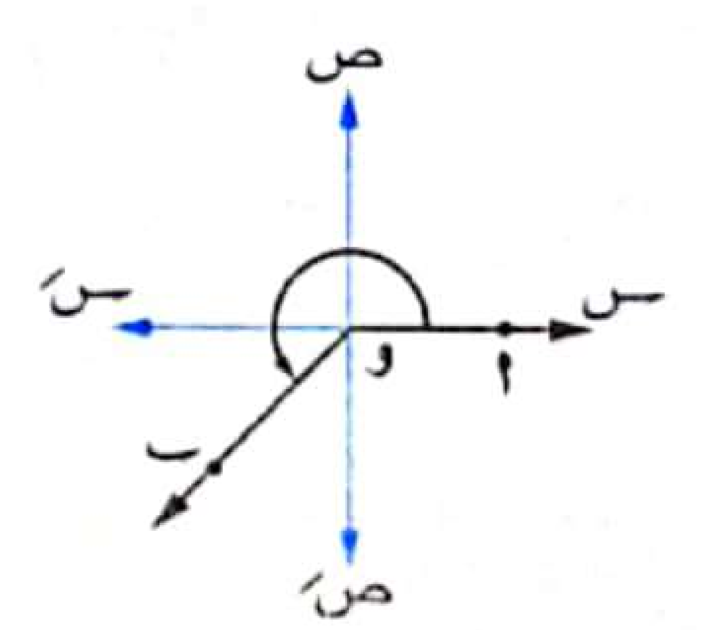
١ ضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

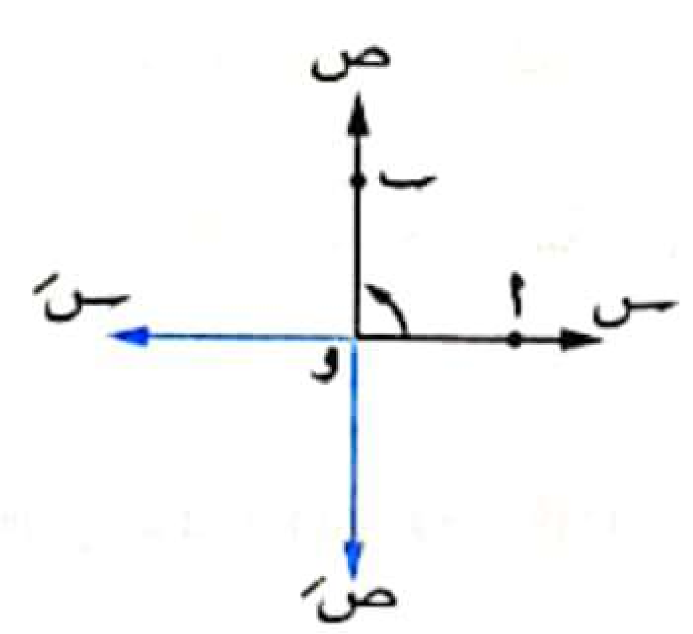
٢ رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

**وعلى هذا فإن :**

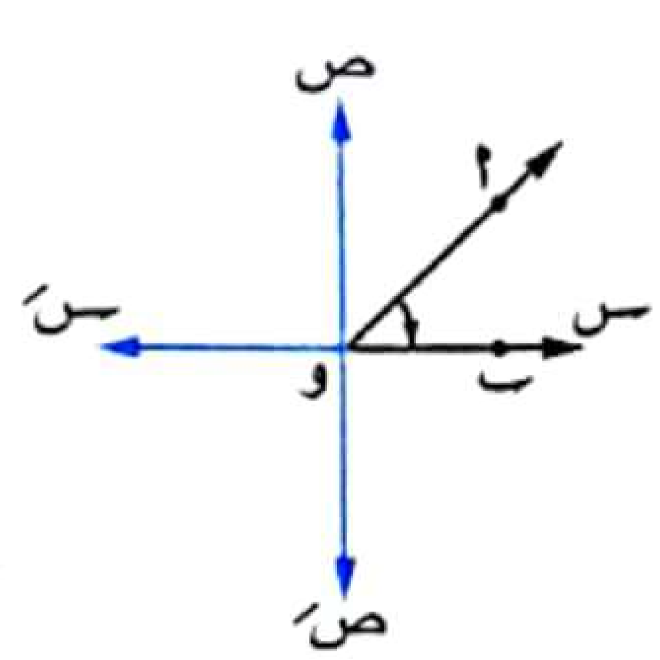
- كل من الزوايا الموجهة التالية فى الوضع القياسى لتحقق الشرطين السابقين :

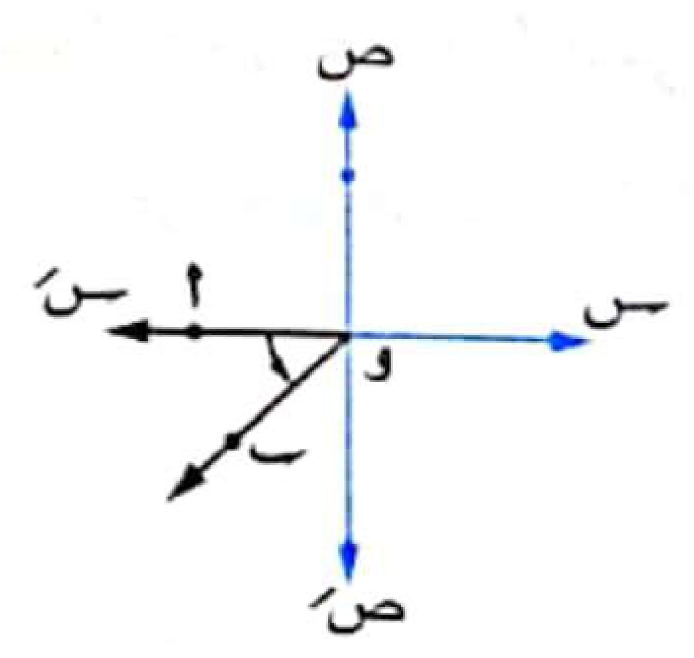


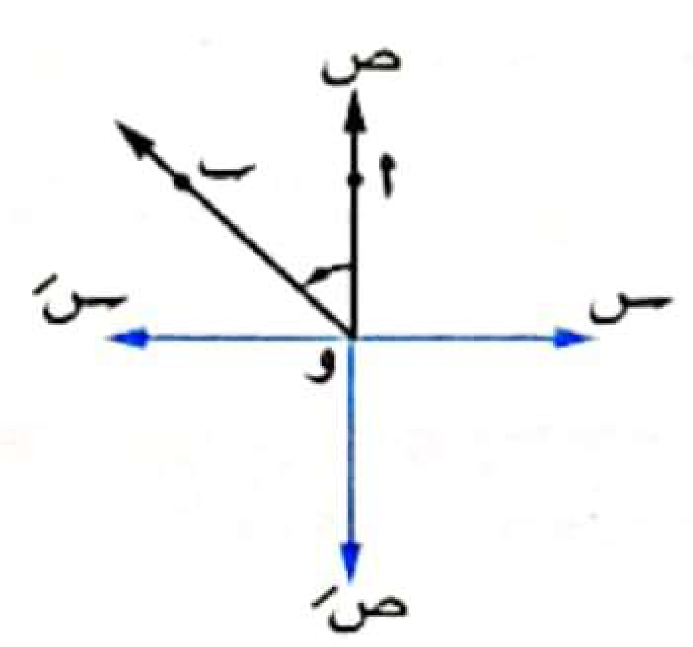




- كل من الزوايا الموجهة التالية ليست فى الوضع القياسى لأن الضلع الابتدائى لا يقع على $\overleftarrow{\text{و س}}$ :

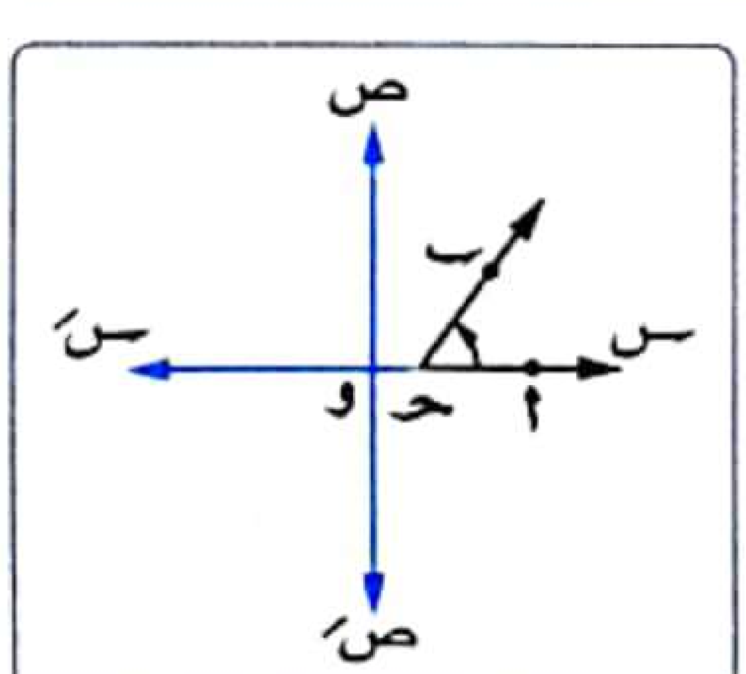


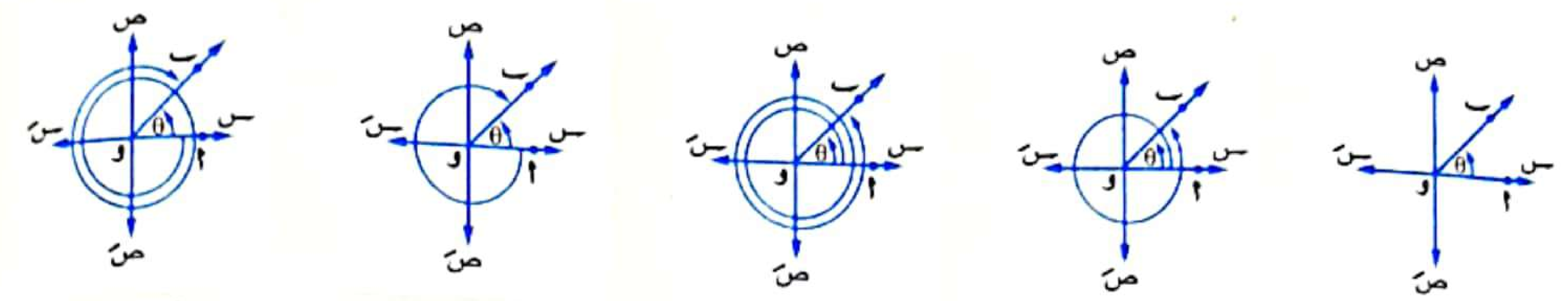

- الزاوية الموجهة فى الشكل المقابل ليست فى الوضع القياسى

لأن رأسها ليس نقطة الأصل و



## الزوايا المتكافئة

- إذا تأملنا الزوايا الموجهة فى الوضع القياسى فى الأشكال الآتية :




شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥)

**فإننا نلاحظ ما يلى**

١ الزوايا فى الأشكال الخمسة لها نفس الضلع النهائى $\overleftarrow{\text{و ب}}$

٢ الزاوية فى شكل (١) قياسها = $\theta$

، الزاوية فى شكل (٢) قياسها = $\theta$ + ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٣) قياسها = $\theta$ + ٢ × ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٤) قياسها = − (٣٦٠° − $\theta$) = $\theta$ − ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٥) قياسها = − (٢ × ٣٦٠° − $\theta$) = $\theta$ − ٢ × ٣٦٠°

**ومن ذلك نستنتج أنه**

إذا كان ($\theta$) هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها :

($\theta$ ± ٣٦٠°) ، ($\theta$ ± ٢ × ٣٦٠°) ، ($\theta$ ± ٣ × ٣٦٠°) ، ..... ، ($\theta$ ± ن × ٣٦٠°)

حيث ن عدد صحيح موجب يكون لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

مثل هذه الزوايا التى تشترك فى الضلع النهائى توصف بأنها **زوايا متكافئة**.

## تعريف الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا موجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

### مثال ٢

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من :

١ ١٠٠°

٢ −٢٥٠°

**الحل**

١ زاوية بقياس موجب : ١٠٠° + ٣٦٠° = ٤٦٠°

زاوية بقياس سالب : ١٠٠° − ٣٦٠° = −٢٦٠°

٢ زاوية بقياس موجب : −٢٥٠° + ٣٦٠° = ١١٠°

زاوية بقياس سالب : −٢٥٠° − ٣٦٠° = −٦١٠°

**لاحظ أنه**

يوجد عدد لا نهائى من الزوايا الأخرى بقياس موجب وبقياس سالب تشترك فى الضلع النهائى.

**مثال ٣**

عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

١ −٦٢° ٢ −٢٢٥° ٣ ٥٣٠° ٤ −٧٩٠°

**الحل**

١ أصغر قياس موجب = −٦٢° + ٣٦٠° = ٢٩٨°

٢ أصغر قياس موجب = −٢٢٥° + ٣٦٠° = ١٣٥°

٣ أصغر قياس موجب = ٥٣٠° − ٣٦٠° = ١٧٠°

٤ أصغر قياس موجب = −٧٩٠° + ٣ × ٣٦٠° = ٢٩٠°

**حاول بنفسك**

١ عيِّن أحد القياسات السالبة لكل من :

١ ٧٢° ٢ ١١٥٠°

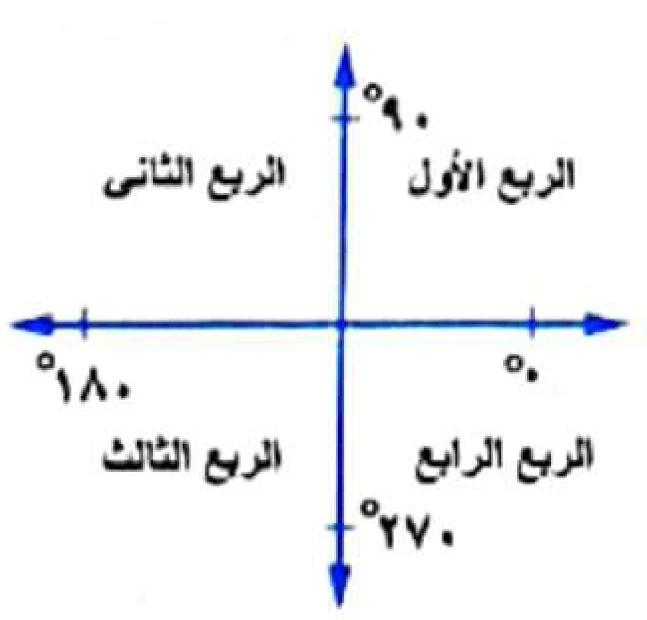
٢ عيِّن أصغر قياس موجب لكل من :

١ −١١٥° ٢ ٤٠٥°

## موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد

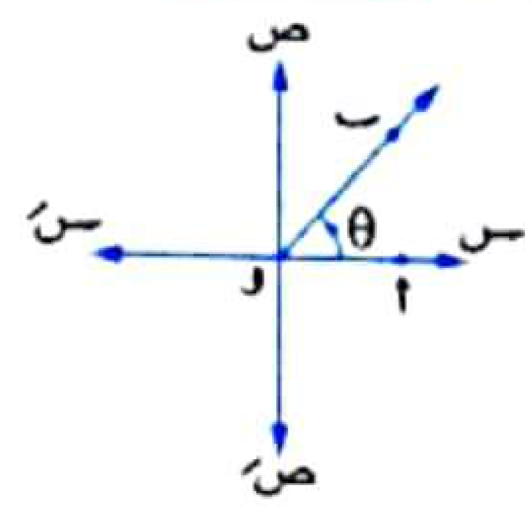
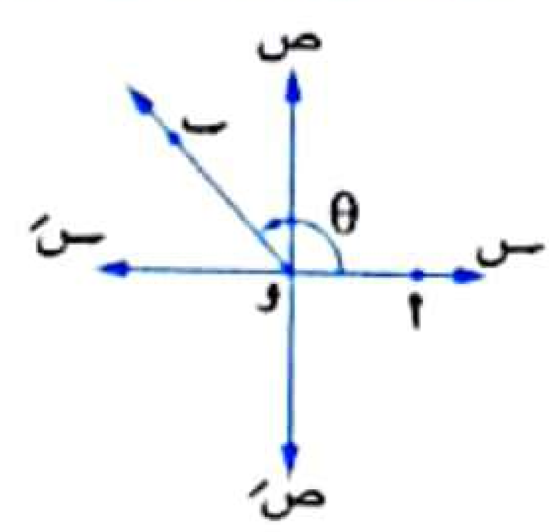
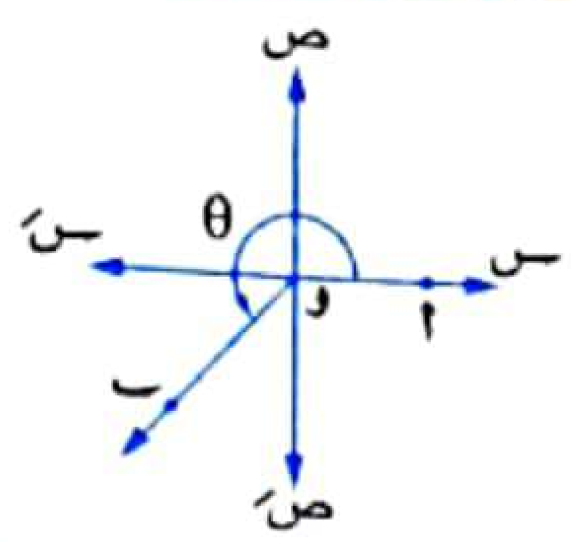
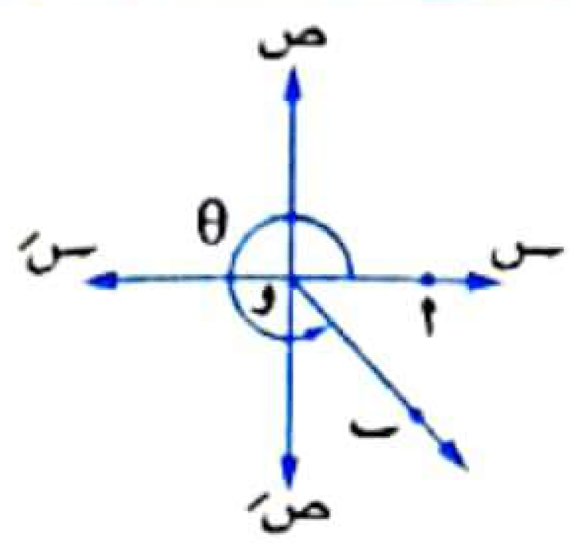
نعلم أن المستوى الإحداثى المتعامد ينقسم إلى أربعة أرباع كما فى الشكل التالى.

يتحدد موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد بموقع ضلعها النهائى عندما تكون فى وضعها القياسى.



فإذا رسمنا ∠ أ و ب الموجهة التى قياسها الموجب θ فى وضعها القياسى فإن :

**الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ قد يقع فى أحد الأرباع كما يلى**

| الربع الأول | الربع الثانى | الربع الثالث | الربع الرابع |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| ∠ أ و ب تقع فى **الربع الأول** ٠° < θ < ٩٠° | ∠ أ و ب تقع فى **الربع الثانى** ٩٠° < θ < ١٨٠° | ∠ أ و ب تقع فى **الربع الثالث** ١٨٠° < θ < ٢٧٠° | ∠ أ و ب تقع فى **الربع الرابع** ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° |

**ملاحظة**

إذا وقع الضلع النهائى على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية بالزاوية الربعية.

**أى أن** الزوايا التى قياساتها ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° هى زوايا ربعية.

## مثال ٤

عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

١ ٢١٣°  ٢ ١٣٢°  ٣ –٣١٠°  ٤ –١٢°

٥ ٢٧٠°  ٦ ٩٦٤°  ٧ –١٠٧٠°

## الحل

١ ∵ ١٨٠° < ٢١٣° < ٢٧٠°  ∴ الزاوية تقع فى الربع الثالث.

٢ ∵ ٩٠° < ١٣٢° < ١٨٠°  ∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى.

٣ أصغر قياس موجب = –٣١٠° + ٣٦٠° = ٥٠°

، ∵ ٠° < ٥٠° < ٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٥٠° تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها –٣١٠° تقع أيضًا فى الربع الأول.

**لاحظ أنه**

لتحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب لها أولًا.

٤ أصغر قياس موجب = −١٢° + ٣٦٠° = ٣٤٨°

، ∵ ٢٧٠° < ٣٤٨° < ٣٦٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٣٤٨° تقع فى الربع الرابع.

∴ الزاوية التى قياسها −١٢° تقع أيضًا فى الربع الرابع.

٥ ٢٧٠° زاوية ربعية.

٦ أصغر قياس موجب = ٩٦٤° − ٢ × ٣٦٠° = ٢٤٤°

، ∵ ١٨٠° < ٢٤٤° < ٢٧٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٢٤٤° تقع فى الربع الثالث.

∴ الزاوية التى قياسها ٩٦٤° تقع أيضًا فى الربع الثالث.

٧ أصغر قياس موجب = −١٠٧٠° + ٣ × ٣٦٠° = ١٠°

، ∵ ٠° < ١٠° < ٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ١٠° تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها −١٠٧٠° تقع أيضًا فى الربع الأول.

## حاول بنفسك

حدد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

١ ٦٧° ٢ −٢٢٠° ٣ ٨٧٥° ٤ −٢٠٢٠°

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الزوج المرتب ( و ب ، و جـ ) يمثل الزاوية الموجهة .........

(أ) ∠ و ب جـ (ب) ∠ ب و جـ (جـ) ∠ ب جـ و (د) ∠ و جـ ب

(٢) يقال للزوايا الموجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها نفس .............

(أ) الضلع الابتدائى. (ب) الضلع النهائى. (جـ) رأس الزاوية. (د) اتجاه الدوران.

(٣) إذا كانت $\theta$ هو أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب لها هو .............

(أ) $-\theta$ (ب) $\theta - ١٨٠°$ (جـ) $\theta - ٣٦٠°$ (د) $٣٦٠° - \theta$

(٤) إذا كانت الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى فأى مما يأتى صحيح ؟

① رأسها نقطة الأصل.

② ضلعها الابتدائى ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

③ قياسها موجب.

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ② فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(٥) إذا كانت $\theta$ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، $ن \in ص$

فإن الزوايا التى قياساتها $(\theta \pm ن \times ٣٦٠°)$ تسمى بالزوايا .............

(أ) المتكافئة. (ب) الربعية. (جـ) المتكاملة. (د) المتجاورة.

(٦) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات .............

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ٦٠°

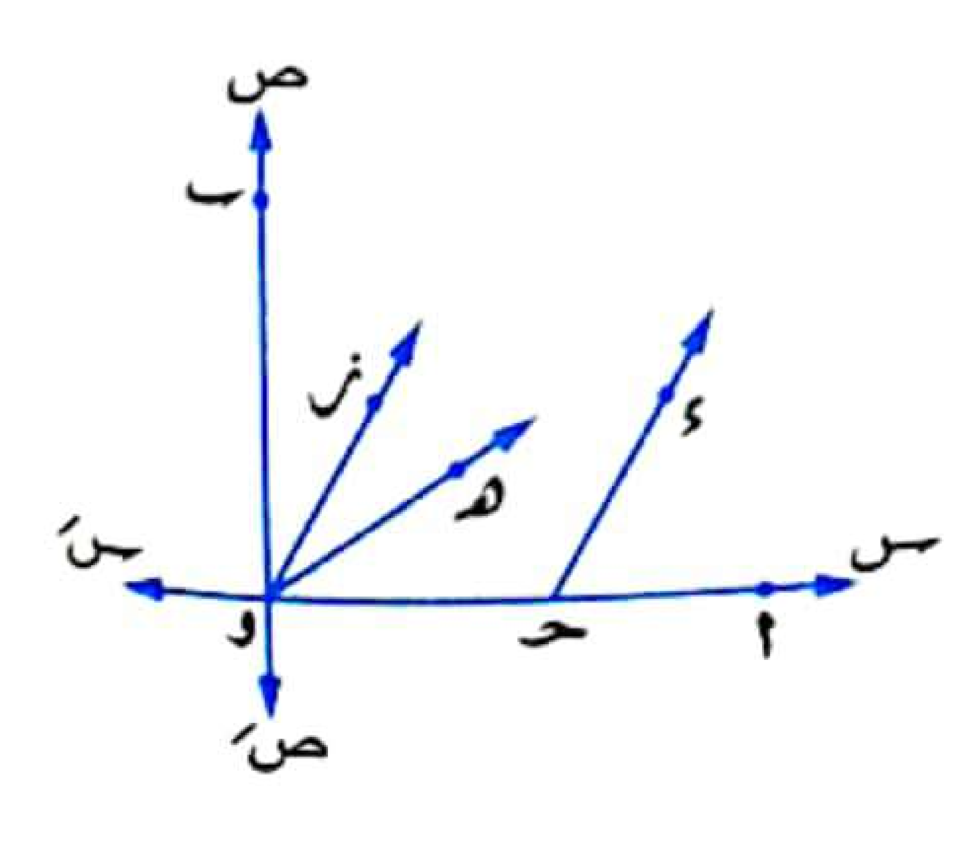
**٢ أى من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة فى وضعها القياسى ؟**

**فسِّر إجابتك.**

(١) (جـ أ ، جـ ء) (٢) (و أ ، و هـ)

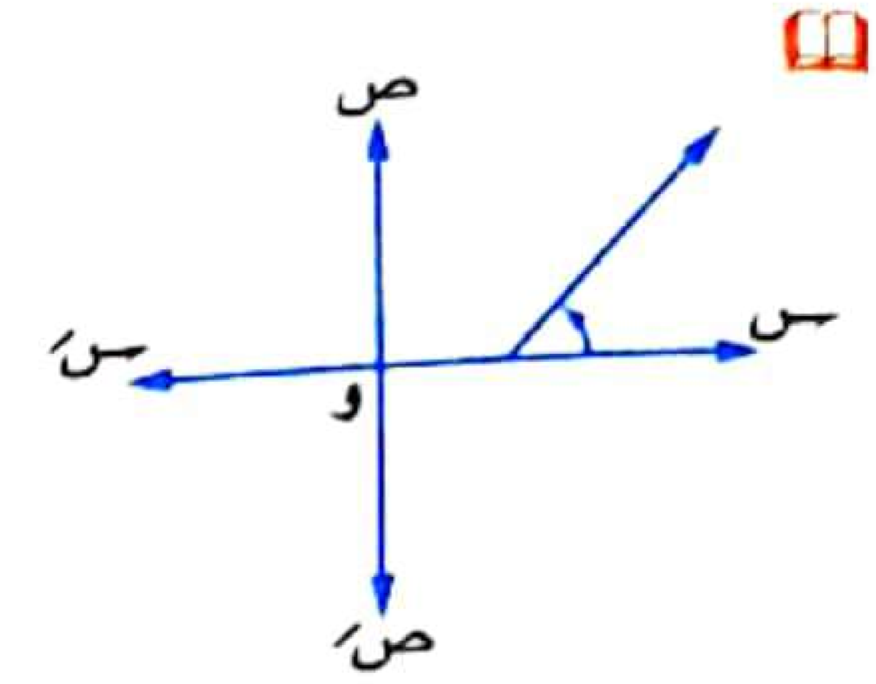
(٣) (و هـ ، و أ) (٤) (و أ ، و ز)

(٥) (و ب ، و ز) (٦) (و أ ، و ب)

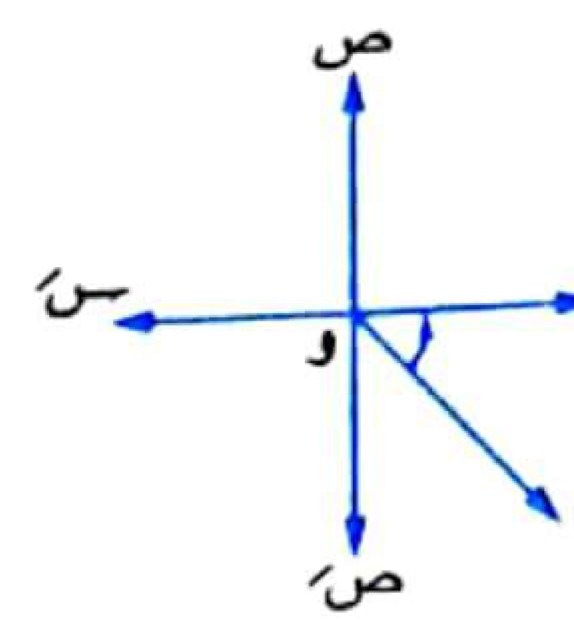


**٣** أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى ؟ فسِّر إجابتك.

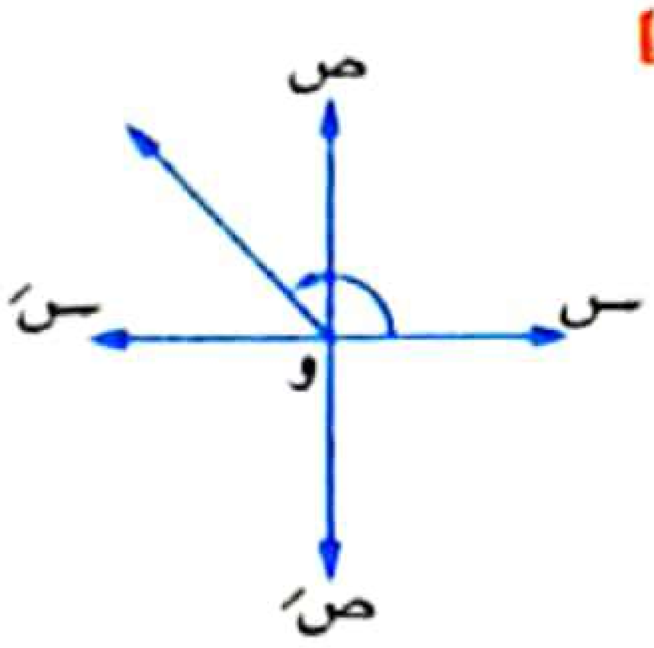
(١)



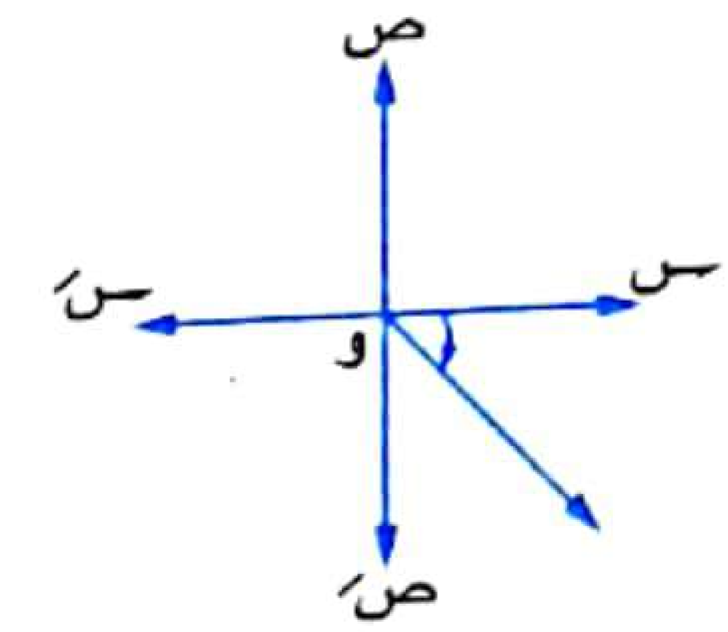

(٢)



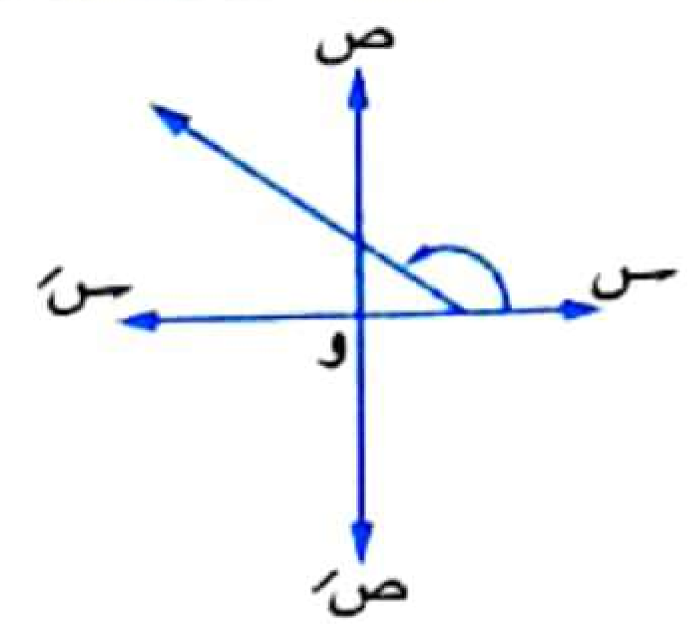

(٣)



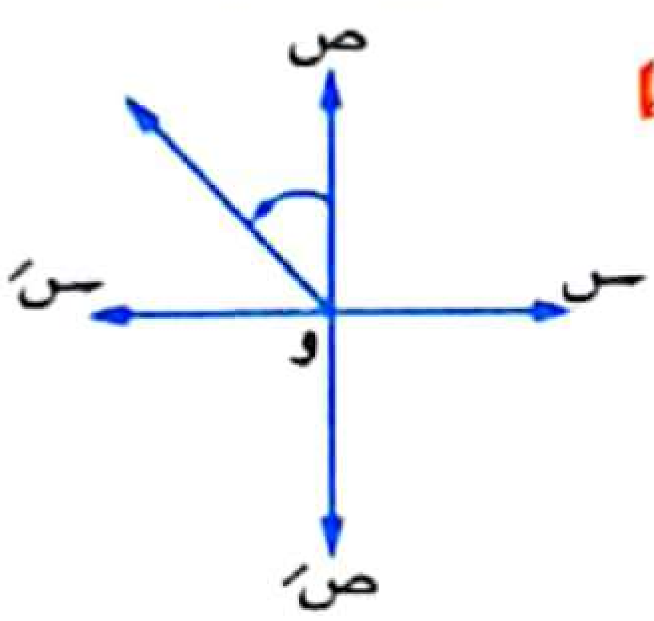

(٤)



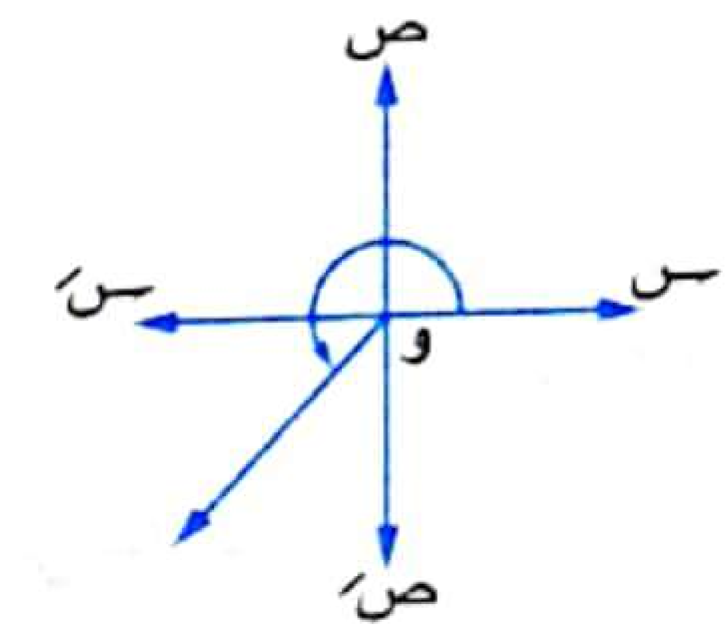

(٥)



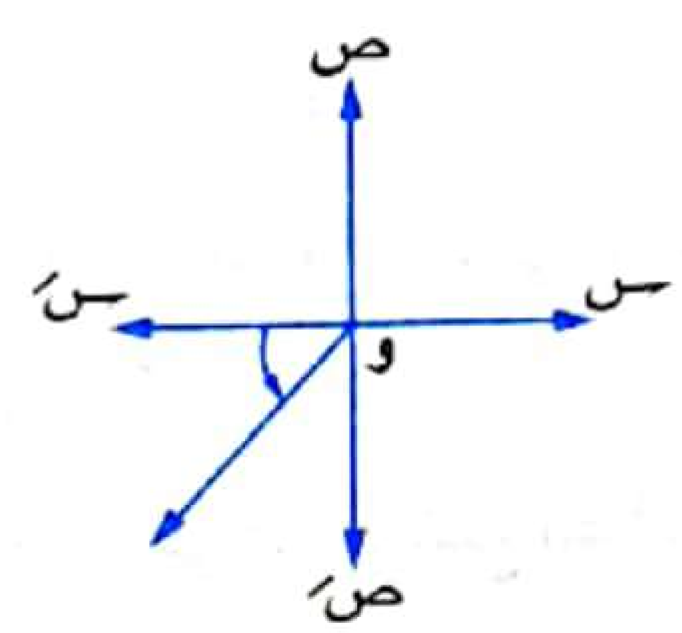

(٦)



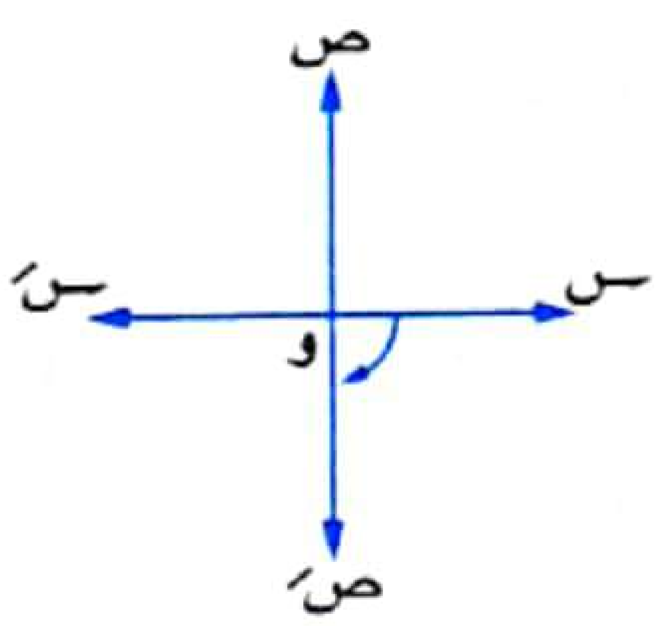

(٧)




(٨)

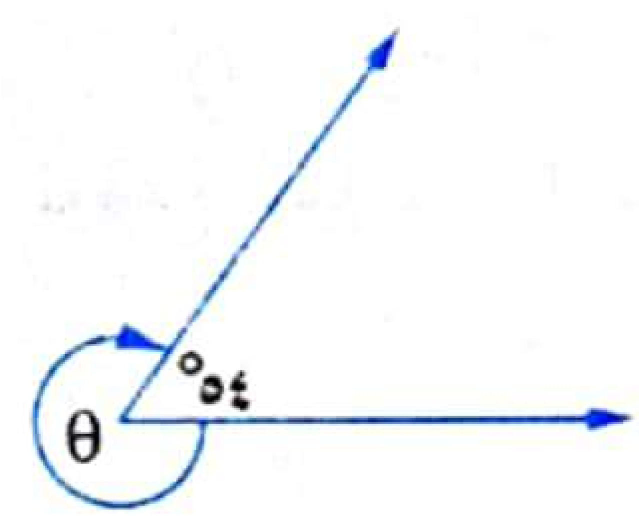



(٩)

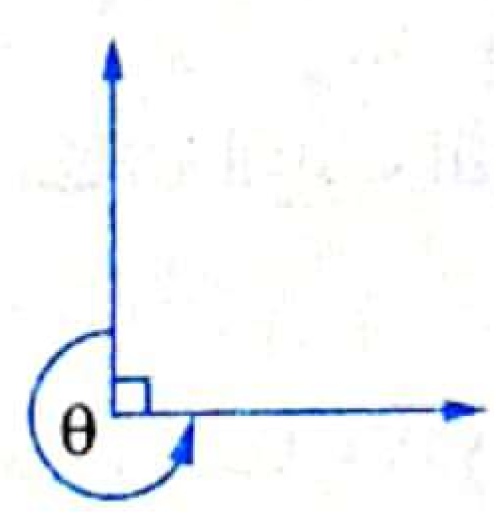



**٤** أوجد قياس الزاوية الموجهة $\theta$ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية :

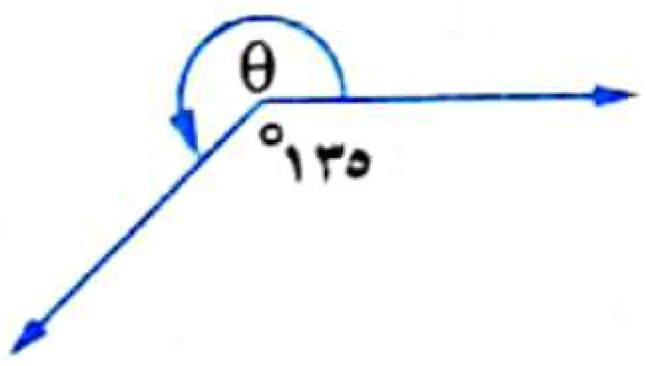
(١)



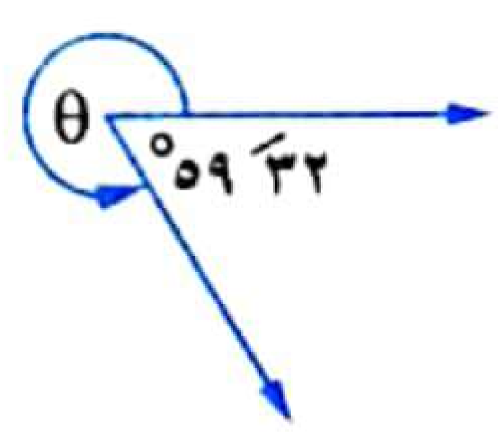

(٢)



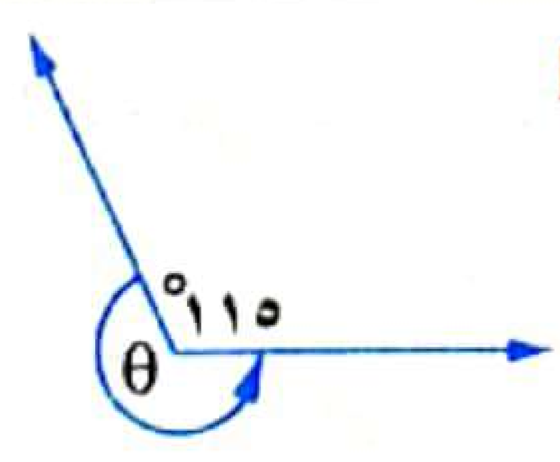

(٣)



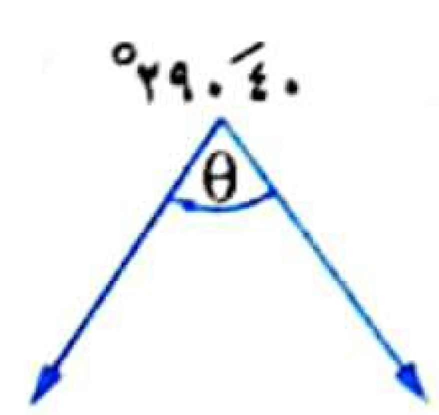

(٤)




(٥)




(٦)




**٥** ضع كلًا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى ، موضحًا ذلك بالرسم :

(١) ٣٢° (٢) ١٤٠° (٣) −٨٠° (٤) −١١٠° (٥) −٣١٥°

**٦** عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٢٤° (٢) ٢١٥° (٣) −٥٠° (٤) −٢١٠°

(٥) ١٥٠° َ١٤ (٦) ٨٩° َ٥٩ (٧) −١٨٠° (٨) ٢٦٩° َ٥٩ ً٦٠

**٧** عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى ثم عيِّن الربع الذى تقع فيه كل زاوية :

(١) −٥٦° (٢) ٦٠٠° (٣) −٢١٥ (٤) ٩٤٠°

(٥) ٤١٥° (٦) −٨٧٠° (٧) ١٥َ ١١٢٠° (٨) −١٨َ ٥٩٠°

---

**٨** عيِّن أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٨٣° (٢) ١٣٦° (٣) ٩٠°

(٤) ٢٦٤° (٥) ٩٦٤° (٦) ١٠٧٠°

---

**٩** أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٤٠° (٢) ١٥٠° (٣) −١٢٥° (٤) −٢٤٠° (٥) −١٨٠°

---

**١٠** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ..............

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

(٢) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ..............

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٣) الزاوية التى قياسها ٩٥٠° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ..............

(أ) ١٣٠° (ب) −١٣٠° (جـ) ٢٣٥° (د) −٢٣٠°

(٤) جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية التى قياسها ٧٥° فى الوضع القياسى ما عدا ..............

(أ) −٢٨٥° (ب) −٦٤٥° (جـ) ٢٨٥° (د) ٤٣٥°

(٥) الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١٦٧٠° هو ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٦) الزاوية التى قياسها (−١٣٥°) تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٧) الزاوية التى قياسها (−٨٥٠°) تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٨) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ..............

(أ) −٢٤٠° (ب) ١٠٠° (جـ) −١٢٠° (د) ٨٦٠°

(٩) الزاوية التى قياسها ٤٥° + (٤ ن + ١) × ٩٠° تقع فى الربع .............. (حيث ن ∈ ص)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٠) إذا كان : أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فإن : − أ ، − ب يكونان ..............

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين. (جـ) متتامتين. (د) مجموعهما −٣٦٠°

## اكتشف الخطأ

**١١** اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان فى الضلع النهائى للزاوية التى قياسها (−١٣٥°)

**إجابة كريم**

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ١٨٠° = −٣١٥°

**إجابة زياد**

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ٣٦٠° = −٤٩٥°

أى الإجابتين صحيحة ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٢** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فأى مما يأتى يمثل قياسى زاويتين متكافئتين أيضًا حيث حـ ∈ ص ؟

(أ) (أ + حـ) ، (ب + حـ) (ب) (أ − حـ) ، (ب − حـ)

(جـ) (حـ أ) ، (حـ ب) (د) كل ما سبق صحيح.

(٢) إذا كان : أ ، − أ قياسى زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ..............

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٣) إذا كان (٣ س − ٥)° أصغر قياس موجب ، (٣ ص − ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن : س − ص = ..............

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

(٤) إذا كان (θ + ٢٠)° ، (٢٠ − ٨ θ)° هما القياسان الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب فإن أقل قيمة موجبة لـ θ تكون ..............

(أ) ٢٠° (ب) ١٠° (جـ) ٣٠° (د) ٤٠°

(٥) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية التى قياسها ..............

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

(٦) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٣٠° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

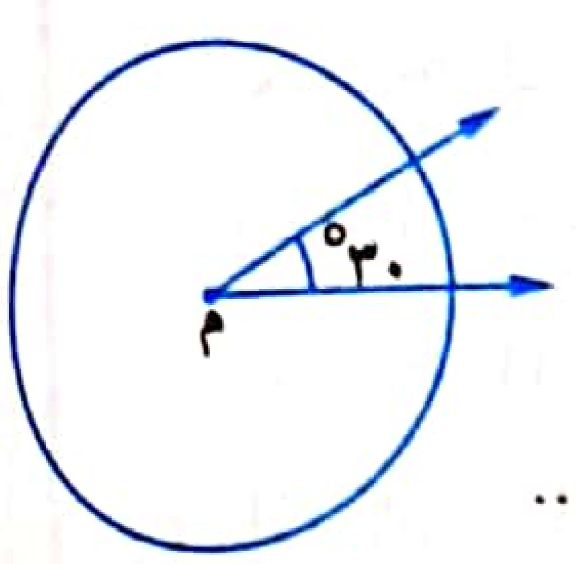
(٧) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ..............

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) الربع الثالث. (د) غير ذلك.



# الدرس 2 القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

## القياس الستينى للزاوية




تعتمد فكرته على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول ، وعليه فالزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة ويرمز لها بالرمز ١° والزاوية المركزية التى تحصر بين ضلعيها ٣٠ قوسًا من هذه الأقواس يكون قياسها ٣٠° وهكذا ...

### وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى

**الدرجة** هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى ، وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **دقيقة** ويرمز لها بالرمز ١َ ، كما تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **ثانية** ويرمز لها بالرمز ١ً

**أى أن** ١° = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

وفى هذا النوع من القياس تستخدم المنقلة كوسيلة لقياس الزوايا بالدرجات.

**تذكر أنه :**

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتحويل أجزاء الدرجات والدقائق إلى دقائق وثوانٍ والعكس

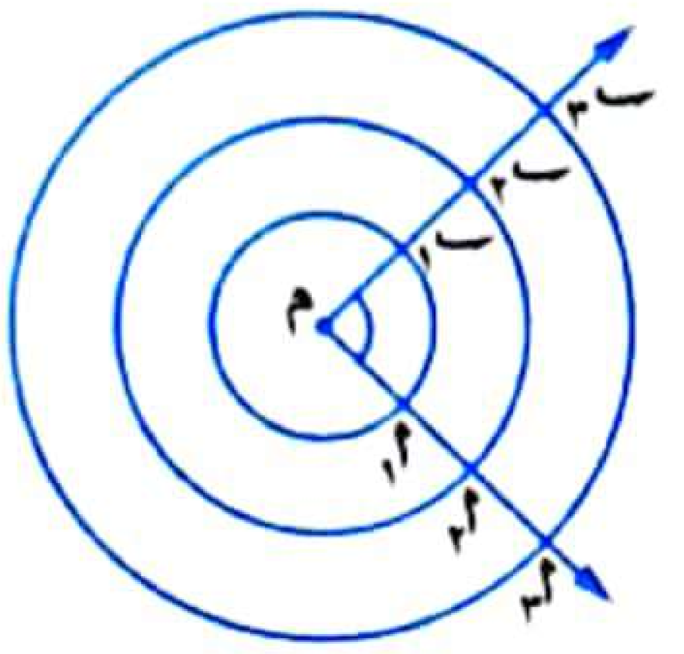
**فمثلًا**

- $\frac{٣}{٨}$ ٣٧° = ٣٧° ٢٢َ ٣٠ً　　　　37 $\frac{3}{8}$ [°'''] [=] 37° 22' 30''
- ٣٠ً ٣٧َ ٧٠° = $\frac{٥}{٨}$ ٧٠°　　　　70 [°'''] 37 [°'''] 30 [°'''] [=] [SHIFT] [S↔D] 70 $\frac{5}{8}$

**يعتمد هذا القياس على الحقيقة الهندسية الآتية**

في الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظر تساوى مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التى تحصر هذا القوس.

**ففى الشكل المقابل :**




$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{م أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{م أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{م أ_3} = \text{مقدار ثابت.}$$

هذا المقدار الثابت يسمى بـ «القياس الدائرى للزاوية»

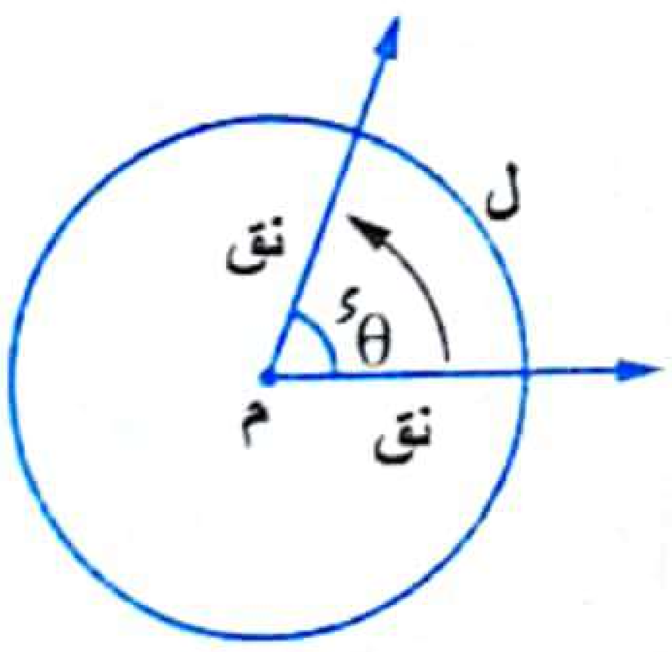
**أى أن**

$$\text{القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة} = \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

**مما سبق يمكن صياغة التعريف السابق رمزيًا كما يلى :**

**تعريف**

إذا كان $\theta^{د}$ هو القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق وتقابل قوسًا طوله ل فإن : $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

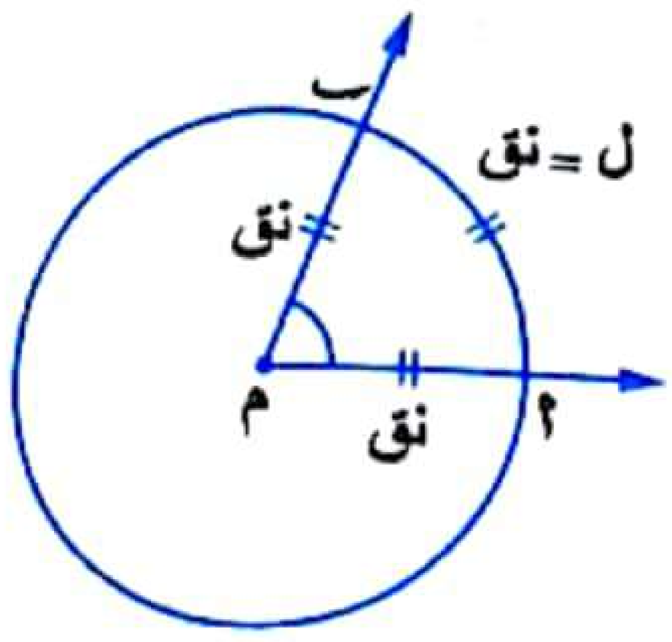



وحيث إن طول نصف قطر الدائرة نق مقدار ثابت فإن القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة يتناسب طرديًا مع طول القوس المقابل لها. **أى أن** $\theta^{د} \propto ل$

## وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى

**الزاوية النصف قطرية** هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى ، ويُرمز لها بالرمز $١^{د}$ ويُقرأ «واحد دائرى» (راديان) ، ويمكن تعريف الزاوية النصف قطرية كالتالى :

## تعريف




الزاوية النصف قطرية هى الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة.

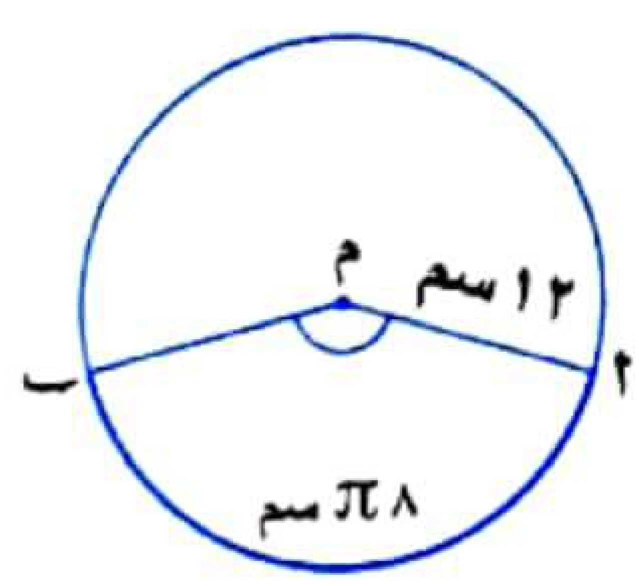
**لاحظ أن** $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ $\therefore \theta^{د} = \frac{نق}{نق} = 1^{د}$

**فمثلًا**

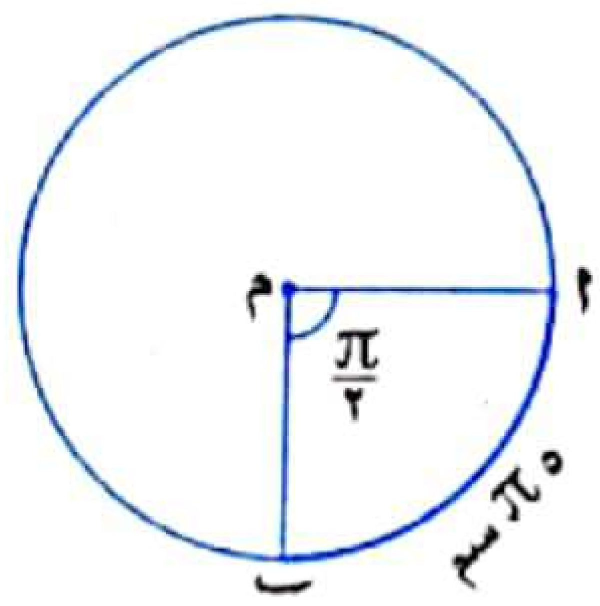
الزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرتها يكون قياسها = ٢ ء

### مثال ١

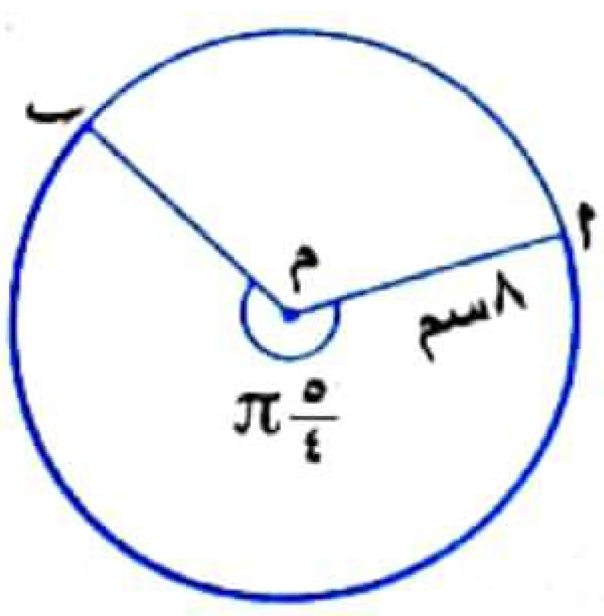
في كل من الدوائر الآتية أوجد المطلوب أسفل كل شكل لأقرب جزء من عشرة :




ق (∠ أ م ب) بالقياس الدائرى.

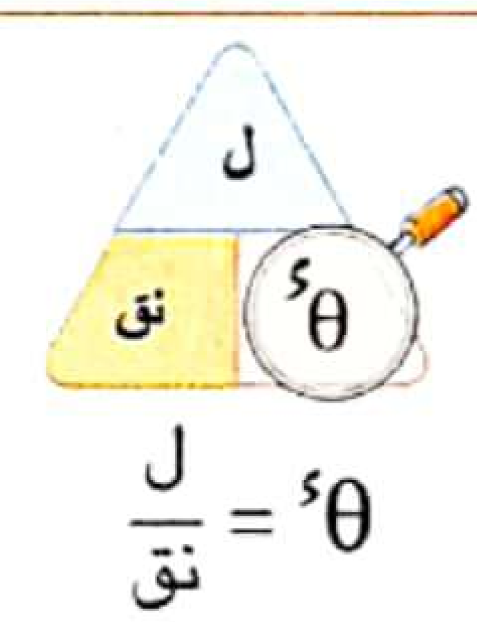



طول نصف قطر الدائرة م



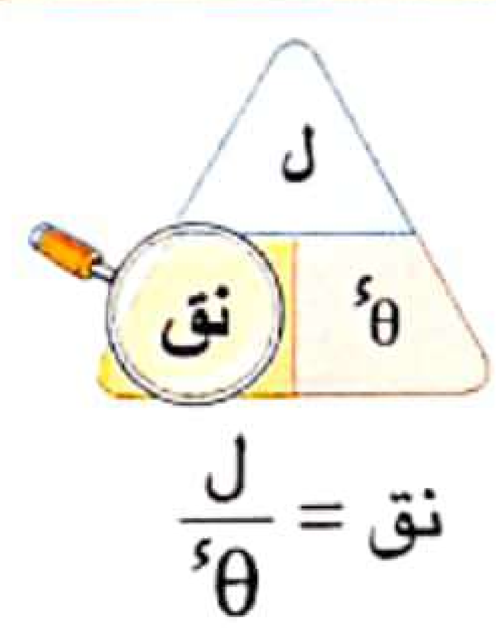

طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر.

### الحل



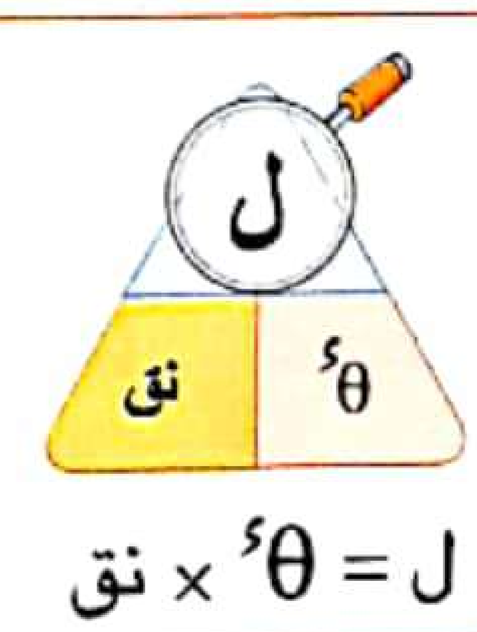

$\theta^{د} = ؟$ ، ل = ٨ π سم ، نق = ١٢ سم

$\therefore$ ق (∠ أ م ب) بالقياس الدائرى $= \frac{ل}{نق} = \frac{٨\,\pi}{١٢} = \frac{٢}{٣}\,\pi \simeq ٢,١^{د}$




نق = ؟ ، ل = ٥ π سم ، $\theta^{د} = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ طول نصف القطر $= \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{٥\,\pi}{\frac{\pi}{٢}} = ٥\,\pi \times \frac{٢}{\pi} = ١٠$ سم




ل = ؟ ، $\theta^{د} = \frac{٥}{٤}\,\pi$ ، نق = ٨ سم

$\therefore$ طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر $= \theta^{د} \times$ نق $= \frac{٥}{٤}\,\pi \times ٨ = ١٠\,\pi \simeq ٣١,٤$ سم

**ملاحظة**

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة ويكون $\theta^{ء} = \text{ل}$

**فمثلا** فى دائرة الوحدة الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله $\frac{1}{2}\pi$ وحدة طول قياسها بالتقدير الدائرى = $\frac{1}{2}\pi$ (راديان) $\simeq$ ١,٥٧ ء

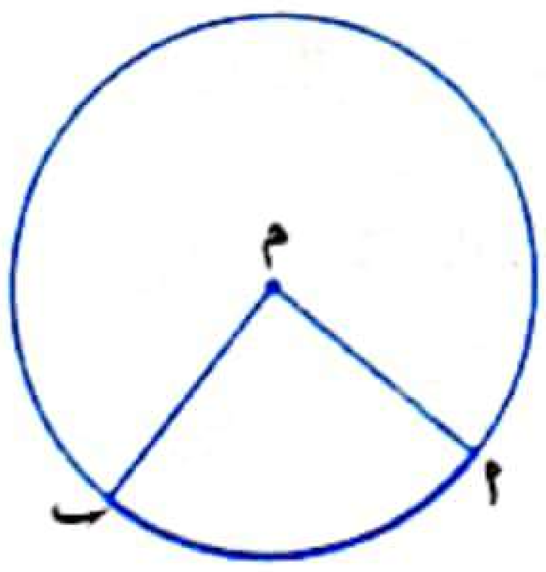
**حاول بنفسك**

١ أوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا فى دائرة طوله ١٥ سم إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم.

٢ أوجد طول القوس فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله $\frac{7\pi}{12}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها $\frac{9}{8}\pi$ وتحصر قوسًا طوله ٢٤ سم لأقرب رقم عشرى واحد.

## العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الستينى




نعلم أنه فى أى دائرة يكون: $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول هذا القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$

أى أنه فى الشكل المقابل: $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{أب}}}{2\pi \text{ نق}}$

، ∵ ق(∠أ م ب) = ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) ∴ $\frac{\text{ق}(\angle \text{أ م ب})}{180^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{أب}}}{\pi \text{ نق}}$

وبفرض أن: ق(∠أ م ب) يساوى س° بالقياس الستينى ويساوى $\theta^{ء}$ بالقياس الدائرى

وأن: طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = ل ∴ $\frac{\text{س}^\circ}{180^\circ} = \frac{\text{ل}}{\pi \text{ نق}}$

، ∵ $\theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{س}^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}}$ ومنها $\boxed{\theta^{ء} = \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}}$ ، $\boxed{\text{س}^\circ = \theta^{ء} \times \frac{180^\circ}{\pi}}$

**مثال ٢**

١ أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية القياس الدائرى للزاوية التى قياسها الستينى ١٥ً ٣٢َ ٧٥°

٢ أوجد القياس الستينى للزاوية التى قياسها الدائرى ٢,٣٨ ء

**الحـل**

1) $\because \theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$

$\therefore \theta^{د} = 15^\circ\ 32'\ 75''$ ... $\theta^{د} = ٧٥° ٣٢َ ١٥ً \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ١,٣١٨^{د}$

2) $\because س^\circ = \theta^{د} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

$\therefore س^\circ = ٢,٣٨^{د} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ١٣٦° ٢١َ ٥٠ً$

**حاول بنفسك**

1) حوِّل قياس الزاوية ١,٢ د إلى قياس ستينى.

2) حوِّل قياس الزاوية ٣٠َ ٧٢° إلى قياس دائرى مقربًا إلى رقمين عشريين.

**معلومة إثرائية**

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grade) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.

وعلى هذا فإنه : إذا كانت س ، $\theta$ ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة ، والراديان ، والجراد

فإن : $\frac{س^\circ}{١٨٠°} = \frac{\theta^{د}}{\pi} = \frac{ص}{٢٠٠}$

**ملاحظات**

1) إذا كان القياس الدائرى للزاوية يساوى $\pi$ (راديان) فإن قياسها الستينى $= \pi \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ١٨٠°$

**أى أن** $\pi$ بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى

**فمثلًا** $\frac{٣}{٥}\pi$ تكافئ $\frac{٣}{٥} \times ١٨٠° = ١٠٨°$

2) إذا علم القياس الستينى لزاوية ما وطلب تحويله إلى القياس الدائرى بدلالة $\pi$

فإننا نستخدم العلاقة : $\theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠°}$ ولا نعوض عن $\pi$

**فمثلًا** ١٨° تكافئ $١٨° \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{١٠}$ ، ١٣٥° تكافئ $١٣٥° \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{٣}{٤}\pi$

**مثال ٣**

عيِّن الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

1) ٢,٠٢ د

2) -٣,٧ د

3) $\frac{٥}{٤}\pi$

## الحــل

لإيجاد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة نوجد قياسها بالتقدير الستينى.

**١** ∵ $س^\circ = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = ٢,٠٢^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ١١٥^\circ\ ٤٤'\ ٥''$

∴ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{ء}$ تكافئ $١١٥^\circ\ ٤٤'\ ٥''$ بالتقدير الستينى.

، ∵ الزاوية التى قياسها $١١٥^\circ\ ٤٤'\ ٥''$ تقع فى الربع الثانى.

∴ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{ء}$ تقع فى الربع الثانى.

**٢** ∵ $س^\circ = -٧,٣^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq -٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣''$

، ∵ الزاوية التى قياسها $-٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣''$ تكافئ : $-٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣'' + ٢ \times ٣٦٠^\circ = ٣٠١^\circ\ ٤٤'\ ٢٧''$

∵ الزاوية التى قياسها $٣٠١^\circ\ ٤٤'\ ٢٧''$ تقع فى الربع الرابع.

∴ الزاوية التى قياسها $-٧,٣^{ء}$ تقع فى الربع الرابع.

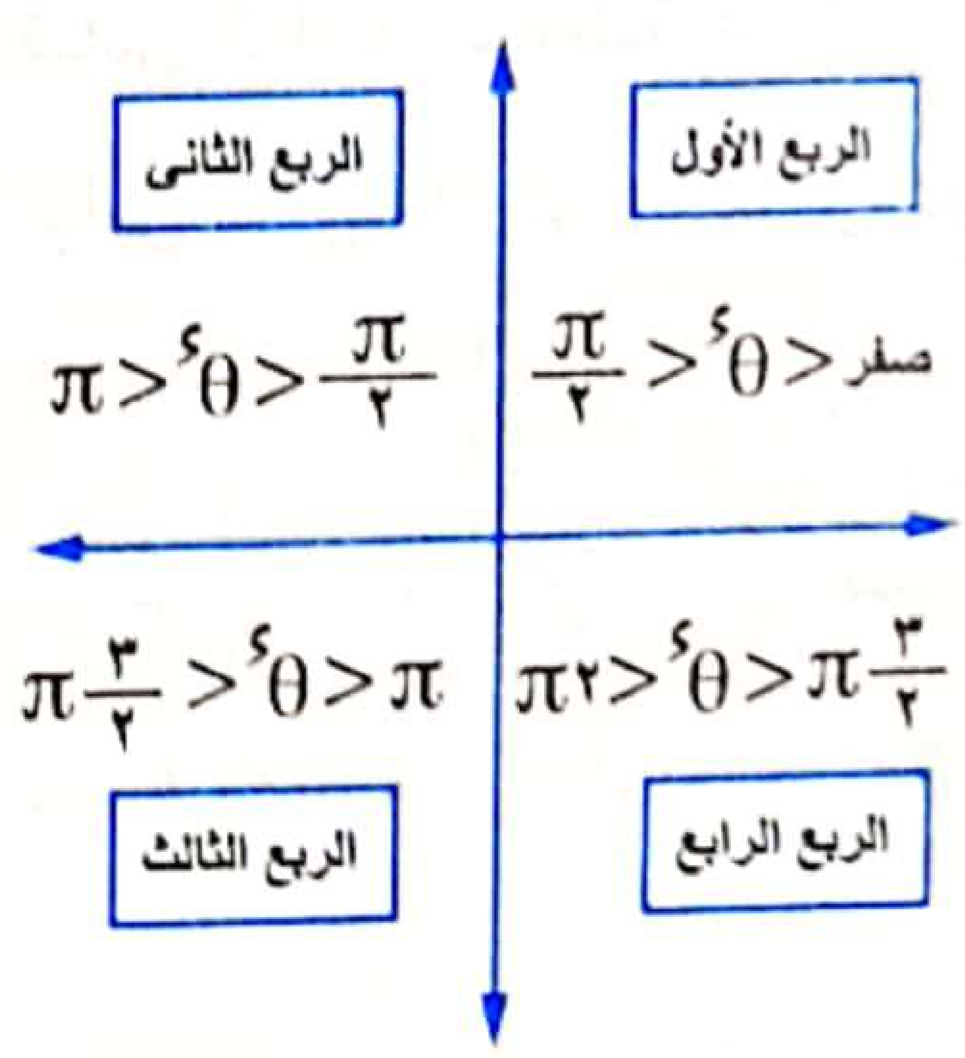
**٣** ∵ $\frac{٥}{٤}\pi$ تكافئ $\frac{٥}{٤} \times ١٨٠^\circ = ٢٢٥^\circ$

، ∵ الزاوية التى قياسها $٢٢٥^\circ$ تقع فى الربع الثالث.

∴ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

### ملاحظة

يمكن تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة المعلوم قياسها الدائرى بدلالة $\pi$ دون التحويل إلى القياس الستينى بملاحظة الشكل المقابل :




**فمثلاً** باستخدام الشكل المقابل يمكن مباشرة أن نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ فى المثال السابق

**حيث إن** $\pi < \frac{٥}{٤}\pi < \frac{٣}{٢}\pi$

∴ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

### حاول بنفسك

أوجد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الآتية :

**١** الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٣}\pi$

**٢** الزاوية التى قياسها $-٠,٣\pi$

**٣** الزاوية التى قياسها $٥,٧^{ء}$

**٤** الزاوية التى قياسها $-٦,٤^{ء}$

## مثال ٤

أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها $152^\circ\ 26'\ 17''$ مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر.

### الحل

$\because\ \theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 152^\circ\ 26'\ 17'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2,6605^{د}$

$\therefore\ ل = \theta^{د} \times نق = 2,6605 \times 10,5 \simeq 28$ سم

## مثال ٥

أوجد كلاً من القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ١٢,٦ سم من دائرة طول نصف قطرها ٧,٢ سم

### الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{12,6}{7,2} = 1,75^{د}$ ، $س^\circ = 1,75^{د} \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 100^\circ\ 16'\ 3''$

## مثال ٦

أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية قياسها $30^\circ$ يقابلها قوس طوله ٥ سم

### الحل

$\because$ قياس الزاوية المحيطية $= 30^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المناظرة لها $= 60^\circ$

$\therefore\ \theta^{د} = 60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ نق = \frac{ل}{\theta^{د}} = 5 \div \frac{\pi}{3} = \frac{15}{\pi}$ سم

$\therefore$ محيط الدائرة $= 2\pi$ نق $= 2\pi \times \frac{15}{\pi} = 30$ سم

## مثال ٧

زاويتان مجموع قياسيهما الدائرى $3\frac{1}{7}^{د}$ والفرق بين قياسيهما الستينى $30^\circ$

أوجد قياس كل منهما بالقياس الدائرى والقياس الستينى $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

### الحل

$\because\ 3\frac{1}{7}^{د} = \frac{22}{7} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ$

وبفرض أن الزاويتين هما أ ، ب حيث : ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٨٠° ، ق(∠أ) − ق(∠ب) = ٣٠°

وبالجمع : ∴ ٢ ق(∠أ) = ٢١٠°

∴ ق(∠أ) = ١٠٥° ومنها : ق(∠ب) = ٧٥°

∴ ق(∠أ) بالتقدير الدائرى = ١٠٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٨٣ ء

، ق(∠ب) بالتقدير الدائرى = ٧٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٣١ ء

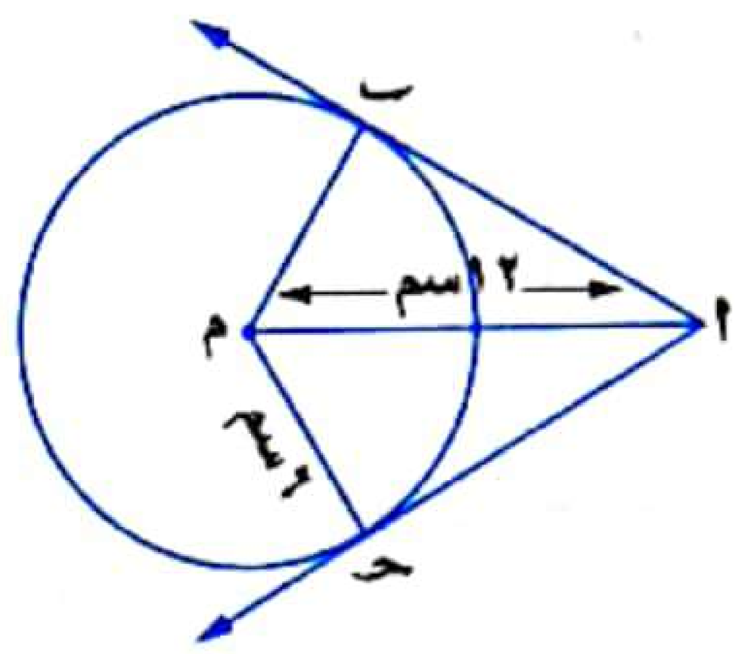
## مثال ٨

فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم

فإذا كان : أ م = ١٢ سم

فأوجد طول القوس $\frown{بجـ}$ الأكبر لأقرب عدد صحيح.




## الحل

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة م ∴ $\overline{مجـ} \perp \overleftrightarrow{أجـ}$

فى Δ أ م جـ : ∵ ق(∠أ جـ م) = ٩٠° ، م جـ = $\frac{١}{٢}$ أ م

∴ ق(∠جـ أ م) = ٣٠° ∴ ق(∠أ م جـ) = ٦٠°

، ∵ $\overrightarrow{مأ}$ ينصف ∠ب م جـ ∴ ق(∠ب م جـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ب م جـ) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

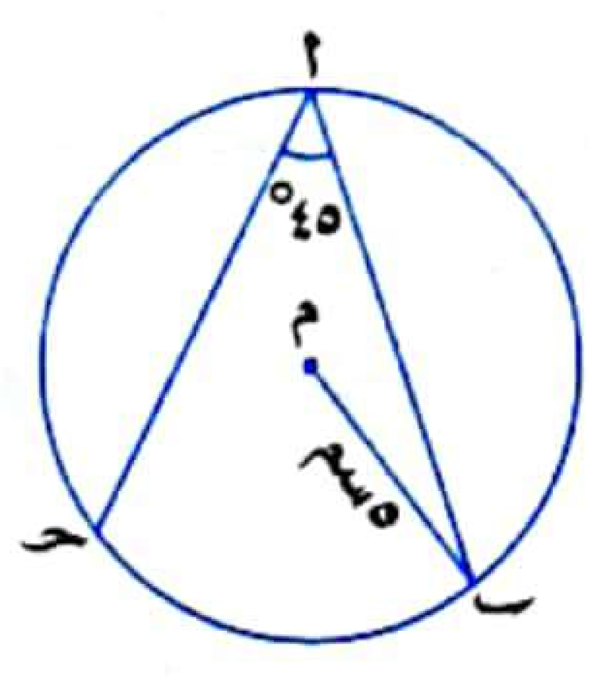
، ∵ $\theta$ ء = س° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ∴ $\theta$ ء = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٤}{٣}$ π

، ∵ ل = $\theta$ ء × نق ∴ طول $\frown{بجـ}$ الأكبر = $\frac{٤}{٣}$ π × ٦ = ٨ π ≃ ٢٥ سم

## حاول بنفسك

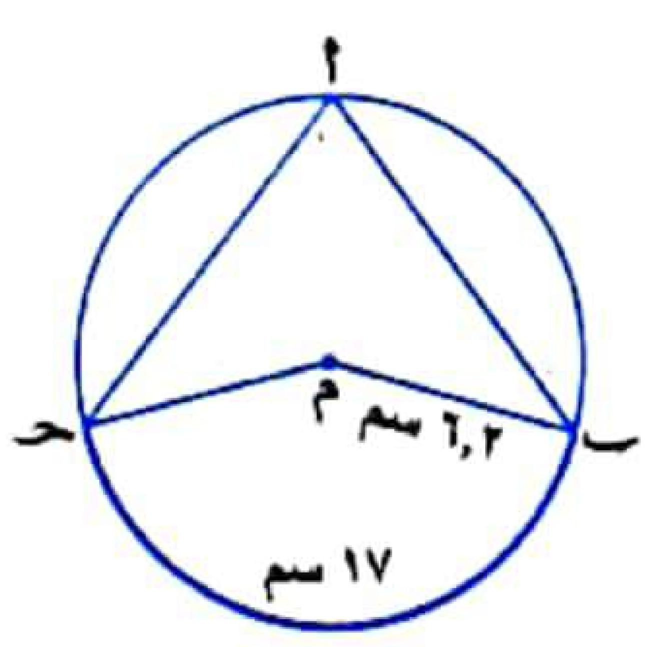
أوجد المطلوب أسفل كل شكل :

١




طول $\frown{بجـ}$

٢




ق(∠أ)

# تمارين 8 على القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** أوجد بدلالة π القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) ١٣٥° | (٢) ٩٠° | (٣) ٣٠٠° | (٤) −٢٣٥° |
| (٥) −٢١٠° | (٦) ٣٠َ ١١٢° | (٧) ٣٩٠° | (٨) ٧٨٠° |

**٢** أوجد القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

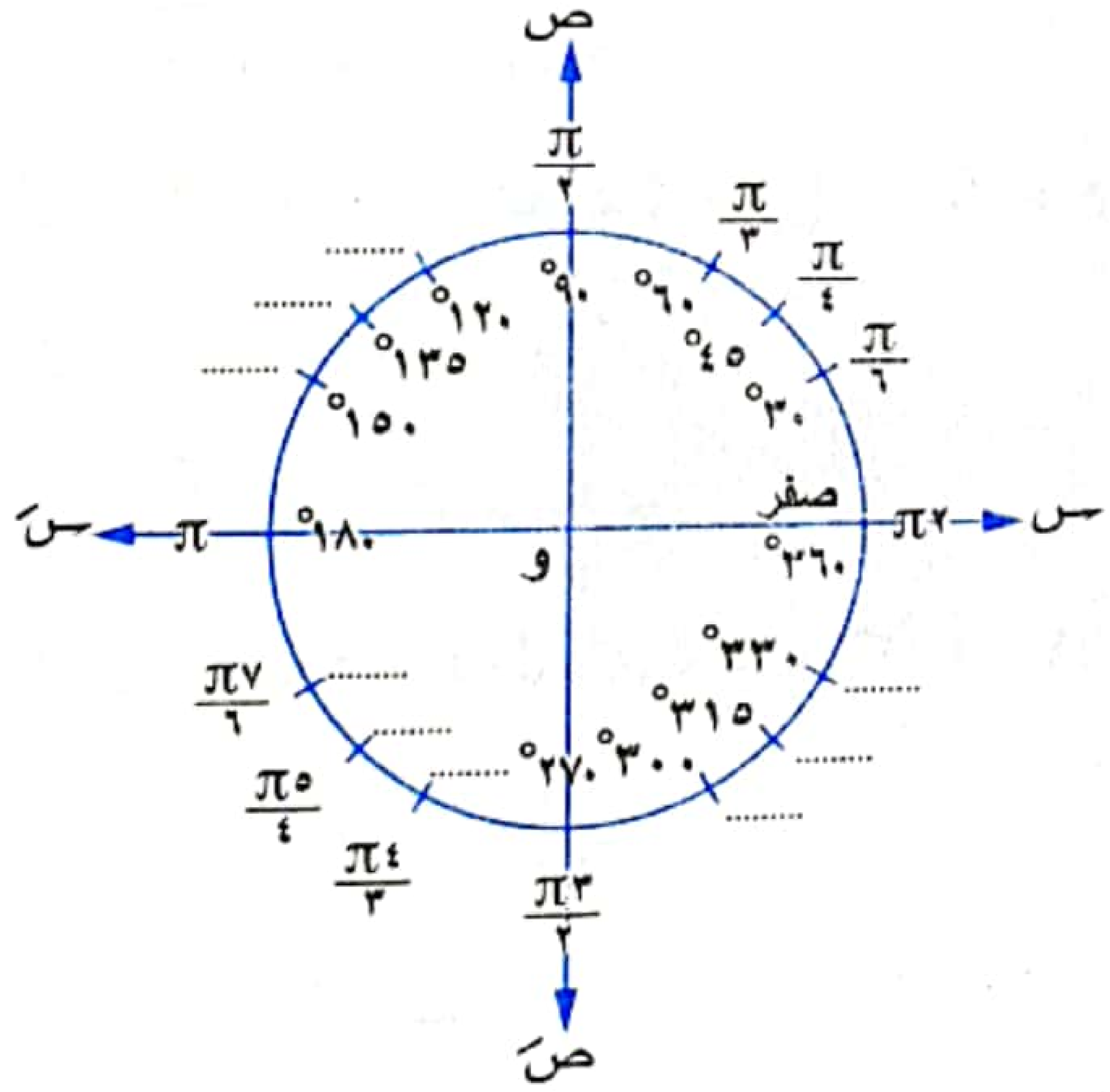
| | | |
|---|---|---|
| (١) ٥٨° | (٢) ٥٦,٦° | (٣) ١٥َ ٣٧° |
| (٤) ٩ً ٣٨َ ١١٥° | (٥) ٥٤ً ٢٥٧° | (٦) ٤٨ً ٥٠َ ١٦٠° |

**٣** أوجد القياس الستينى (بالدرجات والدقائق والثوانى) لكل من الزوايا التى قياساتها الدائرية كالآتى :

| | | |
|---|---|---|
| (١) $\frac{11}{15}$ π | (٢) ٠,٧٢ π | (٣) ٠,٤٩ ء |
| (٤) −١,٦٧ ء | (٥) ٢,٢٧ ء | (٦) −٣ $\frac{1}{2}$ ء |

**٤** الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة بعضها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كُتب بالدرجات (داخل الدائرة).

**اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.**




**٥** أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله (ل) فى دائرة طول نصف قطرها (نق) فى كل من الحالات الآتية :

| | |
|---|---|
| (١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم | (٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم |
| (٣) ل = ٢ π سم ، نق = ٦ سم | (٤) ل = ١٥,٧٢ سم ، نق = ٩,١٧ سم |

**٦** أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

| | |
|---|---|
| (١) θ = $\frac{9}{8}$ π ، ل = ٢٢,٥ سم | (٢) θ = ٠,٧٦٧ ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم |
| (٣) θ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم | (٤) θ = ٢٦ً ٣٦َ ٧٨° ، ل = ٤٣,٩٢ سم |

**٧** **أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :**

(١) نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ ^ء^
(٢) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ ^ء^
(٣) نق = ٧,٥ سم ، θ = ٤٠َ ٦٧°
(٤) نق = ١٥ سم ، θ = ٩ً ٥٨َ ١٠٤°

**٨** **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥ \pi}{٩}$ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية ١٢َ ٤٣° فإن قياسها الدائرى يساوى ..............

(أ) ٠,٢٤ ^ء^ (ب) ٠,٢٤ π (جـ) ٠,٢٨ ^ء^ (د) ٠,٢٨ π

(٥) الزاوية التى قياسها الدائرى $\frac{٨ \pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ..............

(أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٨٠°

(٦) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى ..............

(أ) ٢ π (ب) π (جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ (د) ٣ π

(٧) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى ١٨٠° × (ن - ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧ \pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٥}$ (د) $\frac{٢ \pi}{٣}$

(٨) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .............. سم

(أ) ٥ π (ب) ٤ π (جـ) ٣ π (د) ٢ π

(٩) القوس الذى طوله ٥ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ..............

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(١٠) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥ \pi}{١٢}$

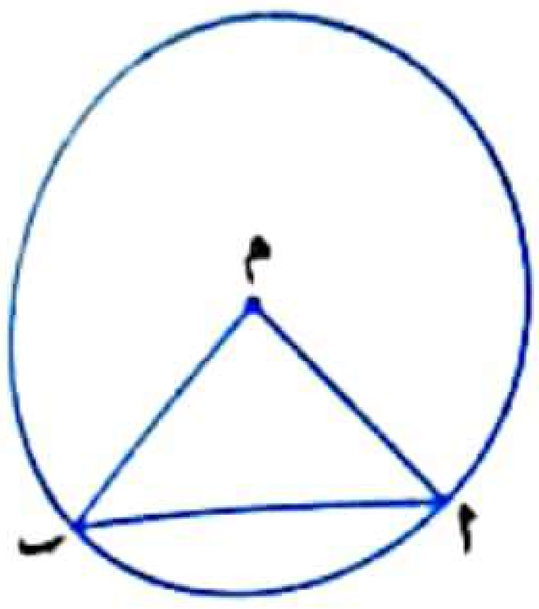
(١١) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{١}{١٠}$ π فإن طول قوسه ≃ .............. سم

(أ) ٤,٦  (ب) ٤,٤  (جـ) ٤,٢  (د) ٤,٨

(١٢) أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإن : ق (∠ حـ) = ..............

(أ) $\frac{π}{٣}$  (ب) $\frac{π}{٦}$  (جـ) $\frac{٢π}{٣}$  (د) $\frac{٥π}{٦}$

(١٣) فى الشكل المقابل :




لإيجاد طول $\overset{\frown}{أ ب}$ يكون كافيًا الحصول على ..............

(أ) Δ أ م ب متساوى الأضلاع محيطه ٣٠ سم فقط.

(ب) محيط الدائرة = ١٠ π سم فقط.

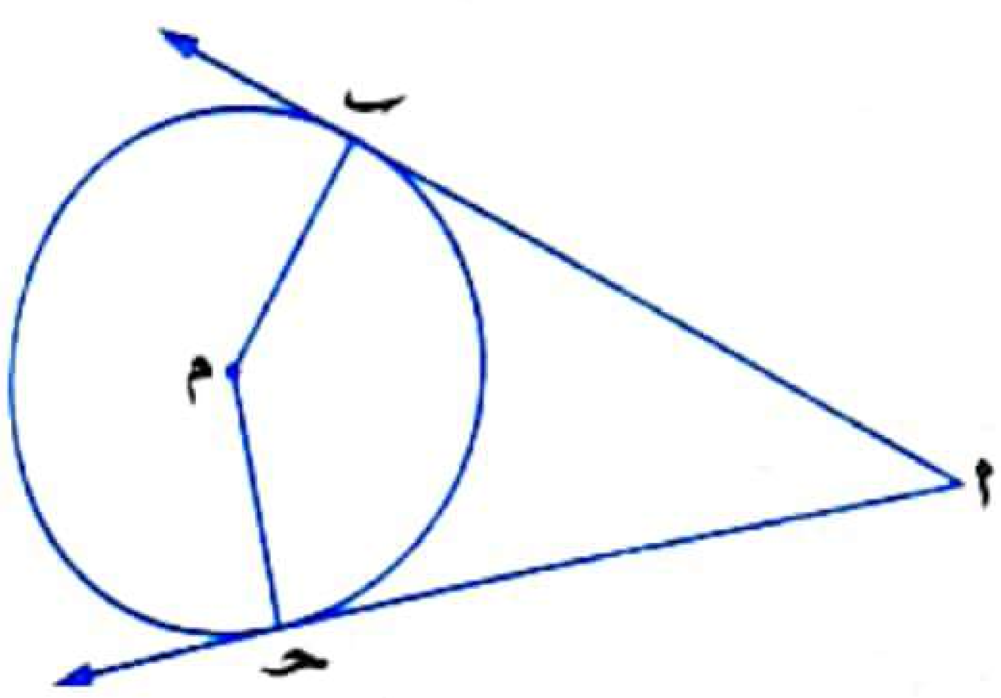
(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(١٤) القياس الدائرى للزاوية الخارجة عن الشكل السباعى المنتظم يساوى ..............

(أ) $\frac{١}{٧}$ π  (ب) $\frac{٢}{٧}$ π  (جـ) $\frac{٣}{٧}$ π  (د) $\frac{٤}{٧}$ π

(١٥) فى الشكل المقابل :




إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مماسين للدائرة م وكان

ق (∠ أ) = $\frac{٥}{١٢}$ π وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{ب حـ}$ = ..............

(أ) ٢٠  (ب) $\frac{٢٨}{π}$  (جـ) ٢٨  (د) ٢٠ π

(١٦) الزاوية التى قياسها ٣٠° + ١٨٠° (٢ ن + ١) حيث ن ∈ ص تكافئ زاوية قياسها الدائرى هو ..............

(أ) $\frac{π}{٦}$  (ب) π  (جـ) $\frac{٧}{٦}$ π  (د) $\frac{٥}{٣}$ π

(١٧) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{٣}{٨}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى يساوى ..............

(أ) ٣٠°  (ب) ٦٧° ٣٠َ  (جـ) ١٣٥°  (د) ٤٣° تقريبًا.

(١٨) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى يساوى ..............

(أ) $\frac{١}{٤}$ طول قوسها.  (ب) $\frac{١}{٢}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها.  (د) ضعف طول قوسها.

**٩** أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

«٤٨ سم»

**١٠** أوجد القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ أمثال طول نصف قطر دائرتها.

«٣ء ، ١٧١° ٥٣َ ٤٦ً»

**١١** إذا كان قياس زاوية مركزية فى دائرة يساوى ١٠٥° وتحصر قوسًا طوله $\frac{٧}{٣}\pi$ سم أوجد طول قطر الدائرة.

«٨ سم»

**١٢** مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$

أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة.

« $\frac{٥}{١٢}\pi$ ، ٧٥° »

**١٣** شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}$ ^ء^ وقياس زاوية أخرى منه $٢\frac{٤}{٩}$ ^ء^ وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥°

أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$

« ٧٠° ، $\frac{١١}{٩}$ ^ء^ »

**١٤** زاويتان مجموع قياسيهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٥}$ أوجد قياسيهما بالتقدير الستينى والدائرى.

« ٥٣° ، ١٧° ، $\frac{٥٣}{١٨٠}\pi$ ، $\frac{١٧}{١٨٠}\pi$ »

**١٥** زاويتان متكاملتان الفرق بين قياسيهما $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسى الزاويتين بالتقديرين الستينى والدائرى.

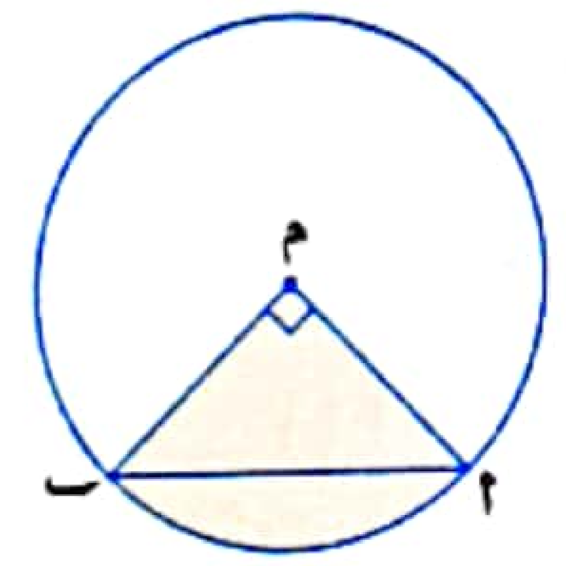
« ١٢٠° ، ٦٠° ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{١}{٣}\pi$ »

**١٦** 📖 فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية

فى م تساوى ٣٢ سم$^٢$

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.




« ٢٨,٥٧ سم »

**١٧** $\overline{\text{س ص}}$ قطر فى الدائرة م طوله ١٨ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث ق (∠ س ص ع) = ١٠°

أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{س ع}}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

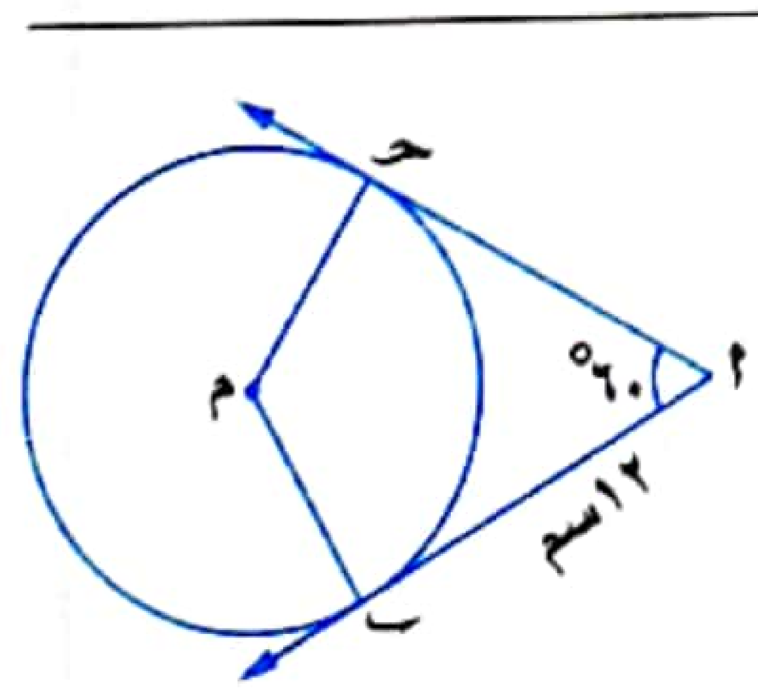
« ٣,١٤ سم »

**١٨** 📖 فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة م

، ق (∠ حـ أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$




« ٢٩ سم »

**١٩** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = ٢٤ سم

، ب حـ = ١٢ سم فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

« ١٢,٦ سم ، ٢٥,١ سم ، ٣٧,٧ سم »

**٢٠** دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم تمر برءوس مثلث أ ب حـ فإذا كان :

ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٤°

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث.

«١٥,٧ سم ، ١٤,١ سم ، ١٧,٣ سم»

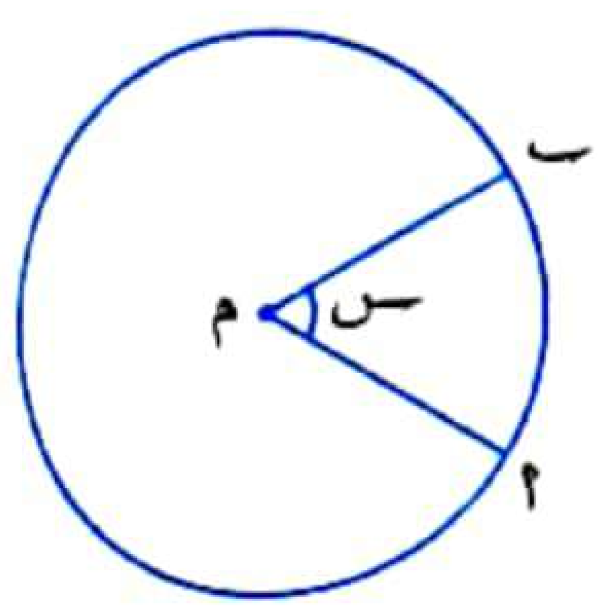
## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٢١** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا قطع القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٧٢° فى دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم وثنى ليكون دائرة فإن طول نصف قطر الدائرة الناتجة يساوى ............ سم

(أ) ١,٤ (ب) ٢,٨ (جـ) ٥,٦ (د) ٧

(٢) فى الشكل المقابل :




دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٠ سم

فإذا كان طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ∈ ]٥ ، ٦[

فإن قيمة س يمكن أن تكون ............

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٨° (د) ٣٤°

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه يساوى ............ ء

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ............

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٥) إذا كان طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٠° فى دائرة يساوى طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٨٠° فى دائرة أخرى فإن النسبة بين طولى نصفى قطرى الدائرتين هى ............

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(٦) أسطوانة تدور ٤٥ دورة فى الدقيقة حول محورها فإن قياس الزاوية التى تدورها نقطة على سطحها الجانبى فى الثانية الواحدة يساوى ............

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\pi$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $٢\pi$

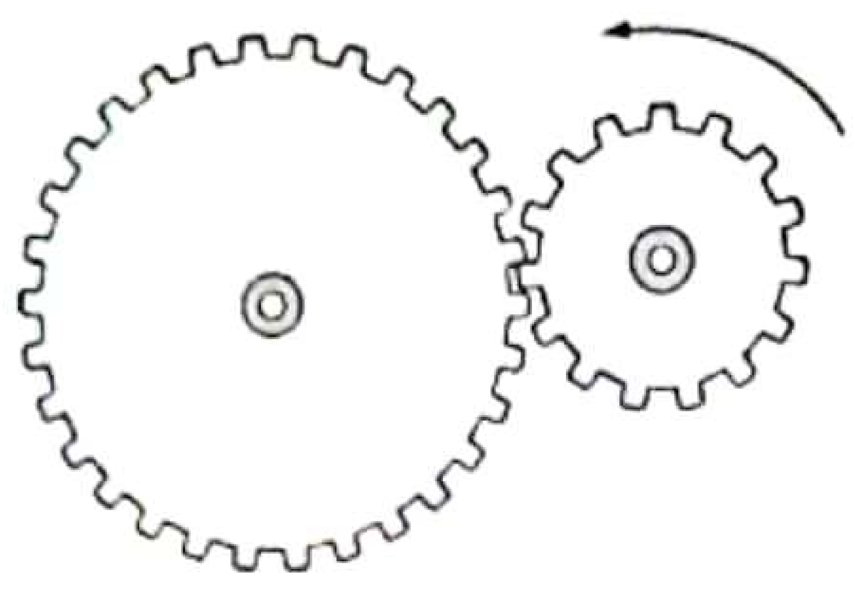
**(٧)** (قياس الدائرة)ء > ن حيث ن عدد صحيح موجب فإن أكبر قيمة لـ ن هى ..............

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

**(٨)** المسافة التى يقطعها رأس عقرب الدقائق الذى طوله ٨ سم من الساعة السادسة صباحًا حتى الساعة الثالثة والربع عصرًا تساوى ............ سم

(أ) ٥٩٢ $\pi$ (ب) ١٤٨ $\pi$ (جـ) $\frac{٣٧}{٢}\pi$ (د) $\frac{٣٧}{٤}\pi$

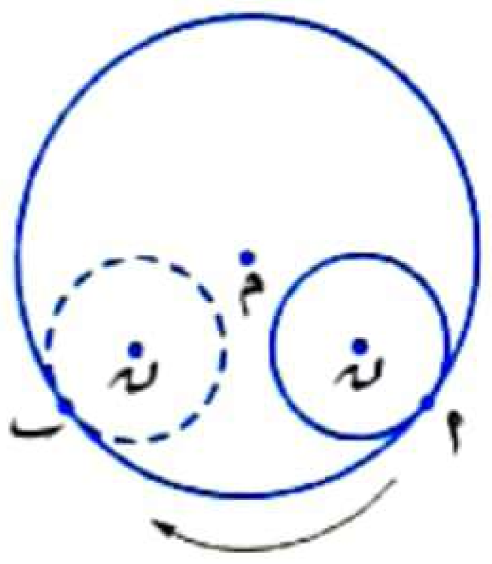
**(٩)** في الشكل المقابل :



إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاث لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة في الاتجاه الموضح بالسهم فإن قياس الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح ............

(أ) $\frac{-\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) ٢ $\pi$

**(١٠)** في الشكل المقابل :

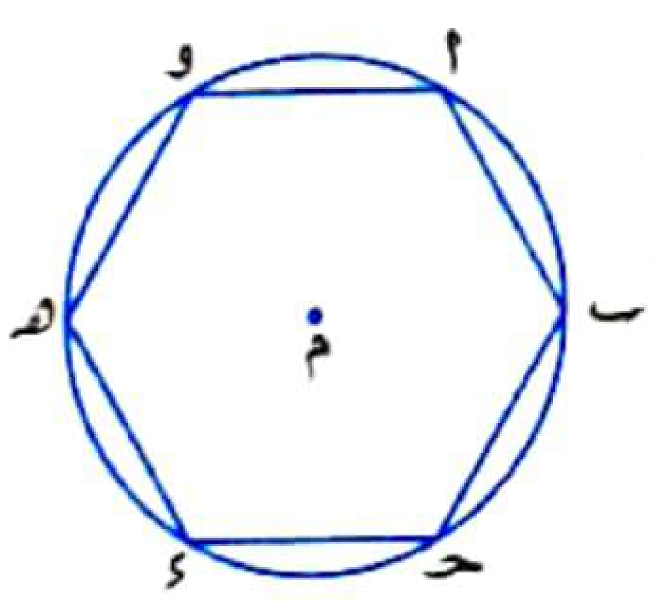



دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٢١ سم ، ٧ سم على الترتيب إذا دارت الدائرة ن دورة كاملة من نقطة أ إلى نقطة ب

فإن : ق (∠ أ م ب) = ............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٥}$ (د) $\pi$

**(١١)** في الشكل المقابل :




أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم مرسوم داخل دائرة م فإن طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = ............ سم

(أ) $\pi$ (ب) $\frac{٤}{٣}\pi$

(جـ) ٢ $\pi$ (د) $\frac{٥}{٣}\pi$

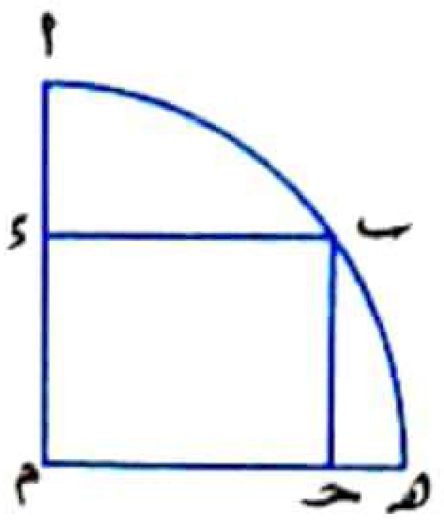
---

**٢٢** مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ في الوضع القياسى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

«ص = $\sqrt{٣}$ س»

---

**٢٣** في الشكل المقابل :




ربع دائرة ، رسم بداخله المستطيل ب جـ م ء

بحيث جـ ء = ١٠ سم

**أوجد :** طول القوس $\overset{\frown}{أ ب هـ}$

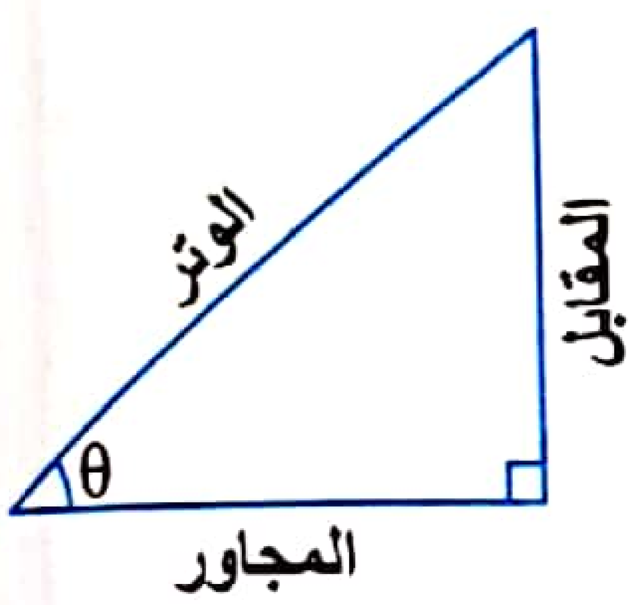
«٥ $\pi$ سم»



# الدرس 3 الدوال المثلثية

* درسنا فيما سبق النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة وعلمنا أنه :

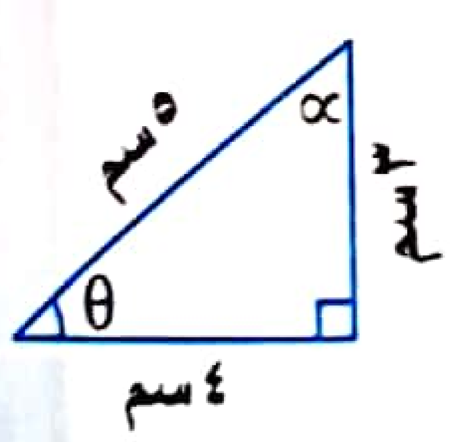
• فى أى مثلث قائم الزاوية يكون :




حا $\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، حتا $\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

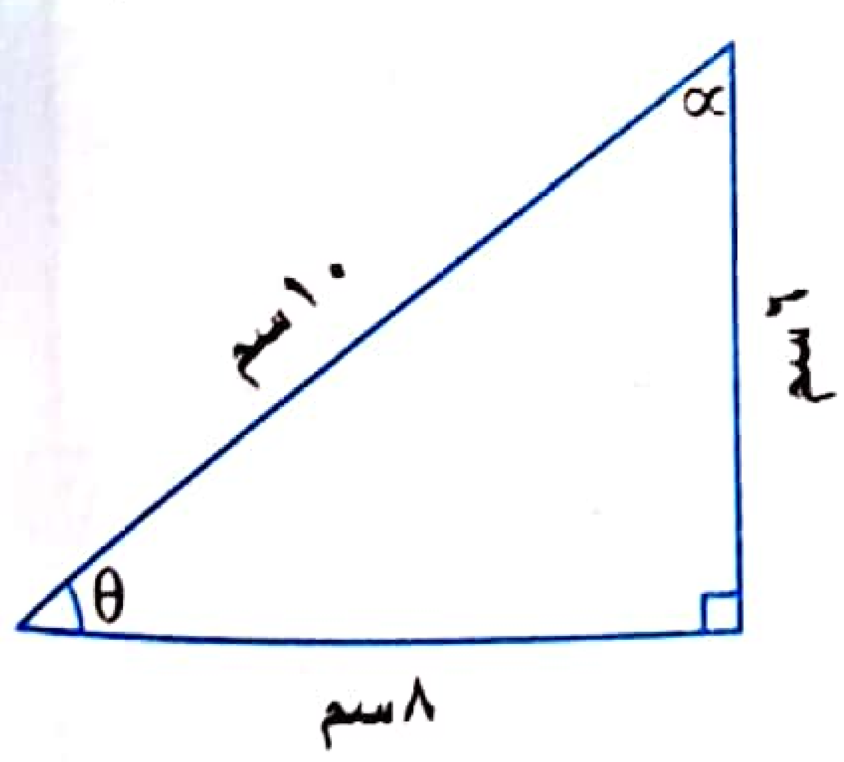
، طا $\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

• ففى الشكل المقابل :




| | | |
|---|---|---|
| حا $\theta = \frac{٣}{٥}$ | حتا $\theta = \frac{٤}{٥}$ | طا $\theta = \frac{٣}{٤}$ |
| حا $\propto = \frac{٤}{٥}$ | حتا $\propto = \frac{٣}{٥}$ | طا $\propto = \frac{٤}{٣}$ |

• وإذا رسمنا مثلثًا آخر مشابهًا للمثلث السابق نجد أن :




| | | |
|---|---|---|
| حا $\theta = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ | حتا $\theta = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ | طا $\theta = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ |
| حا $\propto = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ | حتا $\propto = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ | طا $\propto = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ |

**مما سبق نستنتج أن :**

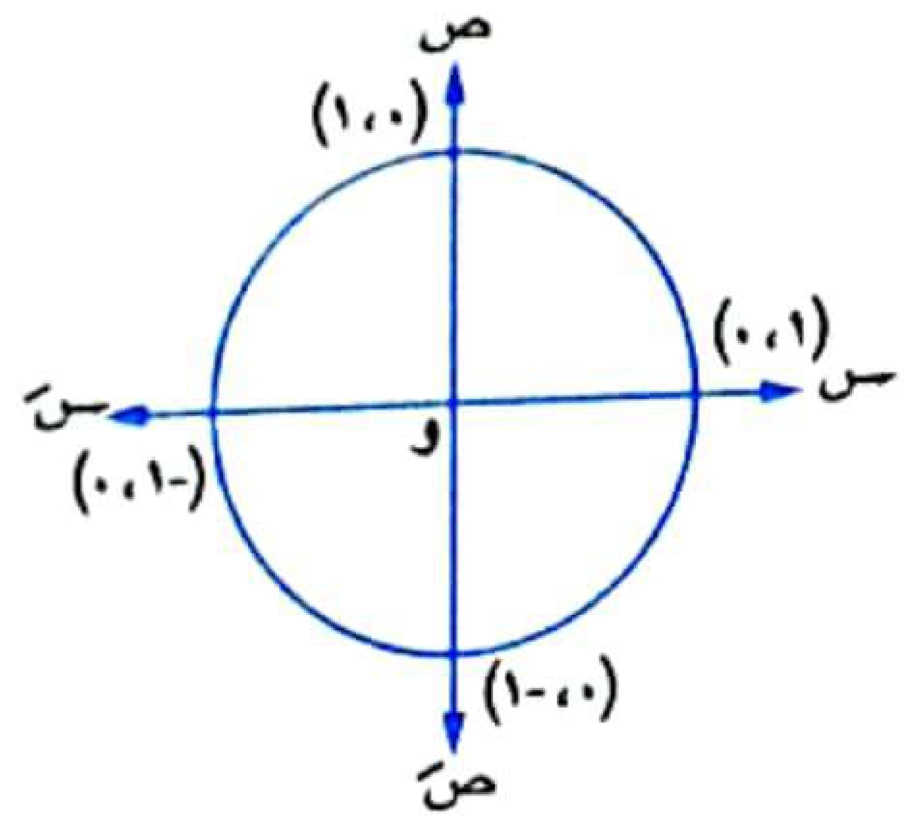
١ حا $\theta$ ، حتا $\theta$ ، طا $\theta$ فى المثلثين متساويين.

**أى أن** النسبة المثلثية للزاوية ثابتة لا تتوقف على مساحة المثلث.

٢ حا $\theta \neq$ حا $\propto$ ، حتا $\theta \neq$ حتا $\propto$ ، طا $\theta \neq$ طا $\propto$ فى أى من المثلثين.

**أى أن** النسبة المثلثية تتغير بتغير قياس الزاوية وهذا ما يُعرف بـ «الدوال المثلثية».

## دائرة الوحدة



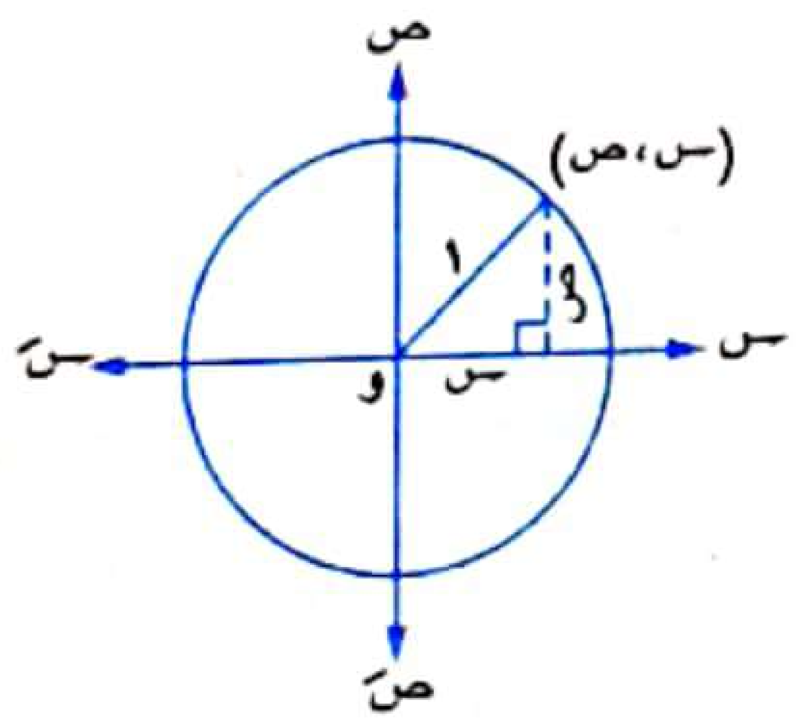

فى النظام الإحداثى المتعامد الدائرة التى مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها وحدة الأطوال تُسمى **دائرة الوحدة**.

**ولاحظ من الشكل المقابل أن :**

- دائرة الوحدة تقطع محور السينات فى نقطتين هما : (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠)
- دائرة الوحدة تقطع محور الصادات فى نقطتين هما : (٠ ، ١) ، (٠ ، -١)

### ملاحظة

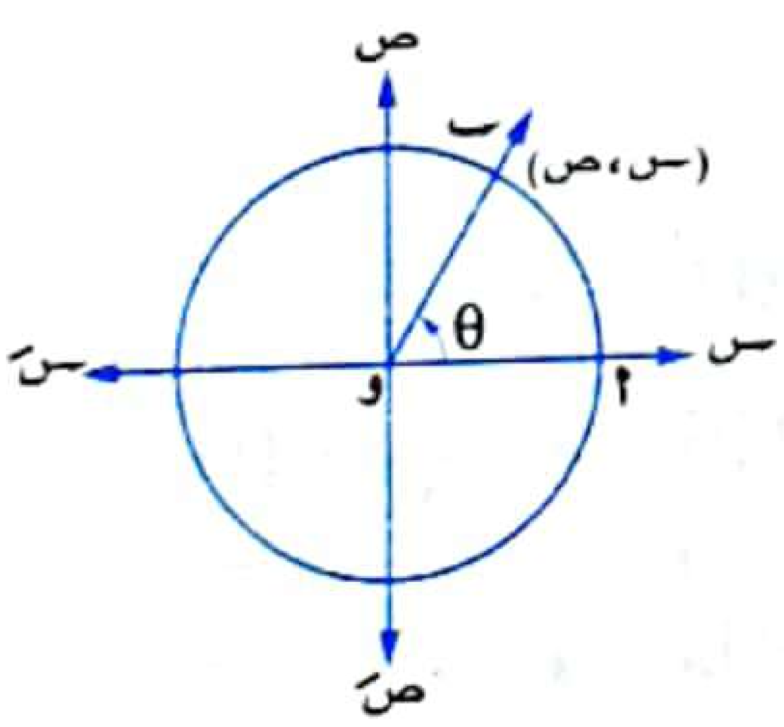
إذا كانت النقطة (س ، ص) ∈ دائرة الوحدة فإن :




$س^٢ + ص^٢ = ١$ من نظرية فيثاغورث

، س ∈ [-١ ، ١] ، ص ∈ [-١ ، ١]

## الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها




إذا رسمنا الزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى وقطع ضلعها النهائى و ب دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) ، وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :

## أولاً الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

١ جيب تمام الزاوية = الإحداثى السينى لنقطة ب **أى أن** جتا θ = س

٢ جيب الزاوية = الإحداثى الصادى لنقطة ب **أى أن** جا θ = ص

٣ ظل الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى الصادى لنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى لنقطة ب}}$ **أى أن** ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{جا θ}{جتا θ}$ حيث س ≠ ٠

### لاحظ أنه

يمكن كتابة النقطة ب (س ، ص) على الصورة (جتا θ ، جا θ)

## ثانيًا مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

١ قاطع الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث س ≠ ٠

٢ قاطع تمام الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

٣ ظل تمام الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

### مثال ١

**أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة أ فى كل مما يأتى :**

١ أ $\left(\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥}\right)$

٢ أ (−١ ، ٠)

٣ أ $\left(\frac{-١}{٢}، \text{ص}\right)$ حيث ص > ٠

٤ أ (−س ، س) حيث س > ٠

### الحل

١ $\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٤}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{٤}{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٣}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٥}{٤}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

٢ $\text{جتا}\,\theta = -١$ ، $\text{جا}\,\theta = ٠$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٠}{-١} = ٠$

، $\text{قا}\,\theta = -١$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{٠}$ (غير معرف) ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

٣ ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $\left(\frac{-١}{٢}\right)^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $\text{ص}^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\text{ص} = \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ∵ ص > ٠ ∴ $\text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ أ $\left(\frac{-١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{-١}{٢} = -\sqrt{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = -٢$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

٤ ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ $(-\text{س})^٢ + \text{س}^٢ = ١$ ∴ $٢\text{س}^٢ = ١$ ∴ $\text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{س} = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ∵ س > ٠ ∴ $\text{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ أ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١$

، $\text{قا}\,\theta = -\sqrt{٢}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \sqrt{٢}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = -١$

## حاول بنفسك

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى ، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب إذا كان :

[١] ب $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ [٢] ب (٠ ، س) ، س < ٠ [٣] ب (– ص ، – ص) ، ص < ٠

## ملاحظة

**الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية.**

**أى أنه** لجميع قيم ن ∈ ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) يكون :

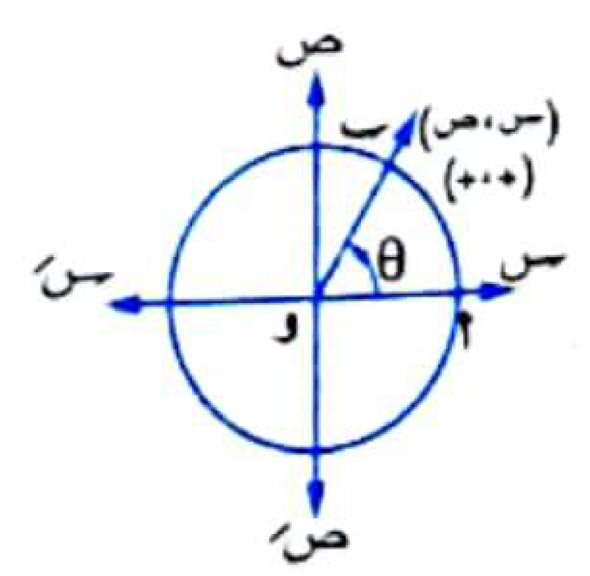
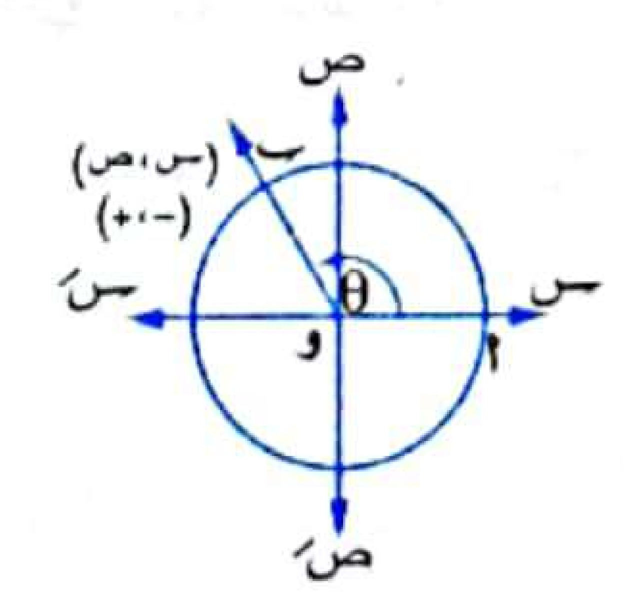
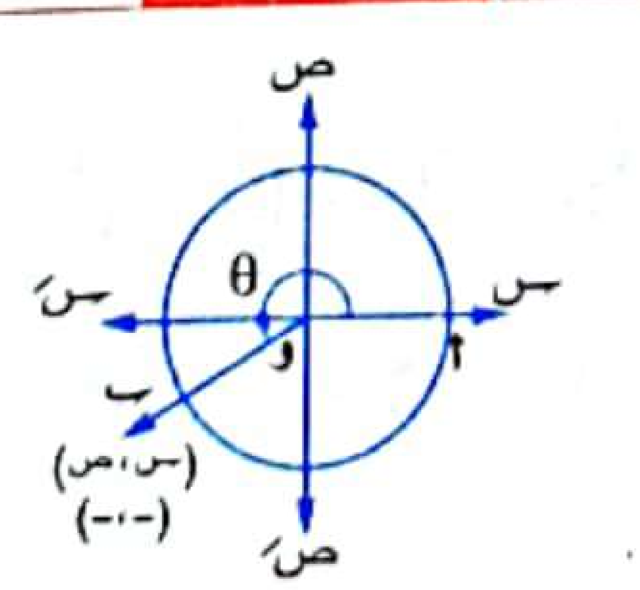
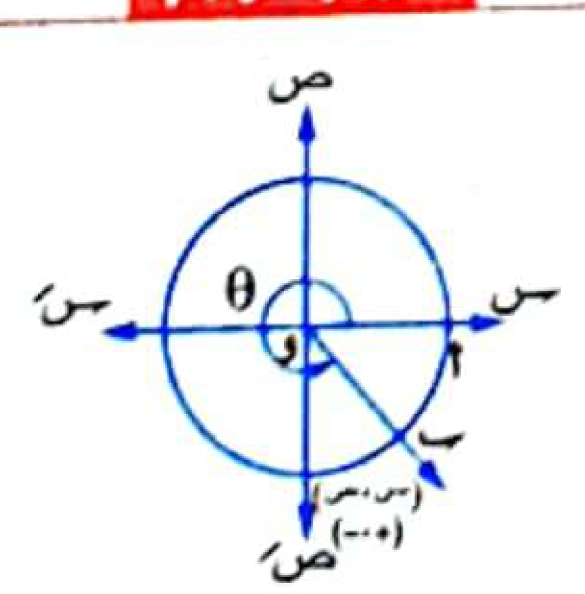
- جتا (θ + ٢ ن π) = جتا θ = س ، قا (θ + ٢ ن π) = قا θ = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ .
- جا (θ + ٢ ن π) = جا θ = ص ، قتا (θ + ٢ ن π) = قتا θ = $\frac{١}{ص}$ حيث ص ≠ ٠ .
- ظا (θ + ٢ ن π) = ظا θ = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، ظتا (θ + ٢ ن π) = ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ حيث ص ≠ ٠ .

**فمثلاً**
- جتا ٤٢٠° = جتا (٦٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠°
- قا ٨٤٠° = قا (١٢٠° + ٢ × ٣٦٠°) = قا ١٢٠°
- ظا (–١٥٠٠°) = ظا (٣٠٠° – ٥ × ٣٦٠°) = ظا ٣٠٠°

## إشارات الدوال المثلثية

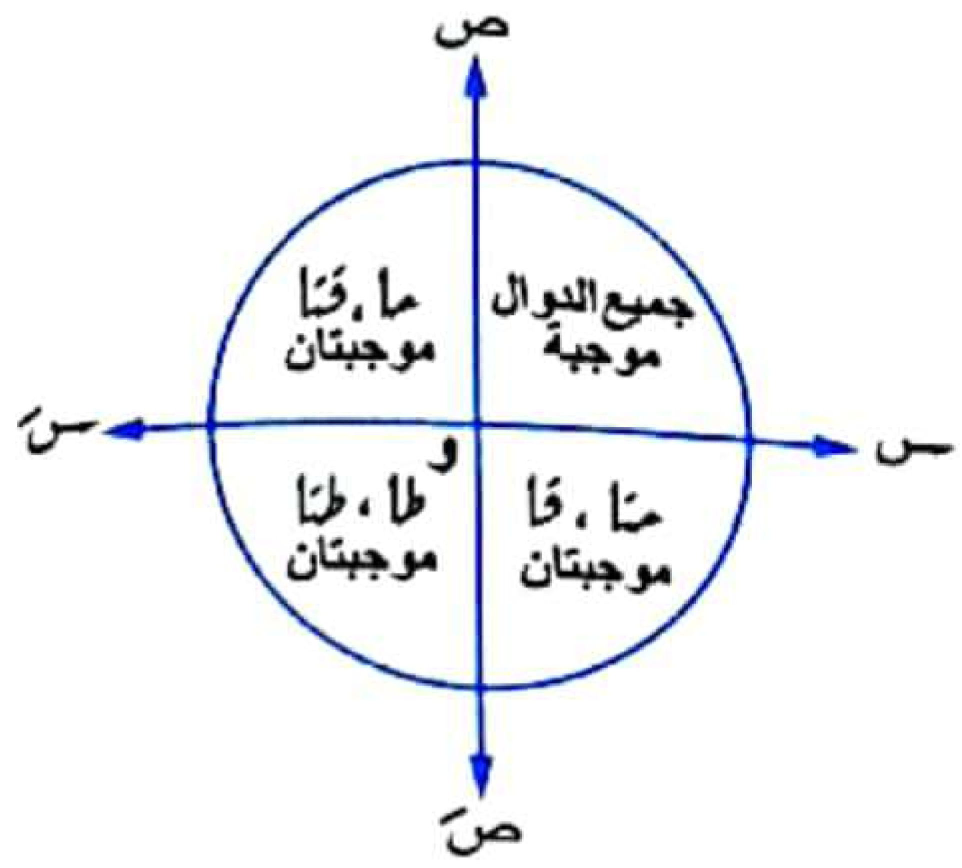
إذا كانت : ∠ أ و ب الموجهة فى وضعها القياسى ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :

∠ أ و ب تقع فى أحد الأرباع كما يلى

| الربع الأول | الربع الثانى | الربع الثالث | الربع الرابع |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ | θ ∈ ]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[ | θ ∈ ]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[ | θ ∈ ]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[ |
| س > ٠ ، ص > ٠ | س < ٠ ، ص > ٠ | س < ٠ ، ص < ٠ | س > ٠ ، ص < ٠ |
| جميع الدوال المثلثية موجبة. | جا θ ، قتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة. | ظا θ ، ظتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة. | جتا θ ، قا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة. |

• ونلخص ما سبق في الجدول والشكل الآتيين :

| الربع | الفترة التي تنتمي إليها θ | إشارة جا ، قا | إشارة جا ، قتا | إشارة طا ، ظتا |
|---|---|---|---|---|
| الأول | $]\cdot \text{، } \frac{\pi}{٢}[$ | + | + | + |
| الثاني | $]\frac{\pi}{٢} \text{، } \pi[$ | − | + | − |
| الثالث | $]\pi \text{، } \frac{٣\pi}{٢}[$ | − | − | + |
| الرابع | $]\frac{٣\pi}{٢} \text{، } ٢\pi[$ | + | − | − |




**فمثلًا** • طا ٣٢٠° تكون سالبة لأن :

الزاوية التي قياسها ٣٢٠° تقع في الربع الرابع ⟵ ٢٧٠° < ٣٢٠° < ٣٦٠°

• جا ١٦٠° تكون موجبة لأن :

الزاوية التي قياسها ١٦٠° تقع في الربع الثاني ⟵ ٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠°

**ملاحظة**

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

**مثال ٢**

ابحث إشارة كل من النسب المثلثية الآتية :

١ جا ٩٧٠° ٢ جتا $\frac{٧\pi}{٣}$ ٣ طا (−٢٠٠٠°) ٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$

**الحل**

١ جا ٩٧٠° = جا (٢٥٠° + ٢ × ٣٦٠°) = جا ٢٥٠° ، ∵ ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° أي تقع في الربع الثالث.

∴ جا ٢٥٠° سالبة.

∴ جا ٩٧٠° سالبة.

٢ جتا $\frac{٧}{٣}\pi$ = جتا $(\frac{٧}{٣} \times ١٨٠°)$ = جتا ٤٢٠° = جتا (٦٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠°

، ∵ ٠° < ٦٠° < ٩٠° أي تقع في الربع الأول.

∴ جتا ٦٠° موجبة.

∴ جتا $\frac{٧}{٣}\pi$ موجبة.

٣ طا (−٢٠٠٠°) = طا (−٢٠٠٠° + ٣٦٠°) = طا ١٦٠° ، ∵ ٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠° أي تقع في الربع الثاني.

∴ طا ١٦٠° سالبة.

∴ طا (−٢٠٠٠°) سالبة.

٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ = قتا $(-\frac{٨}{٥} \times ١٨٠°)$ = قتا (−٢٨٨°) = قتا (−٢٨٨° + ٣٦٠°) = قتا ٧٢°

، ∵ ٠° < ٧٢° < ٩٠° أي تقع في الربع الأول.

∴ قتا ٧٢° موجبة.

∴ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ موجبة.

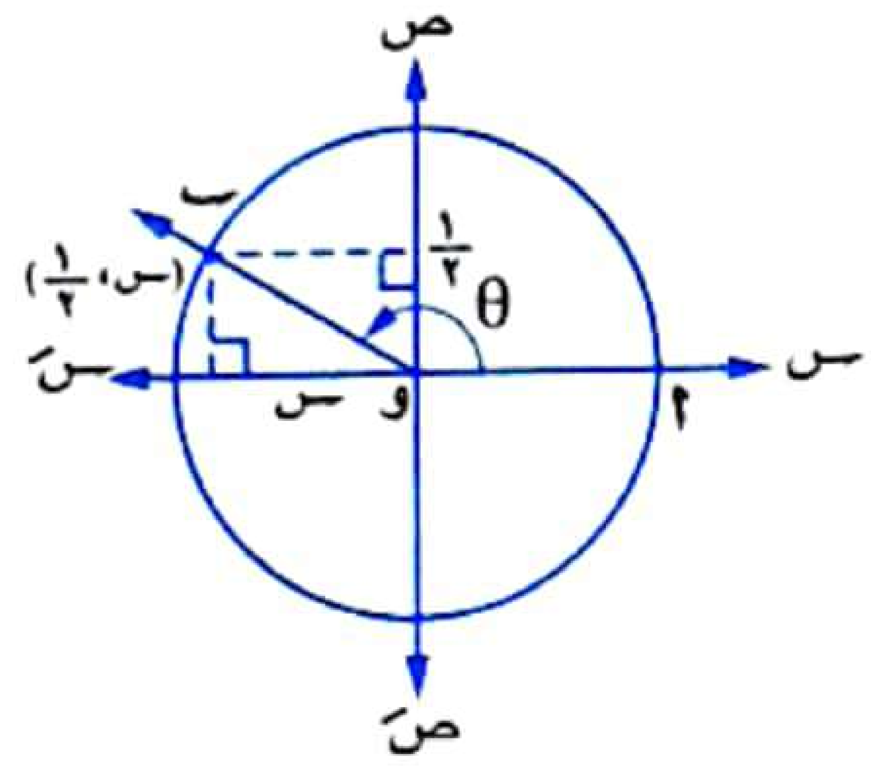
**حاول بنفسك**

عيّن إشارة كل من النسب المثلثية الآتية : ١ جا ٦٢٠° ٢ قا (−٣٠٠°) ٣ ظا $\frac{١١}{٣}\pi$

**مثال ٣**

إذا كانت ب $\left(س ، \frac{١}{٢}\right)$ نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° **فأوجد قيمة كل من** : جتا θ ، ظا θ

**الحل**




∵ ٩٠° < θ < ١٨٠° ∴ ب تقع فى الربع الثانى.

، ∵ لأى نقطة (س ، ص) على دائرة الوحدة يكون $س^٢ + ص^٢ = ١$

∴ $س^٢ + \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $س = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ النقطة ب $\left(س ، \frac{١}{٢}\right)$ فى الربع الثانى. ∴ س سالبة.

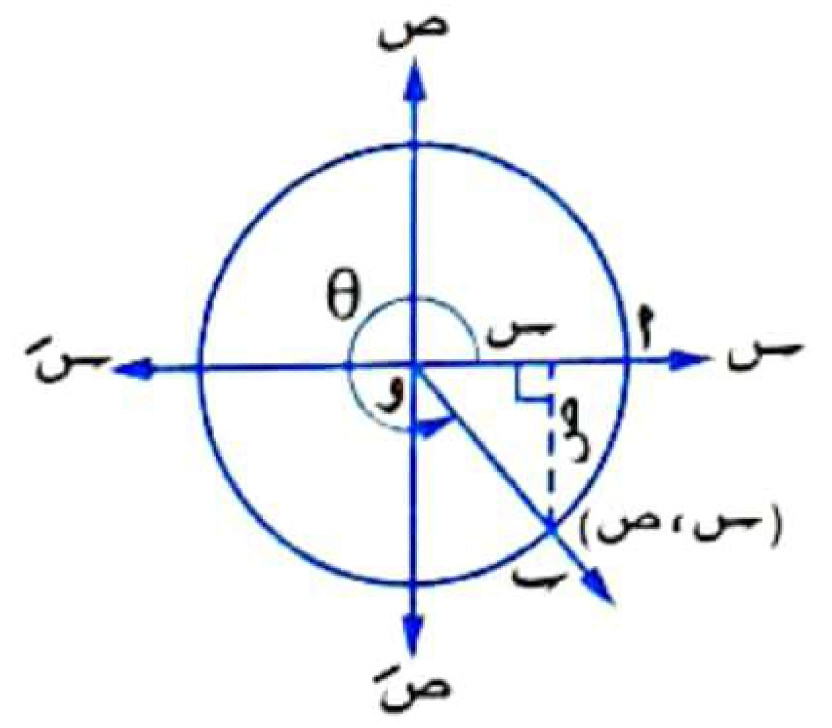
∴ $س = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ب $= \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ جتا θ $= \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا θ $= \frac{ص}{س} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

**مثال ٤**

إذا كانت : θ ∈ $\left]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi\right[$ وكانت : جتا θ $= \frac{٥}{١٣}$ **فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ**

**الحل**




نفرض أن ق (∠ ا و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن نقطة ب هى (س ، ص)

∴ س = جتا θ $= \frac{٥}{١٣}$ ، ص = جا θ حيث جا θ < ٠

، ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $\left(\frac{٥}{١٣}\right)^٢ +$ جا$^٢$ θ $= ١$

∴ جا$^٢$ θ $= ١ - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ جا θ $= -\frac{١٢}{١٣}$ ∴ ب $= \left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

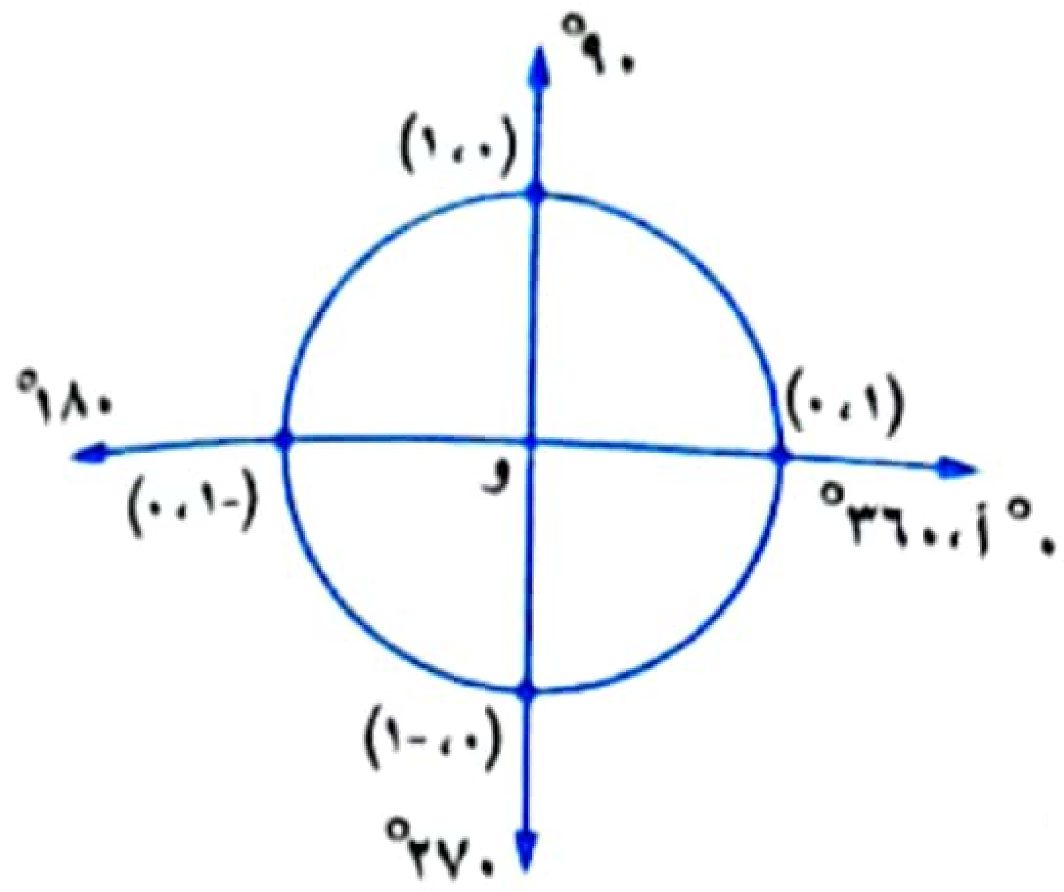
ويكون : ظا θ $= -\frac{١٢}{٥}$ ، قا θ $= \frac{١٣}{٥}$ ، قتا θ $= -\frac{١٣}{١٢}$ ، ظتا θ $= -\frac{٥}{١٢}$

**حاول بنفسك**

إذا كانت : ١٨٠° < θ < ٢٧٠° وكانت : جتا θ $= \frac{-٤}{٥}$ **فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ**

## النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

### أولاً الزوايا الربعية (٠° أو ٣٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠°)

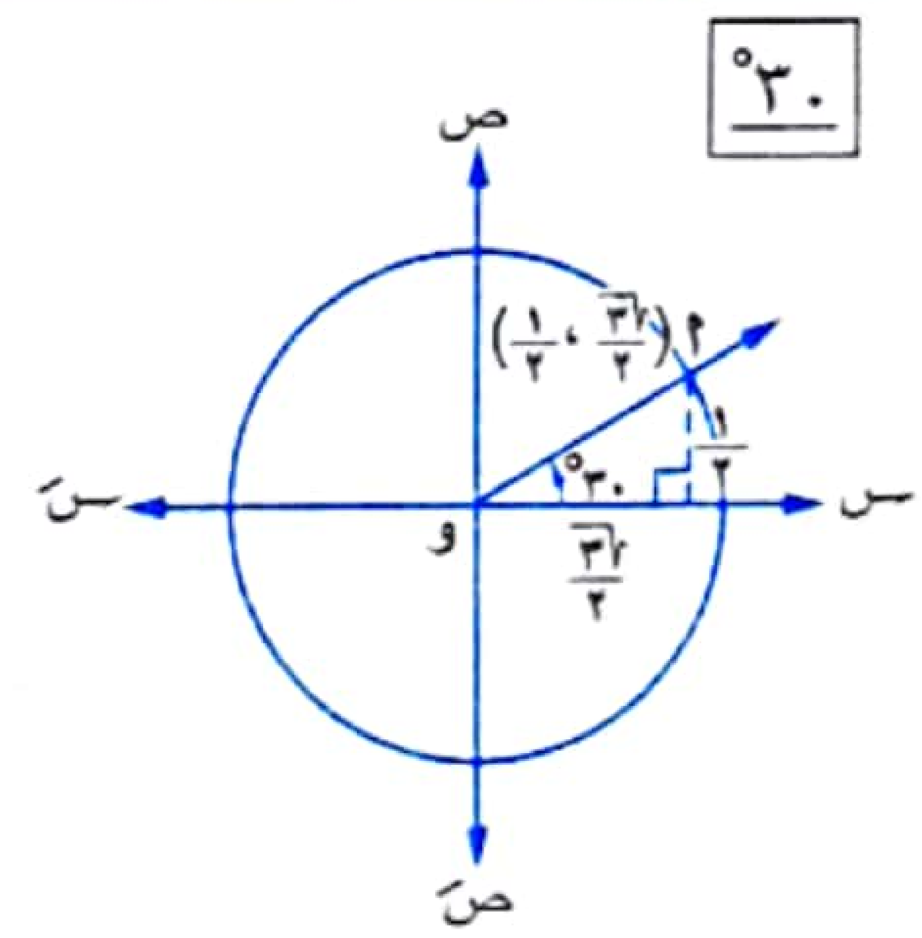


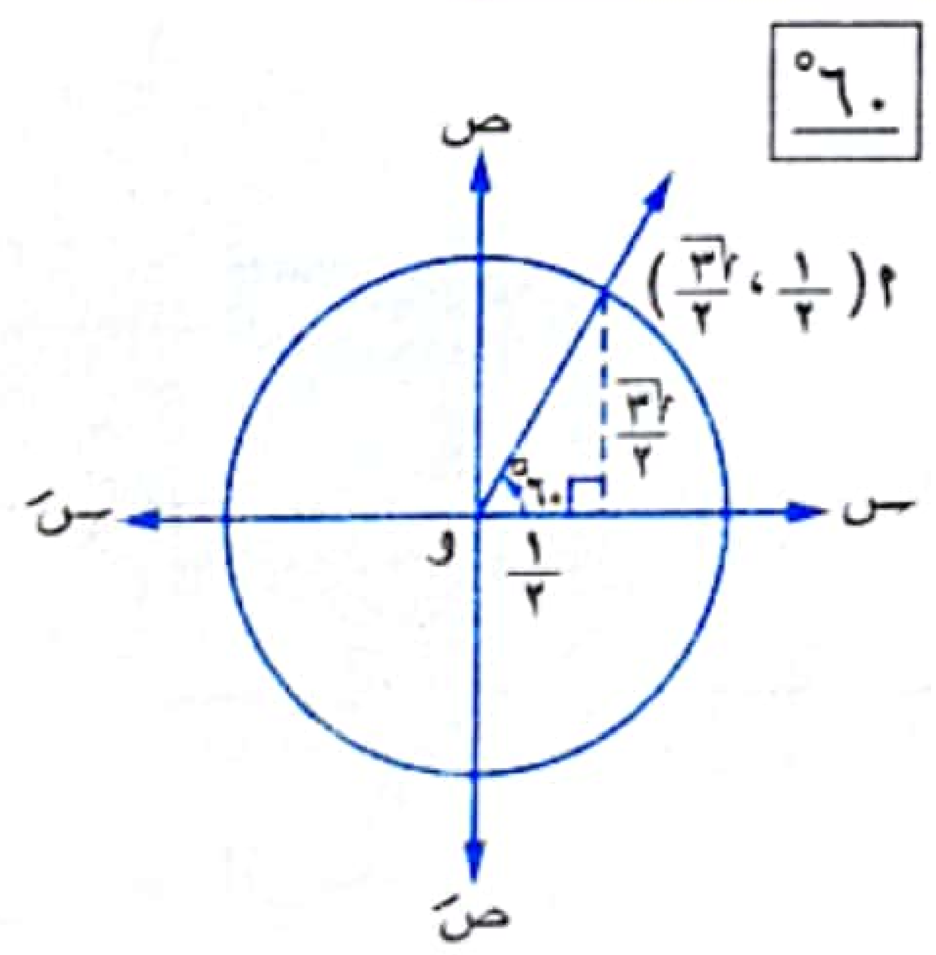

الشكل المقابل يوضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا الربعية مع دائرة الوحدة ومنه يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا

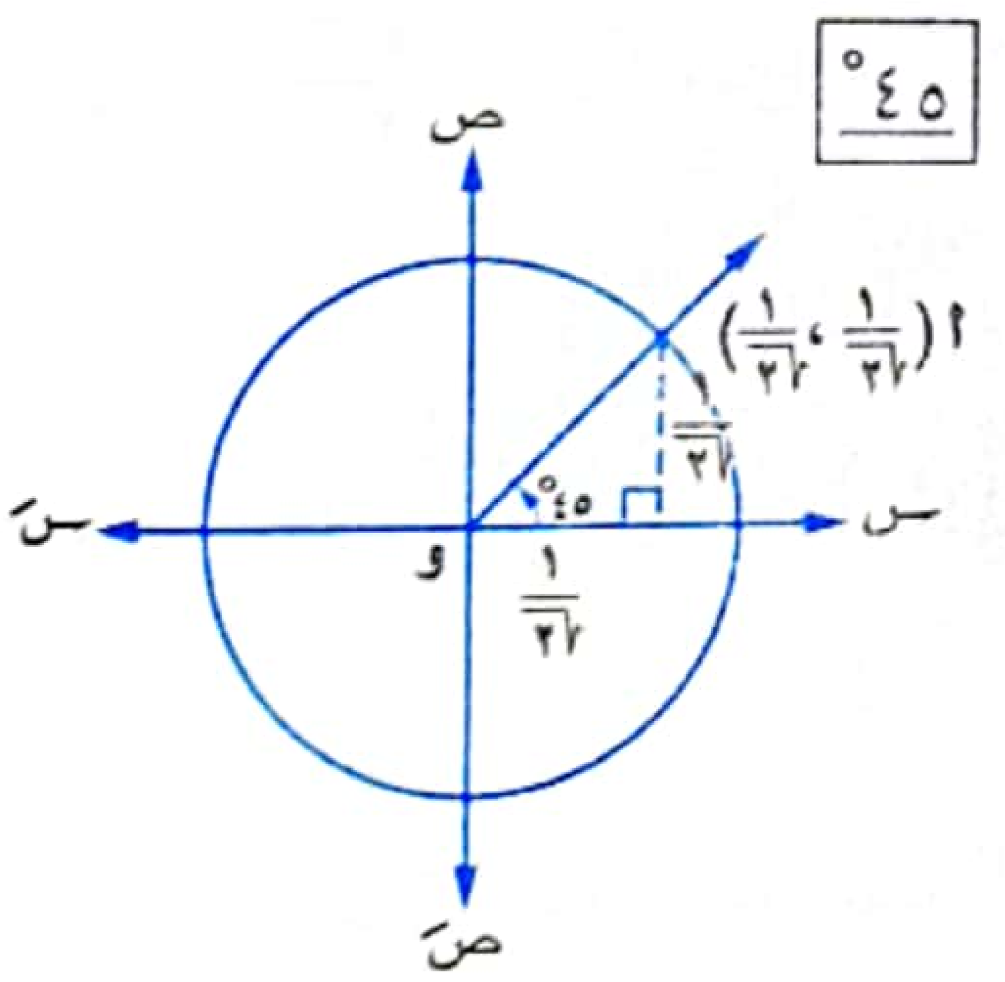
**كما هو موضح بالجدول التالى :**

| θ بالقياس الستينى | θ بالقياس الدائرى | جا θ | جتا θ | ظا θ | قتا θ | قا θ | ظتا θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠° أ، ٣٦٠° | ٠ أ، ٢π | ٠ | ١ | ٠ | غير معرف | ١ | غير معرف |
| ٩٠° | $\frac{\pi}{٢}$ | ١ | ٠ | غير معرف | ١ | غير معرف | ٠ |
| ١٨٠° | π | ٠ | ١− | ٠ | غير معرف | ١− | غير معرف |
| ٢٧٠° | $\frac{٣\pi}{٢}$ | ١− | ٠ | غير معرف | ١− | غير معرف | ٠ |

### ثانيًا الزوايا التى قياساتها (٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°)




الأشكال السابقة توضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا التى قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة ومنها يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا **كما هو موضح بالجدول التالى :**

| θ بالقياس الستينى | θ بالقياس الدائرى | جا θ | جتا θ | ظا θ | قتا θ | قا θ | ظتا θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٠° | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ٢ | $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ | $\sqrt{٣}$ |
| ٦٠° | $\frac{\pi}{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ | $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ | ٢ | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ |
| ٤٥° | $\frac{\pi}{٤}$ | $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | ١ | $\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٢}$ | ١ |

## مثال ٥

**أوجد قيمة :**

٤ حا ٣٠° حا ٩٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + ٥ طا ٤٥° + ١٠ $حتا^{٢}$ ٤٥° حا ٢٧٠° − طا ٣٠° حا ١٨٠°

### الحل

المقدار = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١ − ١ × ٢ + ٥ × ١ + ١٠ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × (−١) − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × صفر

= ٢ − ٢ + ٥ − ٥ − صفر = صفر

## مثال ٦

**أثبت أن :** $حا^{٢}$ ٦٠° + $حا^{٢}$ ٤٥° + $حا^{٢}$ ٣٠° = $حتا^{٢}$ $\frac{\pi}{٦}$ حا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ $طا^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ حتا π + $حتا^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ حا $\frac{٣\pi}{٢}$

### الحل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = $حتا^{٢}$ ٣٠° حا ٩٠° − $\frac{١}{٣}$ $طا^{٢}$ ٦٠° حتا ١٨٠° + $حتا^{٢}$ ٦٠° حا ٢٧٠°

= $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ١ − $\frac{١}{٣}$ × $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ × (−١) + $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ × (−١)

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الطرفان متساويان.

## مثال ٧

**أوجد قيمة س التي تحقق :** س حا $\frac{\pi}{٦}$ $حتا^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ = $حتا^{٢}$ ٣٠° حا $\frac{\pi}{٢}$

### الحل

∵ س حا ٣٠° $حتا^{٢}$ ٤٥° = $حتا^{٢}$ ٣٠° حا ٩٠°

∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ١

∴ $\frac{١}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣

## مثال ٨

إذا كانت : $٠° < س < ٩٠°$ فأوجد قيمة س التي تحقق :

$$\text{جا س قا}^2 ٤٥° = \text{طا}^2 ٦٠° - ٢ \text{ جتا } ٣٦٠°$$

## الحل

∵ $\text{جا س قا}^2 ٤٥° = \text{طا}^2 ٦٠° - ٢ \text{ جتا } ٣٦٠°$

∴ $\text{جا س} \times \left(\sqrt{٢}\right)^2 = \left(\sqrt{٣}\right)^2 - ٢ \times ١$

∴ $٢ \times \text{جا س} = ٣ - ٢ = ١$

∴ $\text{جا س} = \frac{١}{٢}$

∴ $س = ٣٠°$

## حاول بنفسك

١ أوجد قيمة : $\text{جتا } ٩٠° \text{ قتا } ٣٠° + \text{قا}^2 ٤٥° \text{ جا } ٣٠° - \text{جتا } ٢٧٠° \text{ جا } ١٨٠°$

٢ إذا كانت : $٠° \leq س \leq ٩٠°$

فأوجد قيمة س التي تحقق أن : $\text{جتا س} = \text{جا } ٣٠° \text{ جتا } ٦٠° + \text{جتا } ٣٠° \text{ جا } ٦٠°$

تمارين 9

# على الدوال المثلثية

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ فإن : حا θ = ..............

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(٢) إذا كان : حا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ..............

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °٤٥ (د) °٩٠

(٣) 📖 إذا كان : حا θ = −١ ، حتا θ = ٠ فإن : θ = ..............

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (جـ) $\frac{3\pi}{2}$ (د) ٢ π

(٤) 📖 إذا كانت : قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ..............

(أ) °١٥ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

(٥) إذا كان : ظا θ = ١ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ..............

(أ) °٦٠ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٩٠

(٦) 📖 إذا كان : حتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : حا θ = ..............

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٧) ظتا$^2$ °٣٠ − قا$^2$ °٦٠ + قتا$^2$ °٤٥ = ..............

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(٨) إذا كان : حا θ = $\frac{-1}{2}$ ، حتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن الزاوية التى قياسها θ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٩) حا $\left(-\frac{12}{5}\pi\right)$ = ..............

(أ) حا $\frac{12}{5}\pi$ (ب) حا °٧٢ (جـ) حا °٢٨٨ (د) حا $\frac{1}{5}\pi$

(١٠) حا °٠ + حتا °٠ + ظا °٠ = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١١) ٢ حا °٤٥ = ..............

(أ) حا °٩٠ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) ٢

(١٢) إذا كان : حتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، حا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : $\theta$ = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١١\pi}{٦}$

(١٣) إذا كان الضلع النهائى لزاوية فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى نقطة أ فى الربع الرابع حيث الإحداثى السينى للنقطة أ يساوى $\frac{٥}{١٣}$ فإن : أ = ..............

(أ) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١}{١٣}\right)$ (جـ) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (د) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-٨}{١٣}\right)$

(١٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ)

فإن : قا أ + قتا حـ = ..............

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

**٢** ابحث إشارات النسب المثلثية الآتية :

(١) حتا ٣٥٠° (٢) طا ١٠٠° (٣) قا ٢٦٥° (٤) حا $\frac{٥\pi}{٤}$

(٥) قتا $\frac{٣\pi}{٧}$ (٦) ظتا $\frac{٣\pi}{٤}$ (٧) طا ٤١٠° (٨) قتا ١٢٠٠°

(٩) حتا (−١٦٥°) (١٠) ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ (١١) ظتا $\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)$ (١٢) قا $\left(-\frac{٢٥\pi}{٦}\right)$

---

**٣** أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها $\theta$ مرسومة فى الوضع القياسى ، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة :

(١) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$ (٢) $\left(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$ (٣) (٠ ، −١)

---

**٤** إذا كان $\theta$ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية $\theta$ فى كل من الحالات الآتية :

(١) ب (٠,٦ ، ص) ، ص > ٠

(٢) ب (س ، −٠,٦) ، س > ٠

(٣) ب $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ص\right)$ حيث ٩٠° > $\theta$ > ١٨٠°

(٤) ب $\left(س ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$ ، س > ٠

(٥) ب (−١ ، ص)

(٦) ب (−س ، س) ، س > ٠

(٧) ب (−س ، −س) ، س > ٠

(٨) ب (٩ أ ، ١٢ أ) حيث ١٨٠° > $\theta$ > ٢٧٠°

(٩) ب $\left(\frac{٣}{٢} أ ، −٢ أ\right)$ حيث $\frac{٣\pi}{٢} > \theta > ٢\pi$

**٥** أوجد قيمة كل من :

(١) حا ٠° + حا ٩٠° + حا ١٨٠° + حا ٢٧٠°

(٢) طا ٠° + طا ٤٥° + طا ١٨٠°

(٣) حا ٣٠° + حتا ٦٠° − ظتا ٤٥°

(٤) 📖 طا$^{٢}$ ٣٠° + ٢ حا$^{٢}$ ٤٥° + حتا$^{٢}$ ٩٠°

(٥) حا ١٨٠° حتا ٤٥° − حتا ١٨٠° حا ٤٥°

(٦) قا $\frac{\pi}{٦}$ طا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\frac{\pi}{٣}$ حتا $\frac{\pi}{٦}$

(٧) 📖 حتا $\frac{\pi}{٢}$ حتا ٠ + حا $\frac{٣\pi}{٢}$ حا $\frac{\pi}{٢}$

(٨) $\frac{\text{طا}^{٢}\ ٦٠° - \text{طا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{قا}^{٢}\ ٣٠° - \text{قتا}^{٢}\ ٤٥°}$

(٩) $\frac{٤\ \text{حا}^{٢}\ ٣٠° - ٣\ \text{طا}\ ٤٥°\ \text{حتا}\ ٠°}{٢\ \text{حتا}\ ٦٠° + ٢\ \text{حا}\ ٤٥°\ \text{حتا}\ ٤٥°}$

(١٠) 📖 ٣ حا ٣٠° حا$^{٢}$ ٦٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + حا ٢٧٠° حتا$^{٢}$ ٤٥°

**٦** أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) 📖 ٢ حا$^{٢}$ ٩٠° = −٢ حتا ١٨٠°

(٢) 📖 حتا $\frac{\pi}{٢}$ = حتا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ − حا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$

(٣) ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥° ظتا ٤٥° = ١

(٤) ٣ حتا ٣٠° طا ٦٠° − ٢ قا ٤٥° قتا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$

(٥) حتا$^{٢}$ ٣٠° ظتا$^{٢}$ ٦٠° طا ٤٥° = $\frac{١}{٤}$

(٦) ٣ ظتا$^{٢}$ ٤٥° − ٢ حا ٦٠° حتا ٣٠° = $\frac{٣}{٢}$ حا ٩٠°

(٧) قا ٣٠° طا ٦٠° + قتا$^{٢}$ ٦٠° − طا$^{٢}$ ٤٥° = $\frac{٧}{٣}$

(٨) 📖 حا ٦٠° حتا ٣٠° − حتا ٦٠° حا ٣٠° = حا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$

(٩) ٣ طا$^{٢}$ ٣٠° + $\frac{٤}{٣}$ حتا$^{٢}$ ٣٠° − $\frac{١}{٤}$ ظتا$^{٢}$ ٤٥° قتا$^{٢}$ ٣٠° = ١

(١٠) ٢ حتا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ حا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ طا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ − ٤ حا $\frac{\pi}{٢}$ = ١٠

(١١) $\frac{\text{طا}\ ٦٠° - \text{طا}\ ٣٠°}{١ + \text{طا}\ ٦٠°\ \text{طا}\ ٣٠°}$ = ظتا ٦٠°

(١٢) $\frac{\text{حا}\ ٣٠°\ \text{حتا}\ ٤٥° + \text{حا}\ ٤٥°\ \text{حتا}\ ٣٠°}{\text{حا}\ ٤٥°\ \text{حتا}\ ٦٠° + \text{حتا}\ ٤٥°\ \text{حا}\ ٦٠°}$ = حا ٩٠°

**٧** أوجد قيمة س إذا كان :

(١) س حا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ حتا π = طا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ حا $\frac{٣\pi}{٢}$ «٦»

(٢) س حا $\frac{\pi}{٤}$ حتا $\frac{\pi}{٤}$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = طا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ − حتا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٣}$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

**٨** إذا كانت س ∈ [٠° ، ٩٠°] فأوجد قيمة س التي تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

(١) حتا س = $\frac{\text{حا}\ ٦٠°}{\text{حا}\ ٩٠°} - \frac{\text{حا}\ ٠°}{\text{حا}\ ٤٥°}$ «٣٠°»

(٢) حا س = حا ٣٠° حتا ٦٠° + حتا ٣٠° حا ٦٠° «٩٠°»

**٩** أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية أ و ب التي قياسها θ في كل من الحالات الآتية :

(١) θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ ، حتا θ = ٠,٦

(٢) θ ∈ ]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[ ، حا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

(٣) θ ∈ ]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[ ، طا θ = −$\frac{٣}{٤}$

(٤) θ ∈ ]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[ ، قتا θ = −$\frac{٢٥}{٧}$

(٥) θ ∈ ]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[ ، قا θ = ٢

**١٠** إذا كان الضلع النهائى للزاوية θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٢أ ، ٣أ) حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة : قا² θ − ظا² θ

"$\frac{1}{\sqrt{13}}$ ، ١"

**١١** إذا كانت : θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[ ، جتا θ = $\frac{3}{5}$ فأوجد قيمة : قتا θ جا θ − ظا θ ظتا θ

"$\frac{-2}{3}$"

**١٢** إذا كانت : θ ∈ ]$\frac{\pi}{2}$ ، π[ ، جا θ = $\frac{12}{13}$

فأوجد قيمة : قتا θ جا θ − ظا θ ظتا θ + جتا² θ

"$\frac{25}{169}$"

**١٣** إذا كانت : θ ∈ ]$\frac{3\pi}{2}$ ، ٢π[ ، جا θ = $\frac{-24}{25}$ فأوجد :

(١) $\frac{\text{ظتا } \theta - \text{قتا } \theta}{\text{ظا } \theta - \text{قا } \theta}$ (٢) جتا θ − قتا θ ظا θ

"$\frac{-3}{28}$ ، $\frac{-576}{175}$"

## اكتشف الخطأ

**١٤** طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ جا °٤٥

**إجابة كريم**

٢ جا °٤٥ = جا ٢ × °٤٥ = جا °٩٠ = ١

**إجابة أحمد**

٢ جا °٤٥ = ٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ × $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٥** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى دائرة الوحدة التى مركزها و إذا كان طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ = $\frac{1}{3}$ π

فإن : قا (∠ب و حـ) = ..............

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{-1}{2}$ (د) ٢

(٢) إذا كان أ هى أكبر قياس لزاوية حادة فى مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ من السنتيمترات

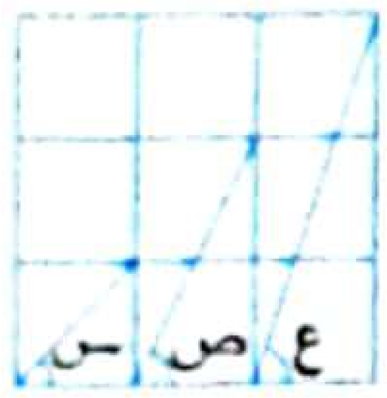
فإن : ظتا أ = ..............

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (جـ) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$

(٣) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث أ ب حـ قائم الزاوية هى س − ٧ ، س ، س + ١ وكان $\overline{\text{ب حـ}}$ أصغر ضلع فإن : قا أ = ..............

(أ) $\frac{5}{13}$ (ب) $\frac{12}{13}$ (جـ) $\frac{13}{12}$ (د) $\frac{5}{4}$

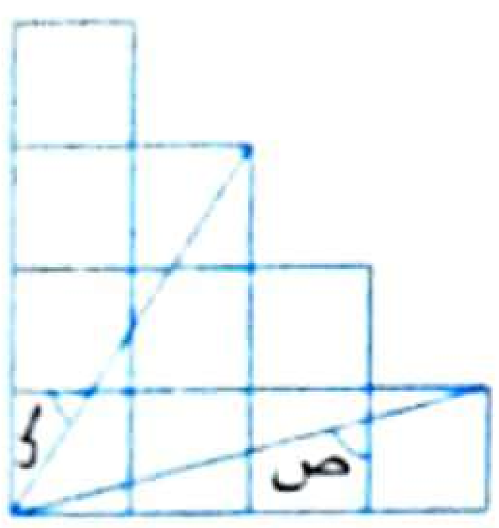
(٤) فى الشكل المقابل :




إذا كانت جميع المربعات متطابقة فإن : ظا س + ظا ص + ظا ع = ..............

(أ) ٦ (ب) $\frac{١١}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) $\sqrt{٥}$ + ٣

(٥) فى الشكل المقابل :

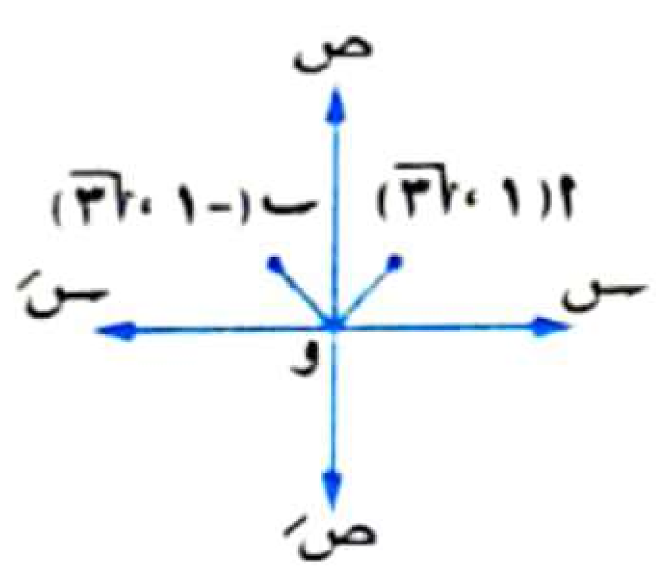



إذا كانت جميع المربعات متطابقة

فإن : ظا س + ظا ص = ..............

(أ) $\frac{١١}{١٢}$ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١٤}{٣}$

(٦) فى الشكل المقابل :



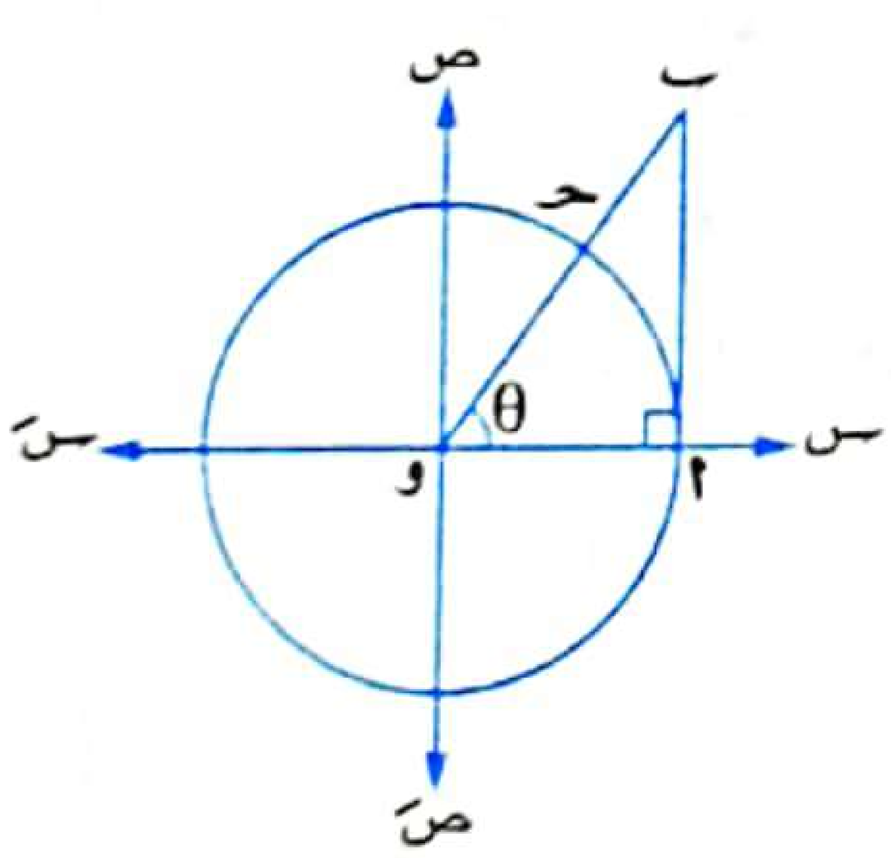

إذا كان : ٢ (١ ، $\sqrt{٣}$) ، ب (-١ ، $\sqrt{٣}$)

فإن : ظا (د ٢ و ب) = ..............

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٧) فى الشكل المقابل :




دائرة وحدة مركزها و ، ٢ب قطعة مماسة فإن :

**أولًا :** و ب = ..............

(أ) حا θ (ب) حتا θ

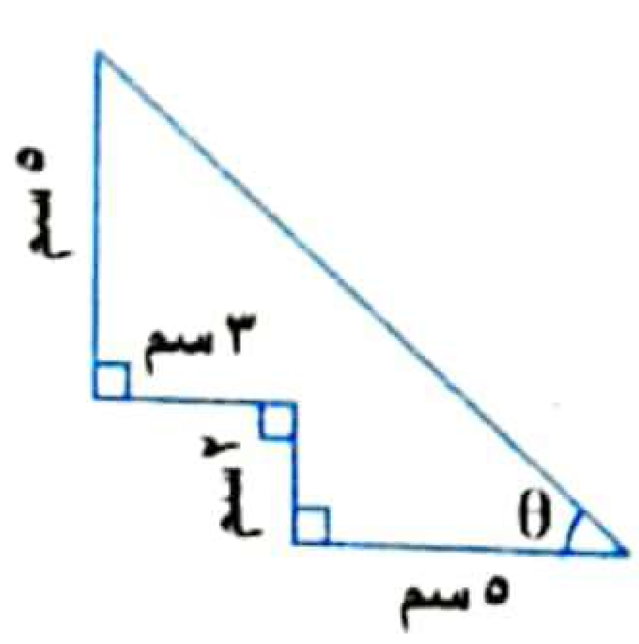
(جـ) قتا θ (د) قا θ

**ثانيًا :** ب حـ = ..............

(أ) ظتا θ (ب) (قا θ) - ١ (جـ) (قتا θ) - ١ (د) حتا θ

**ثالثًا :** مساحة المثلث ٢ ب و = ..............

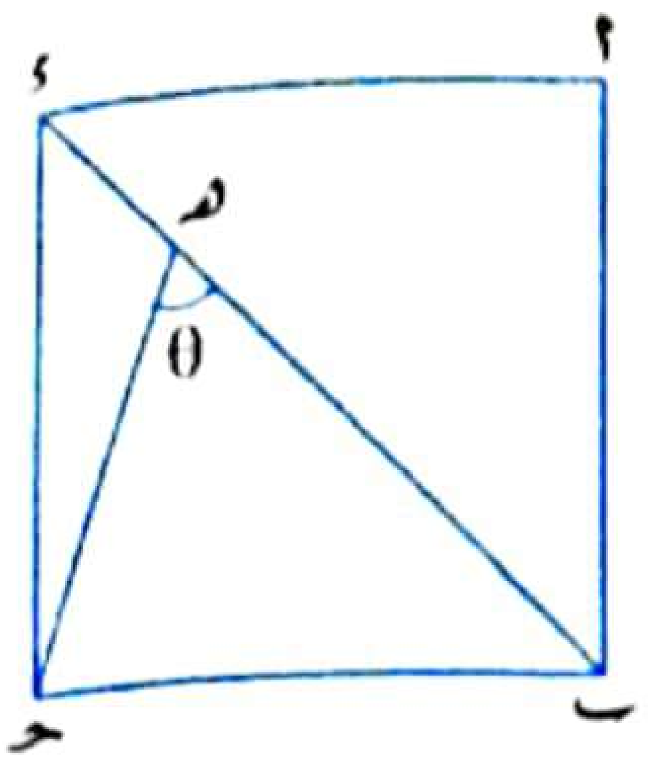
(أ) $\frac{١}{٢}$ حتا θ (ب) $\frac{١}{٢}$ ظا θ (جـ) $\frac{١}{٢}$ حا θ (د) $\frac{١}{٢}$ حا θ حتا θ




(٨) فى الشكل المقابل : ظتا θ = ..............

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٧}{٨}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٨}{٧}$



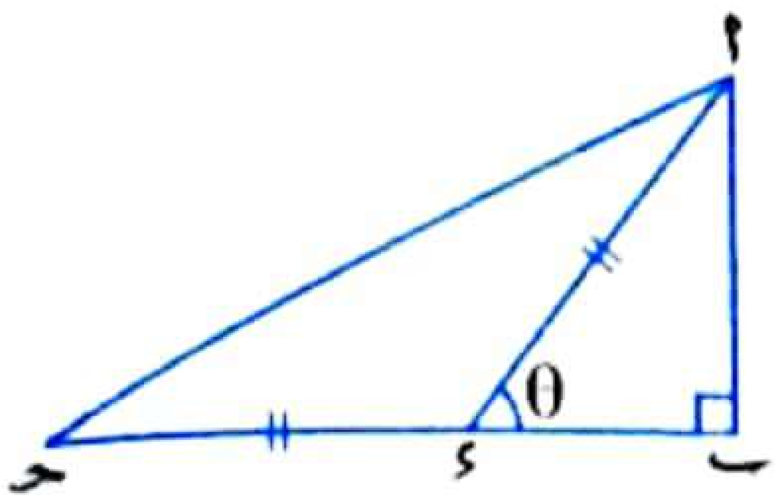

**(٩) في الشكل المقابل :**

إذا كان : أ ب جـ ء مربعًا وكان $\frac{ءهـ}{هـب} = \frac{٢}{٥}$

فإن : طا θ = ..............

(أ) $\frac{٧}{٣}$  (ب) $\frac{٣}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٧}$  (د) $\frac{٧}{٢}$

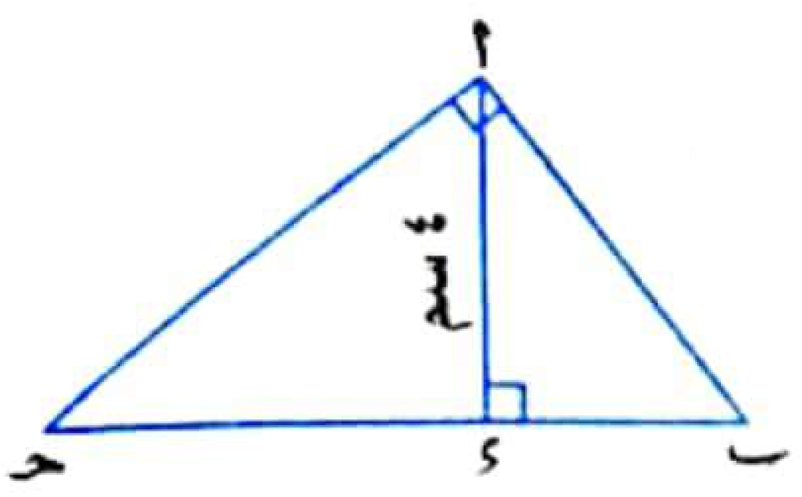



**(١٠) في الشكل المقابل :**

إذا كانت : ء ∈ $\overline{ب جـ}$ وكان : أء = ءجـ ، طا θ = $\frac{٤}{٣}$

فإن : طا $\frac{θ}{٢}$ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$  (ب) ٢  (جـ) $\frac{١}{٢}$  (د) $\frac{٢}{٣}$

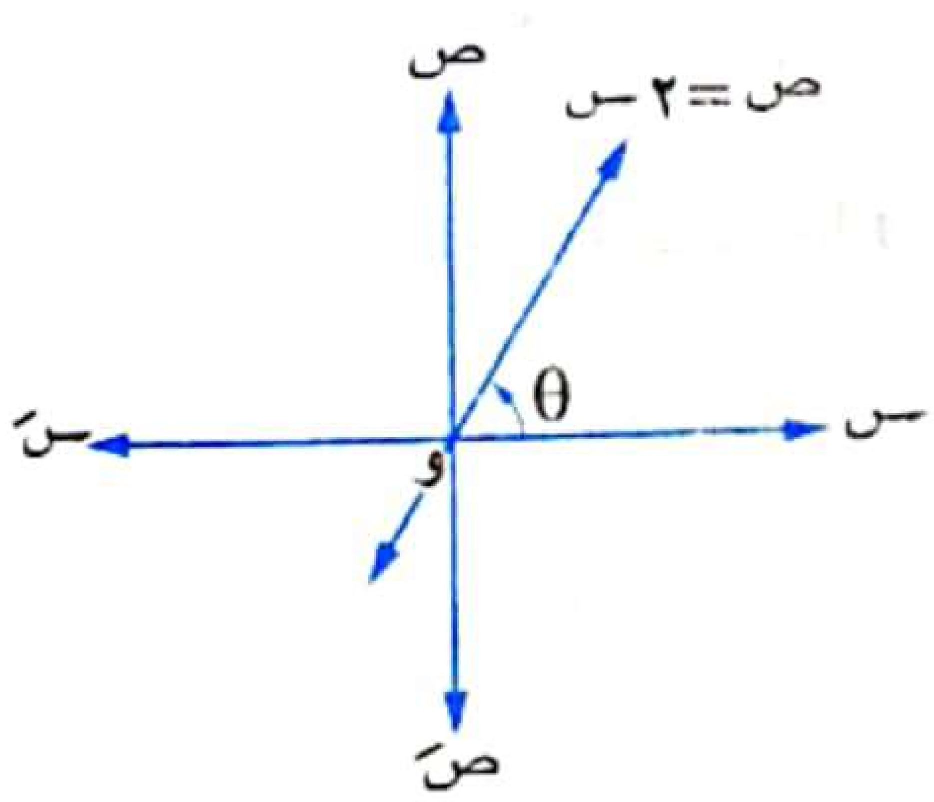



**(١١) في الشكل المقابل :**

إذا كان : طا ب + طا جـ = $\frac{٥}{٢}$

فإن : ب جـ = .............. سم

(أ) ٦  (ب) ٨  (جـ) ١٠  (د) ١٤

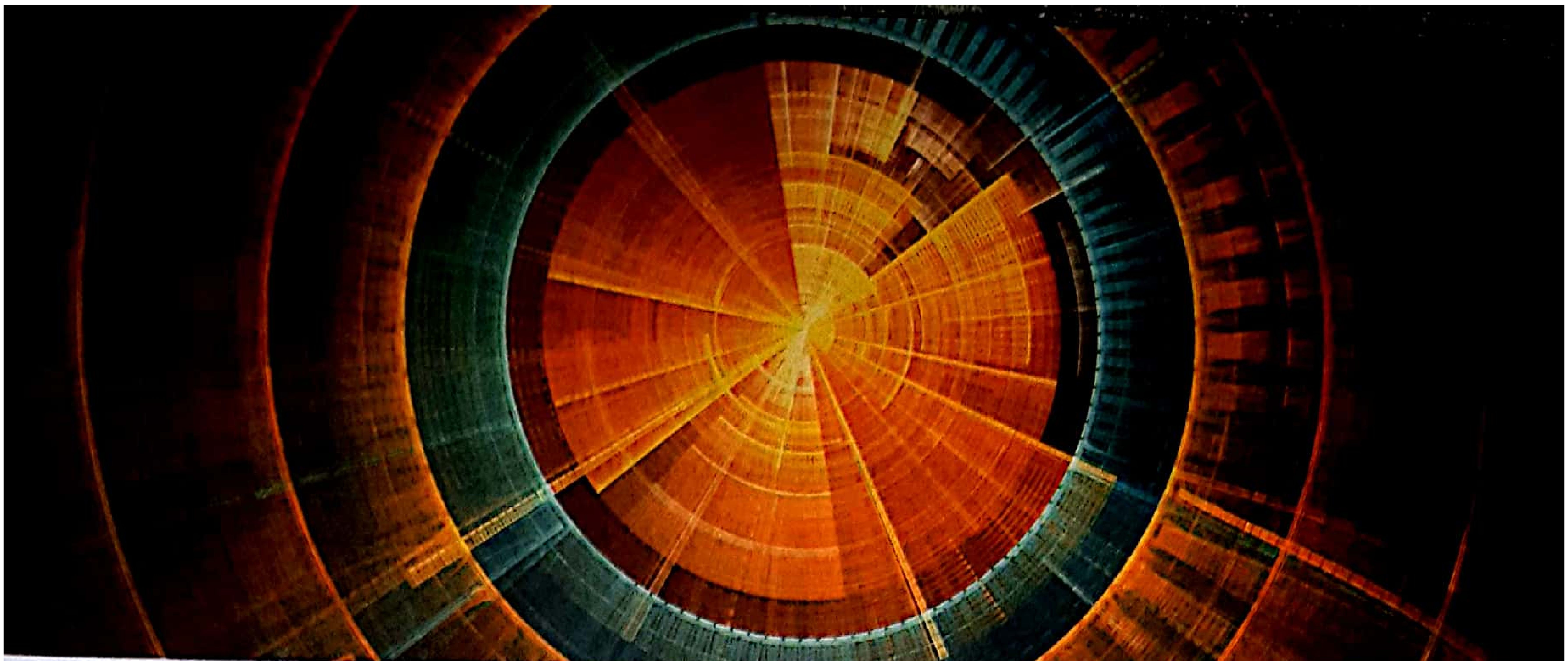



**(١٢) في الشكل المقابل :**

إذا كانت θ هي قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = ٢ س والاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : جا θ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$  (ب) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$  (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$  (د) $\frac{١}{٣}$



الدرس 4

# الزوايـا المنتسبــة

## تعريف الزاويتين المنتسبتين

هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيحًا من القوائم.

**فمثلًا** الزاويتان اللتان قياساهما ٣٠° ، ٢١٠° زاويتان منتسبتان.

**لأن** ٢١٠° − ٣٠° = ١٨٠° أى قائمتان.

## العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

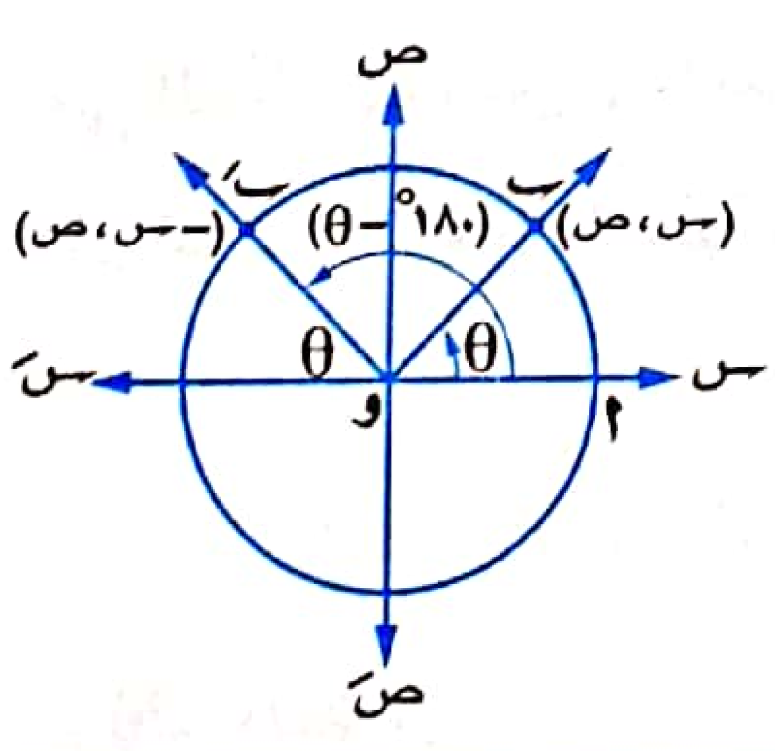
إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) وكان ق (∠ أ و ب) = $\theta$ حيث ٠° < $\theta$ < ٩٠° فإن :

### ١ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما $\theta$ ، (١٨٠° − $\theta$)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور الصادات

هى النقطة ج (− س ، ص)

فإن ق (∠ أ و ج) الموجهة = (١٨٠° − $\theta$)




**ونستنتج أن :**

جا (١٨٠° − $\theta$) = جا $\theta$ ، قتا (١٨٠° − $\theta$) = قتا $\theta$

جتا (١٨٠° − $\theta$) = − جتا $\theta$ ، قا (١٨٠° − $\theta$) = − قا $\theta$

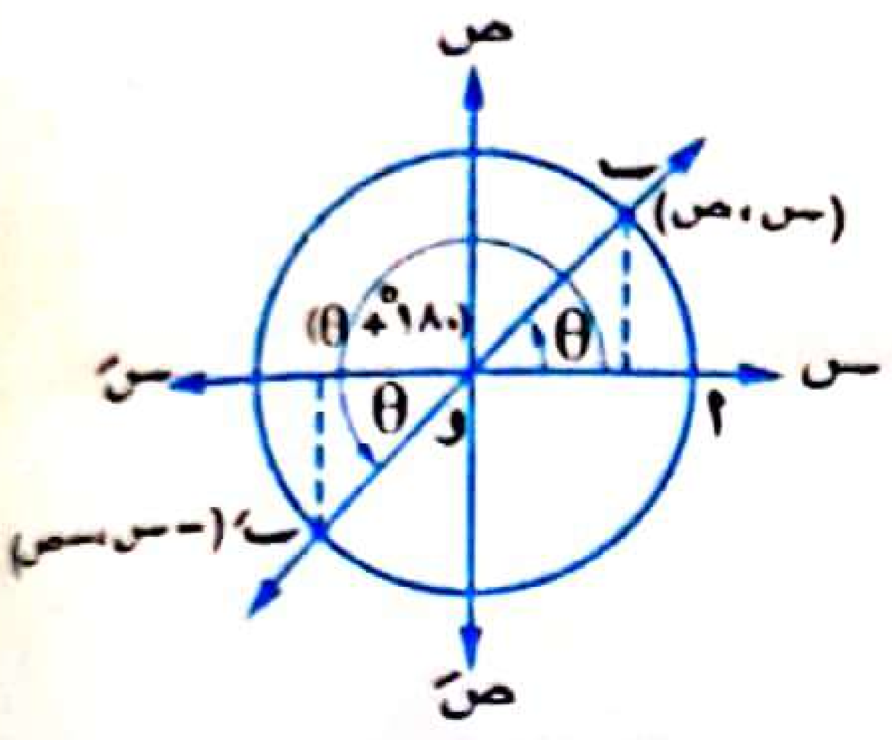
ظا (١٨٠° − $\theta$) = − ظا $\theta$ ، ظتا (١٨٠° − $\theta$) = − ظتا $\theta$

**فمثلا**

- جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$
- جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$
- ظتا ١٣٥° = ظتا (١٨٠° − ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١

## ٢ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (١٨٠° + θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و
هى النقطة ب' (− س ، − ص)
فإن ق (∠ أ و ب') الموجهة = (١٨٠° + θ)




**ونستنتج أن :**

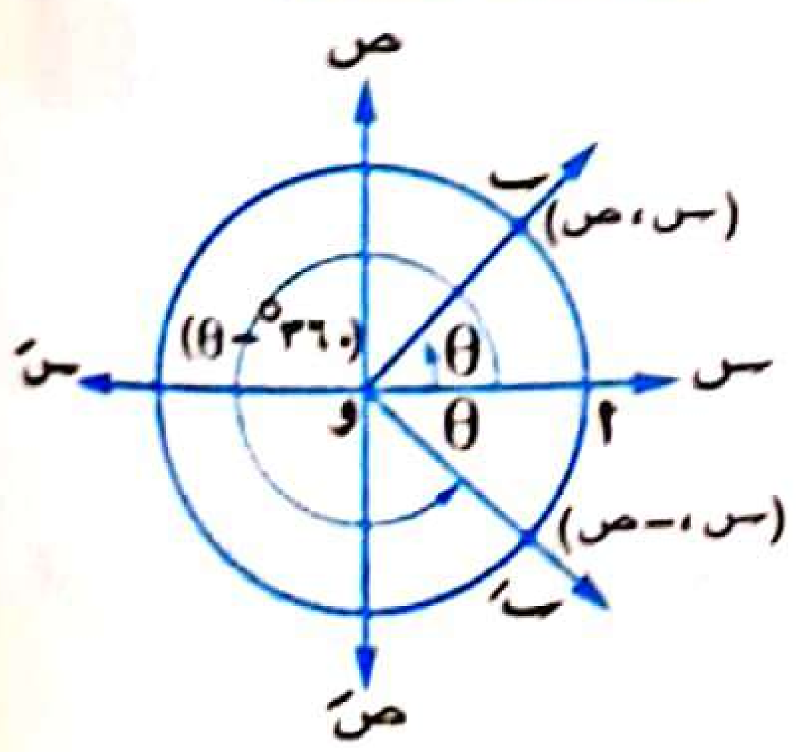
| | |
|---|---|
| جا (١٨٠° + θ) = − جا θ ، | قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ |
| جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ ، | قا (١٨٠° + θ) = − قا θ |
| ظا (١٨٠° + θ) = ظا θ ، | ظتا (١٨٠° + θ) = ظتا θ |

**فمثلا**

- جا ٢٢٥° = جا (١٨٠° + ٤٥°) = − جا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
- ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

## ٣ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٣٦٠° − θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور السينات
هى النقطة ب' (س ، − ص)
فإن ق (∠ أ و ب') الموجهة = (٣٦٠° − θ)




**ونستنتج أن :**

| | |
|---|---|
| جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ ، | قتا (٣٦٠° − θ) = − قتا θ |
| جتا (٣٦٠° − θ) = جتا θ ، | قا (٣٦٠° − θ) = قا θ |
| ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ ، | ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ |

**فمثلاً**

- حا ٣٠٠° = حا (٣٦٠° − ٦٠°) = − حا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- طا ٣١٥° = طا (٣٦٠° − ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١
- قا ٣٣٠° = قا (٣٦٠° − ٣٠°) = قا ٣٠° = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**ملاحظة**

الزاوية التى قياسها (− θ) تكافئ الزاوية التى قياسها (٣٦٠° − θ)

**ومن ذلك يمكن استنتاج :**

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (− θ) كما يلى :

حا (− θ) = − حا θ ، قتا (− θ) = − قتا θ

حتا (− θ) = حتا θ ، قا (− θ) = قا θ

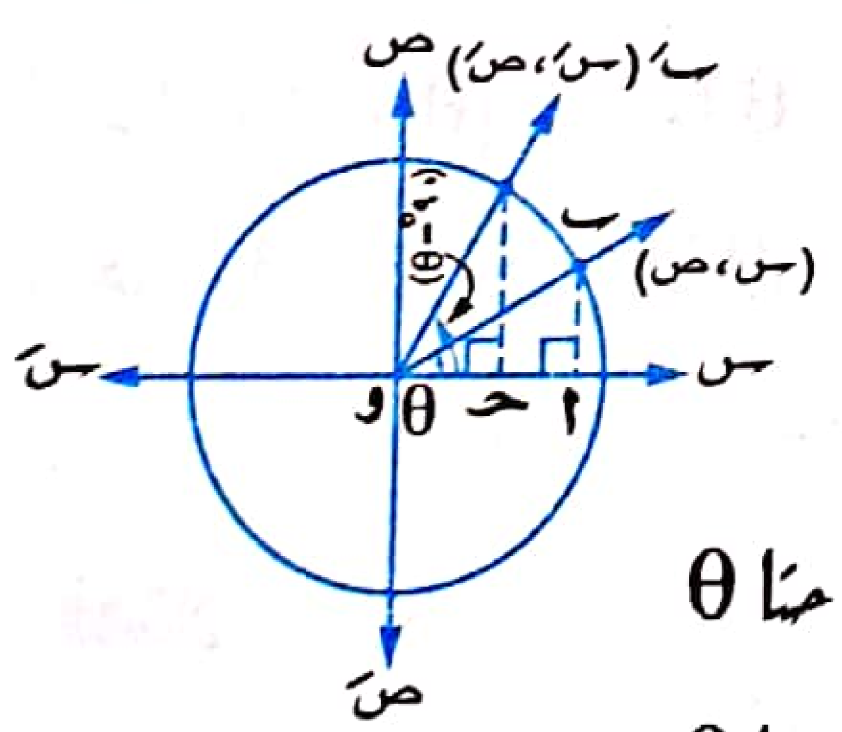
طا (− θ) = − طا θ ، ظتا (− θ) = − ظتا θ

**فمثلاً**

- حا (−٤٥°) = − حا ٤٥° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- حتا (−٦٠°) = حتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$
- ظتا (−٣٠°) = − ظتا ٣٠° = $-\sqrt{3}$

## ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° − θ)

فى الشكل المقابل :




الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٩٠° − θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن : Δ جـ بَ و ≡ Δ أ و ب

∴ جـ بَ = أ و ومنها صَ = س أى أن حا (٩٠° − θ) = حتا θ

، جـ و = أ ب ومنها سَ = ص أى أن حتا (٩٠° − θ) = حا θ

، ∵ طا (٩٠° − θ) = $\frac{صَ}{سَ}$ = $\frac{س}{ص}$ ∴ طا (٩٠° − θ) = ظتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° − θ)

**ونلخص ما سبق كما يلى :**

حا (٩٠° − θ) = حتا θ ، قتا (٩٠° − θ) = قا θ

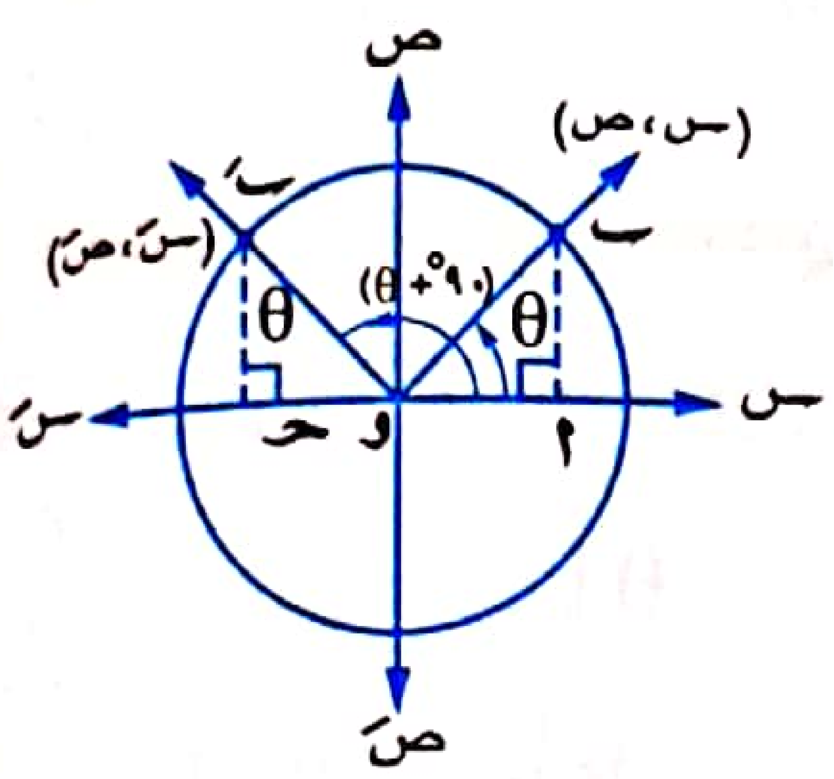
حتا (٩٠° − θ) = حا θ ، قا (٩٠° − θ) = قتا θ

طا (٩٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٩٠° − θ) = طا θ

**فمثلًا**

- حا ٧٠° = حا (٩٠° − ٢٠°) = حتا ٢٠°
- $\frac{\text{حا } ٤٠°}{\text{حتا } ٥٠°} = \frac{\text{حا } (٩٠° - ٥٠°)}{\text{حتا } ٥٠°} = \frac{\text{حتا } ٥٠°}{\text{حتا } ٥٠°} = ١$
- طا ١٠° − طتا ٨٠° = طا (٩٠° − ٨٠°) − طتا ٨٠° = طتا ٨٠° − طتا ٨٠° = ٠

## ٥ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)



في الشكل المقابل :

الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها (٩٠° + θ) في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و ومنها صَ = س **أي أن** حا (٩٠° + θ) = حتا θ

، و حـ = أ ب ومنها سَ = − ص **أي أن** حتا (٩٠° + θ) = − حا θ

، ∵ طا (٩٠° + θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}} = \frac{\text{س}}{-\text{ص}}$ ∴ طا (٩٠° + θ) = − طتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)

**ونلخص ما سبق كما يلي :**

حا (٩٠° + θ) = حتا θ ، قا (٩٠° + θ) = قتا θ

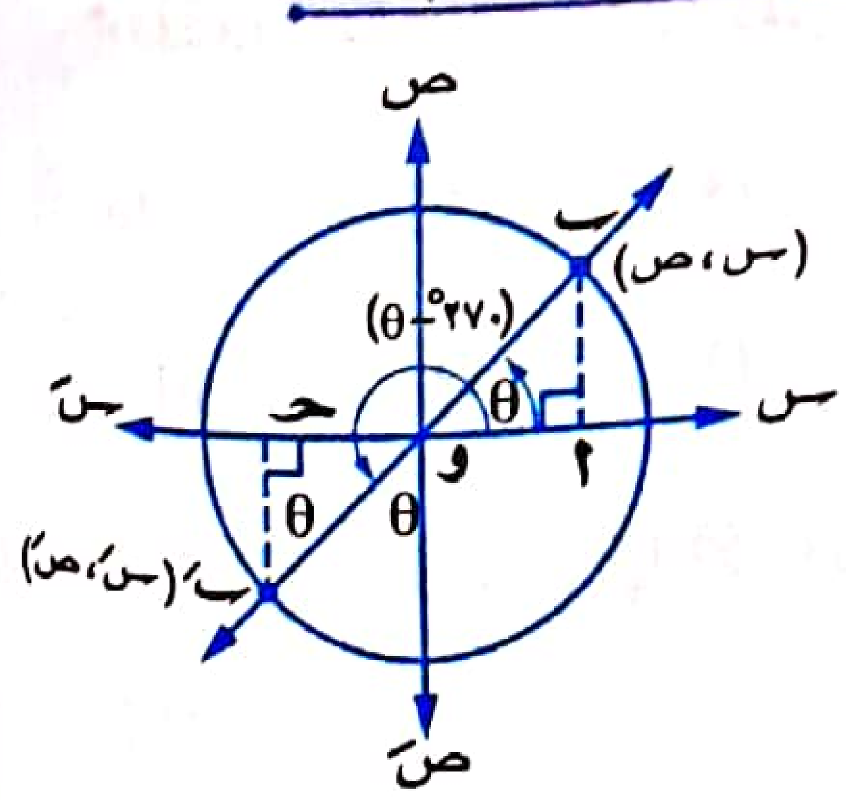
حتا (٩٠° + θ) = − حا θ ، قتا (٩٠° + θ) = − قا θ

طا (٩٠° + θ) = − طتا θ ، طتا (٩٠° + θ) = − طا θ

**فمثلًا**

- حا ١٢٠° = حا (٩٠° + ٣٠°) = حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- حتا ١٥٠° = حتا (٩٠° + ٦٠°) = − حا ٦٠° = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- طتا ١٣٥° = طتا (٩٠° + ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١

## ٦ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° − θ)



في الشكل المقابل :

الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها (٢٧٠° − θ) في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و  ومنها صَ = − س

، حـ و = أ ب  ومنها سَ = − ص

، ∵ ظا (٢٧٠° − θ) = صَ / سَ = −س / −ص = س / ص

أى أن حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ

أى أن حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ

∴ ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° − θ)

**ونلخص ما سبق كما يلى :**

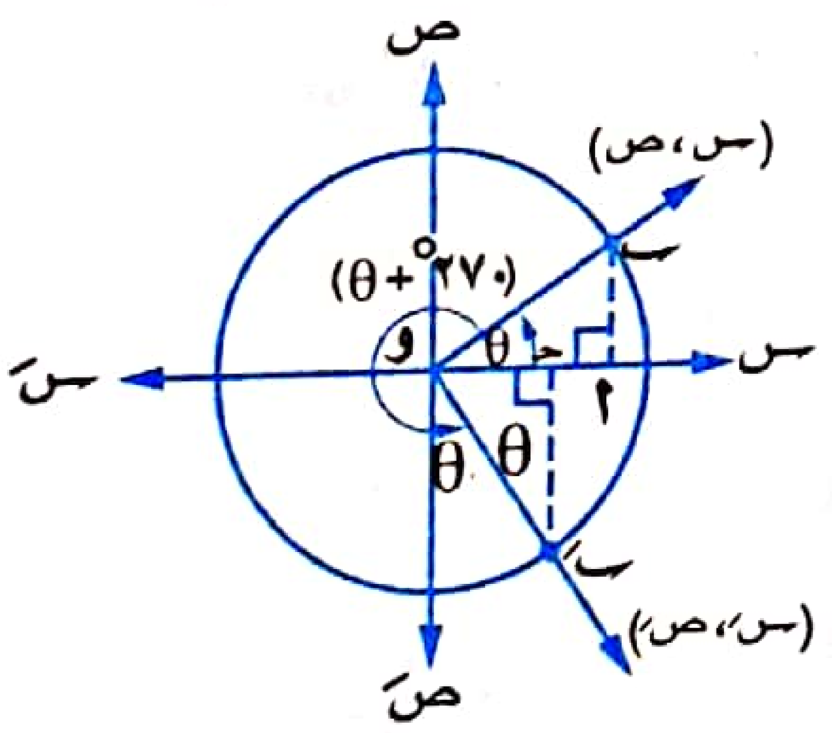
| | |
|---|---|
| حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ | ، قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ |
| حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ | ، قا (٢٧٠° − θ) = − قتا θ |
| ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ | ، ظتا (٢٧٠° − θ) = ظا θ |

**فمثلاً**

- حا ٢٢٥° = حا (٢٧٠° − ٤٥°) = − حتا ٤٥° = − ١/√٢
- ظا ٢٤٠° = ظا (٢٧٠° − ٣٠°) = ظتا ٣٠° = √٣
- قتا ٢١٠° = قتا (٢٧٠° − ٦٠°) = − قا ٦٠° = −٢

## ٧ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

فى الشكل المقابل :




الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٢٧٠° + θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ بَ و ≡ Δ أ و ب

∴ حـ بَ = أ و  ∴ صَ = − س

، حـ و = أ ب  ∴ سَ = ص

، ∵ ظا (٢٧٠° + θ) = صَ / سَ = −س / ص

أى أن حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ

أى أن حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ

∴ ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ

وكذلك يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

**ونلخص ما سبق كما يلى :**

| | |
|---|---|
| حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ | ، قتا (٢٧٠° + θ) = − قا θ |
| حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ | ، قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ |
| ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ | ، ظتا (٢٧٠° + θ) = − ظا θ |

**فمثلا**

• جا ٣٠٠° = جا (٢٧٠° + ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

• قا ٣٣٠° = قا (٢٧٠° + ٦٠°) = قتا ٦٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

• ظتا ٣١٥° = ظتا (٢٧٠° + ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١

**يمكن تلخيص كل ما سبق بالمخطط التالى (حيث θ هو قياس زاوية حادة) :**

**أولا**

نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية المعطاة

| | |
|---|---|
| (٩٠° + θ) ، (١٨٠° − θ) | (θ) ، (٩٠° − θ) |
| (١٨٠° + θ) ، (٢٧٠° − θ) | (٢٧٠° + θ) ، (٣٦٠° − θ) |

**ثانيا**

نضع إشارة الدالة المثلثية المعطاة حسب الربع الذى حددناه.

**ثالثا**

فى حالة الزوايا التى قياساتها θ أ، ١٨٠° − θ أ، ١٨٠° + θ أ، ٣٦٠° − θ أ، (− θ) تكتب الدالة المثلثية كما هى وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ

فى حالة الزوايا التى قياساتها ٩٠° − θ أ، ٩٠° + θ أ، ٢٧٠° − θ أ، ٢٧٠° + θ تتغير فيها الدالة المثلثية بوضع حرف التاء فى حالة عدم وجودها بالدالة أو بحذفها فى حالة وجودها وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ

**فمثلا :**

جتا (١٨٠° + θ)

↓

(١٨٠° + θ) تقع فى الربع الثالث

↓

دالة جيب التمام فى الربع الثالث سالبة (−)

↓

− جتا θ

الدالة كما هى لأن قياس الزاوية (١٨٠° + θ)

∴ جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

**فمثلا :**

جا (٩٠° + θ)

↓

(٩٠° + θ) تقع فى الربع الثانى

↓

دالة الجيب فى الربع الثانى موجبة (+)

↓

+ جتا θ

تم إضافة التاء لأن قياس الزاوية (٩٠° + θ)

∴ جا (٩٠° + θ) = جتا θ

## إيجاد دالة مثلثية لزاوية معلوم قياسها وليكن ($\alpha$)

### أولاً إذا كانت $0° < \alpha < 360°$ (أى $\alpha \in [0 ، 2\pi[$)

1. نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية ثم نحدد إشارة الدالة المثلثية.
2. نحول الدالة المثلثية للزاوية $\alpha$ إلى نفس الدالة المثلثية للزاوية $\theta \in ]0 ، \frac{\pi}{2}[$ وذلك بأن :

نضع $\alpha$ على الصورة ($180° - \theta$) إذا كانت $\alpha$ فى الربع الثانى.

نضع $\alpha$ على الصورة ($180° + \theta$) إذا كانت $\alpha$ فى الربع الثالث.

نضع $\alpha$ على الصورة ($360° - \theta$) إذا كانت $\alpha$ فى الربع الرابع.

### ثانيًا إذا كانت $\alpha > 360°$ (أى $\alpha > 2\pi$)

1. نضع $\alpha$ على الصورة ($2\pi ن + \theta$) حيث $\theta \in [0 ، 2\pi[$

، ن عدد صحيح موجب فتكون الدالة المثلثية للزاوية $\alpha$ هى نفسها الدالة المثلثية للزاوية $\theta$

2. نوجد الدالة المثلثية للزاوية $\theta$ كما فى أولاً.

### ثالثًا إذا كانت $\alpha$ سالبة (أى $\alpha < 0$)

نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين :

#### الطريقة الأولى

نطبق قاعدة الدالة المثلثية للزاوية السالبة وهى :

جا $(-\theta)$ = − جا $\theta$ ، جتا $(-\theta)$ = جتا $\theta$ ، طا $(-\theta)$ = − طا $\theta$ وهكذا ....

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية $\theta$ كما فى (أولاً) أو (ثانيًا)

#### الطريقة الثانية

نضيف إلى $\alpha$ أى عدد صحيح من الدورات الكاملة الموجبة

(أى نضيف إلى $\alpha$ الزاوية $360°$ ن أ، $2\pi$ ن حيث ن $\in$ $ص_+$)

حتى نحصل على زاوية موجبة $\theta \in [0 ، 2\pi[$

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية $\theta$ فتكون هى نفس الدالة المثلثية للزاوية السالبة $\alpha$

## مثال ١

أوجد قيمة كل من :

١) جا ٢٤٠°  ٢) جتا $\frac{٥\pi}{٣}$  ٣) جتا ٥٧٠°  ٤) طا (−١٥٠°)

### الحل

١) جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ = جتا $\frac{٥ \times ١٨٠°}{٣}$ = جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° − ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

أو جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ = جتا $\left(٢\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) جتا ٥٧٠° = جتا (٣٦٠° + ٢١٠°) = جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤) طا (−١٥٠°) = − طا ١٥٠° = − طا (١٨٠° − ٣٠°) = − (− طا ٣٠°) = طا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

## مثال ٢

أوجد قيمة كل مما يأتى بطريقتين مختلفتين :

١) جا ١٢٠°  ٢) طا ١٣٥°  ٣) جتا (−٢٤٠°)  ٤) قا $\frac{١٥\pi}{٤}$

### الحل

١) جا ١٢٠° = جا (١٨٠° − ٦٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
أو، جا ١٢٠° = جا (٩٠° + ٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) طا ١٣٥° = طا (١٨٠° − ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١
أو، طا ١٣٥° = طا (٩٠° + ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١

٣) جتا (−٢٤٠°) = جتا ٢٤٠° = جتا (١٨٠° + ٦٠°)
= − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$
أو، جتا (−٢٤٠°) = جتا ٢٤٠° = جتا (٢٧٠° − ٣٠°)
= − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

٤) ∵ قا $\frac{١٥\pi}{٤}$ = قا $\frac{١٥ \times ١٨٠°}{٤}$ = قا ٦٧٥° = قا (٣٦٠° + ٣١٥°) = قا ٣١٥°

∴ قا $\frac{١٥\pi}{٤}$ = قا ٣١٥° = قا (٣٦٠° − ٤٥°)
= قا ٤٥° = $\sqrt{٢}$
أو، قا $\frac{١٥\pi}{٤}$ = قا ٣١٥° = قا (٢٧٠° + ٤٥°)
= قتا ٤٥° = $\sqrt{٢}$

## مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتى :

جتا (−١٥٠°) جا ٦٠٠° + جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا $\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right)$ طا ٩٠٠°

**الحل**

$\because$ حتا $(-150^\circ)$ = حتا $150^\circ$ = حتا $(180^\circ - 30^\circ)$ = − حتا $30^\circ$ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

، حا $600^\circ$ = حا $(360^\circ + 240^\circ)$ = حا $240^\circ$ = حا $(180^\circ + 60^\circ)$ = − حا $60^\circ$ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

، حتا $\frac{2\pi}{3}$ = حتا $120^\circ$ = حتا $(180^\circ - 60^\circ)$ = − حتا $60^\circ$ = $-\frac{1}{2}$

، حا $330^\circ$ = حا $(360^\circ - 30^\circ)$ = − حا $30^\circ$ = $-\frac{1}{2}$

، قا $\left(\frac{-5\pi}{4}\right)$ = قا $\frac{5\pi}{4}$ = قا $225^\circ$ = قا $(180^\circ + 45^\circ)$ = − قا $45^\circ$ = $-\sqrt{2}$

، طا $900^\circ$ = طا $(720^\circ + 180^\circ)$ = طا $180^\circ$ = صفر

$\therefore$ المقدار = $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) - (-\sqrt{2})$ (صفر) = $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ + صفر = 1

**حاول بنفسك**

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

1. أوجد قيمة : حتا $210^\circ$ حا $510^\circ$ − حا $330^\circ$ حتا $(-330^\circ)$
2. أثبت أن : حا $600^\circ$ حتا $(-390^\circ)$ + حا $150^\circ$ حتا $(-240^\circ)$ = −1

## مثال 4

إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها θ فى الوضع القياسى ، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة $\left(\frac{5}{13}، \frac{12}{13}\right)$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

1. حا $(90^\circ - \theta)$
2. حتا $(180^\circ + \theta)$
3. قا $(90^\circ + \theta)$
4. قتا $(270^\circ - \theta)$
5. طا $(360^\circ - \theta)$
6. طتا $(-\theta)$

**الحل**

$\because$ $س^2 + ص^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$

$\therefore$ النقطة $\left(\frac{5}{13}، \frac{12}{13}\right) \in$ دائرة الوحدة.

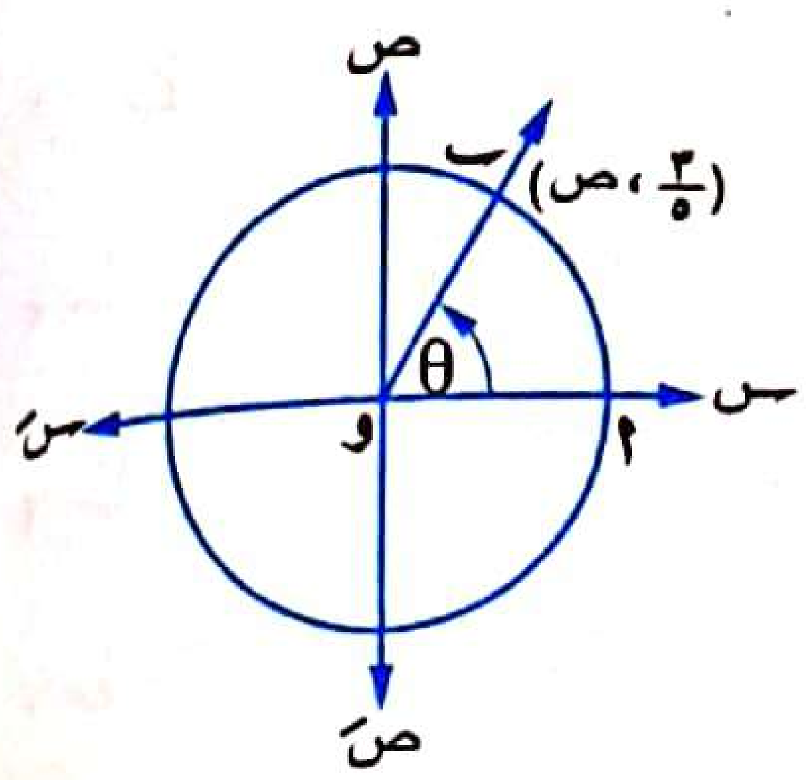
1. حا $(90^\circ - \theta)$ = حتا θ = $\frac{5}{13}$
2. حتا $(180^\circ + \theta)$ = − حتا θ = $\frac{-5}{13}$
3. قا $(90^\circ + \theta)$ = − قتا θ = $-\frac{13}{12}$
4. قتا $(270^\circ - \theta)$ = − قا θ = $-\frac{13}{5}$
5. طا $(360^\circ - \theta)$ = − طا θ = $-\frac{12}{5}$
6. طتا $(-\theta)$ = − طتا θ = $-\frac{5}{12}$

## مثال 5

إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة فى وضع قياسى وتعين على دائرة الوحدة النقطة ب $\left(\frac{3}{5}\right.$ ، ص$\left.\right)$ فأوجد قيمة :

1. طا $(90^\circ - \theta)$ + قا $(90^\circ - \theta)$
2. طتا $(270^\circ + \theta)$ − طا $(90^\circ + \theta)$ − حا $(180^\circ + \theta)$

## الحـل




∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ لأى نقطة على دائرة الوحدة.

∴ $\frac{٩}{٢٥}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ ص$^{٢}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

∴ ص = $\frac{٤}{٥}$ حيث ص > ٠ ∴ ب = $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

١ طا (٩٠° − $\theta$) + قا (٩٠° − $\theta$) = ظتا $\theta$ + قتا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٥}{٤}$ = ٢

٢ ظتا (٢٧٠° + $\theta$) − ظا (٩٠° + $\theta$) − جا (١٨٠° + $\theta$)

= − ظا $\theta$ − (− ظتا $\theta$) − (− جا $\theta$) = − ظا $\theta$ + ظتا $\theta$ + جا $\theta$

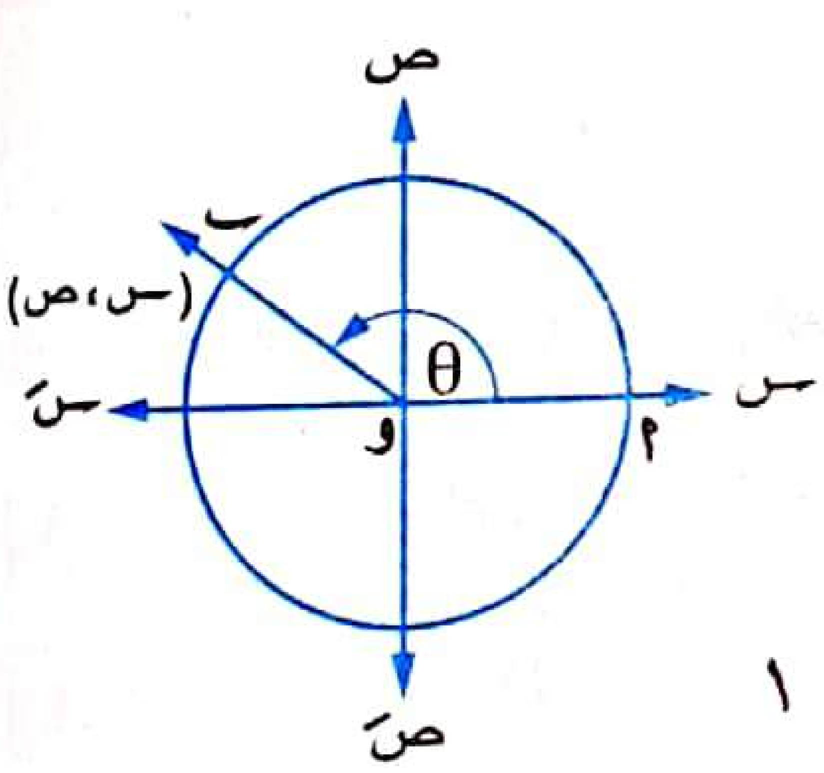
= −$\frac{٤}{٣}$ + $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١٣}{٦٠}$

## مثـال ٦

إذا كانت : جتا $\theta$ = −$\frac{٤}{٥}$ حيث ٩٠° < $\theta$ < ١٨٠° فأوجد قيمة كل من :

١ جا (١٨٠° − $\theta$) ٢ قا (٣٦٠° − $\theta$) ٣ جتا (− $\theta$) ٤ ظا ($\theta$ − ١٨٠°)

## الحـل




بفرض أن ق (∠ أ و ب) = $\theta$ حيث ٩٠° < $\theta$ < ١٨٠°

(كما فى الشكل المقابل) وأن ب (س ، ص)

∴ س = جتا $\theta$ = −$\frac{٤}{٥}$ ، ص = جا $\theta$ حيث ص > ٠ .

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ $\frac{١٦}{٢٥}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ص$^{٢}$ = $\frac{٩}{٢٥}$ ∴ ص = $\frac{٣}{٥}$

∴ ب = $\left(-\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

١ جا (١٨٠° − $\theta$) = جا $\theta$ = $\frac{٣}{٥}$ ٢ قا (٣٦٠° − $\theta$) = قا $\theta$ = −$\frac{٥}{٤}$

٣ جتا (− $\theta$) = جتا $\theta$ = س = −$\frac{٤}{٥}$

٤ ظا ($\theta$ − ١٨٠°) = ظا ($\theta$ − ١٨٠° + ٣٦٠°) = ظا (١٨٠° + $\theta$) = ظا $\theta$ = −$\frac{٣}{٤}$

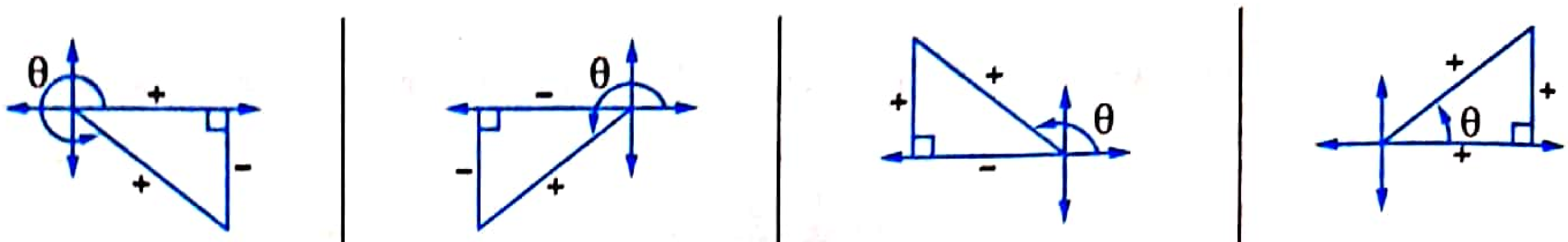
### حاول بنفسك

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة فى وضعها القياسى والتى قياسها $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، $\frac{١٢}{١٣}$) حيث ٩٠° < $\theta$ < ١٨٠°

فأوجد قيمة : ١٣ جتا (٣٦٠° − $\theta$) + ظا ٢٢٥° + قا$^{٢}$ ٣٠٠° + ١٢ ظا (٢٧٠° − $\theta$)

**ملاحظة**

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاوية مباشرة إذا رسمت الزاوية فى وضعها القياسى ورسم المثلث القائم الخاص بها بالاستعانة بقيمة الدالة المثلثية المعطاة مع مراعاة الإشارات حسب الربع الذى تقع فيه الزاوية كما يلى :



فى الربع الأول — فى الربع الثانى — فى الربع الثالث — فى الربع الرابع

## مثال ٧

إذا كانت : حتا $\alpha = -\frac{٧}{٢٥}$ حيث $\alpha$ أصغر زاوية موجبة ، طا $\beta = \frac{٣}{٤}$ حيث $\beta$ أكبر زاوية موجبة بحيث $٠° \le \beta \le ٣٦٠°$

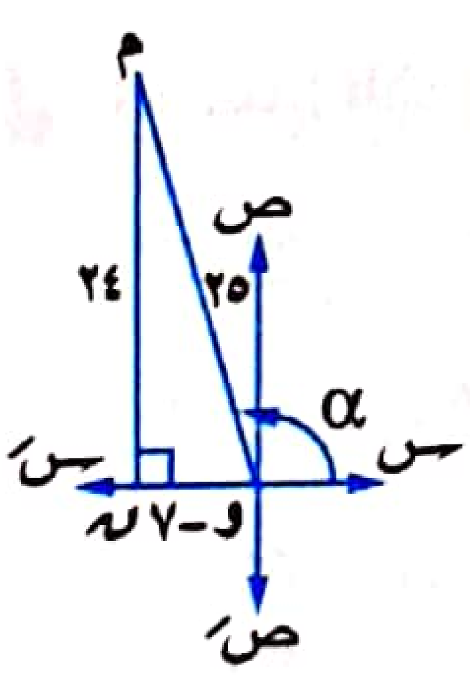
فأوجد قيمة : حتا $(١٨٠° + \alpha)$ حا $(\beta - ٩٠°)$ + حا $(٣٦٠° - \alpha)$ حا $(١٨٠° - \beta)$

### الحل

∵ حتا $\alpha < ٠$ ∴ $\alpha$ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، ∵ $\alpha$ أصغر زاوية موجبة. ∴ $\alpha$ تقع فى الربع الثانى.

، ∵ حتا $\alpha = -\frac{٧}{٢٥}$

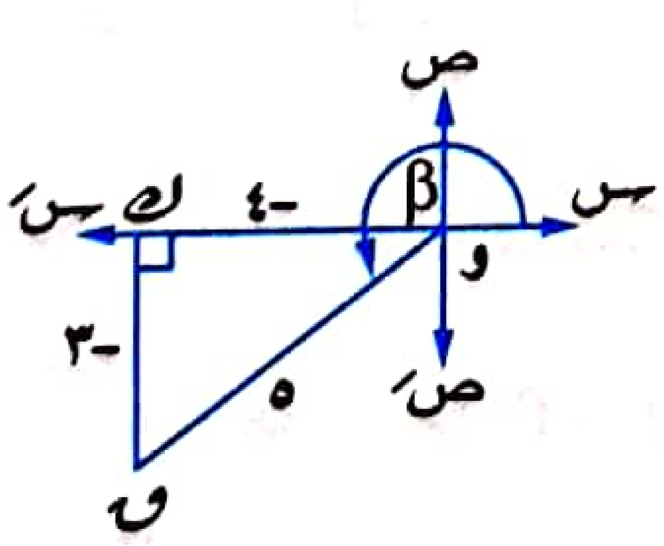


∵ $(م ن)^٢ = (٢٥)^٢ - (٧)^٢ = ٥٧٦$ ∴ م ن = ٢٤ وحدة طول.

، ∵ طا $\beta > ٠$ ∴ $\beta$ تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، ∵ $\beta$ أكبر زاوية موجبة. ∴ $\beta$ تقع فى الربع الثالث.

، ∵ طا $\beta = \frac{٣}{٤}$



∴ $(و ق)^٢ = (٣)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$ ∴ و ق = ٥ وحدة طول.

∴ المقدار = حتا $(١٨٠° + \alpha)$ حا $(\beta - ٩٠°)$ + حا $(٣٦٠° - \alpha)$ حا $(١٨٠° - \beta)$

= − حتا $\alpha$ حا $(٢٧٠° + \beta)$ + (− حا $\alpha$) حا $\beta$

= − حتا $\alpha$ (− حتا $\beta$) − حا $\alpha$ حا $\beta$ = حتا $\alpha$ حتا $\beta$ − حا $\alpha$ حا $\beta$

$= -\frac{٧}{٢٥} \times \left(\frac{-٤}{٥}\right) - \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{-٣}{٥} = \frac{٢٨}{١٢٥} + \frac{٧٢}{١٢٥} = \frac{١٠٠}{١٢٥} = \frac{٤}{٥}$

**ملاحظة**

إذا كان : حا $\alpha$ = حتا $\beta$ أ، طا $\alpha$ = طتا $\beta$ أ، قتا $\alpha$ = قا $\beta$

فإن : $\alpha + \beta = ٩٠°$ حيث $\alpha$ ، $\beta$ قياسا زاويتين حادتين موجبتين.

**فمثلا** إذا كان : طا ٢٣° = طتا $\alpha$ فإن : ٢٣° + $\alpha$ = ٩٠° **أى** $\alpha$ = ٦٧°

## مثال ٨

إذا كان : حا (٣ $\theta$ + ٢٨°) = حتا (٢ $\theta$ − ١٣°) أوجد قيمة واحدة لـ $\theta$ حيث ٠° < $\theta$ < ٩٠°

**الحل**

∵ حا (٣ $\theta$ + ٢٨°) = حتا (٢ $\theta$ − ١٣°) ∴ ٣ $\theta$ + ٢٨° + ٢ $\theta$ − ١٣° = ٩٠°

∴ ٥ $\theta$ + ١٥° = ٩٠° ∴ ٥ $\theta$ = ٧٥° ∴ $\theta$ = ١٥°

**لاحظ أنه**

توجد قيم أخرى لـ $\theta$ تنحصر بين ٠° ، ٩٠° مثل $\theta$ = ٤٩° أ، $\theta$ = ٨٧°

ولإيجاد هذه القيم لابد من حل المثال باستخدام القانون العام كتعميم للملاحظة السابقة.

### استنتاج القانون العام

١ إذا كان : حا $\alpha$ = حتا $\beta$ فإن : حا $\alpha$ = حا (٩٠° − $\beta$)

∴ $\alpha$ = ٩٠° − $\beta$ أ، ∴ $\alpha$ + ٩٠° − $\beta$ = ١٨٠°

∴ $\alpha + \beta$ = ٩٠° ∴ $\alpha - \beta$ = ٩٠°

ويمكن إضافة عدد من الدورات (٣٦٠°) على الزاوية ٩٠°

**تنبيه هام جدًا**

عند الحل لا بد أن نبدأ بزاوية دالة الجيب $\alpha$

٢ وبنفس الطريقة يمكن استنتاج نفس القوانين إذا كان : قتا $\alpha$ = قا $\beta$

٣ إذا كان : طا $\alpha$ = طتا $\beta$ فإن :

طا $\alpha$ = طا (٩٠° − $\beta$) أ، طا $\alpha$ = طا (٢٧٠° − $\beta$)

∴ $\alpha$ = ٩٠° − $\beta$ ∴ $\alpha$ = ٢٧٠° − $\beta$

∴ $\alpha + \beta$ = ٩٠° ∴ $\alpha + \beta$ = ٢٧٠°

ويمكن إضافة عدد من الدورات (٣٦٠°) على الزاويتين ٩٠° ، ٢٧٠°

وبالتالى يمكن كتابة القانون العام لأى زاويتين $\alpha$ ، $\beta$ كما يلى :

## القانون العام لحل المعادلات على الصور: جا $\alpha$ = جتا $\beta$ أو قا $\alpha$ = قتا $\beta$ أو طا $\alpha$ = ظتا $\beta$

**١** إذا كان: جا $\alpha$ = جتا $\beta$

فإن: $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن **أى أن** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

**أى أن** قياس زاوية الجيب ± قياس زاوية جيب التمام = ٩٠° + ٣٦٠° ن

**٢** إذا كان: قا $\alpha$ = قتا $\beta$

فإن: $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن **أى أن** $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq$ ن $\pi$ ، $\beta \neq (2$ ن $+ 1)\frac{\pi}{2}$

**٣** إذا كان: طا $\alpha$ = ظتا $\beta$

فإن: $\alpha + \beta = 90° + 180°$ ن **أى أن** $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi$ ن حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq (2$ ن $+ 1)\frac{\pi}{2}$ ، $\beta \neq$ ن $\pi$

### مثال ٩

أوجد الحل العام للمعادلة: جتا ٢ $\theta$ = جا ٤ $\theta$ ثم أوجد: قيم $\theta$ حيث $\theta \in ]0 ، \frac{\pi}{2}[$

### الحل

$\because$ جتا ٢ $\theta$ = جا ٤ $\theta$ $\quad$ $\therefore$ جا ٤ $\theta$ = جتا ٢ $\theta$

$\therefore \alpha = 4\theta$ ، $\beta = 2\theta$ $\quad$ $\therefore 4\theta \pm 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن

$\therefore$ إما $6\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن $\quad$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$ ن

أو $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن $\quad$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ ن

$\therefore$ الحل العام هو $\boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\text{ ن}}$ ، أ $\boxed{\frac{\pi}{4} + \pi\text{ ن}}$ حيث ن $\in$ ص عند ن = ٠ :

$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} \in ]0 ، \frac{\pi}{2}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{4} \in ]0 ، \frac{\pi}{2}[$ عند ن = ١ :

$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi \in ]0 ، \frac{\pi}{2}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi \notin ]0 ، \frac{\pi}{2}[$ عند ن = ٢ :

$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi \notin ]0 ، \frac{\pi}{2}[$

$\therefore$ قيم $\theta$ هى: $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{12}$ **أى** ١٥° ، ٤٥° ، ٧٥°

## حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : حا ٣ $\theta$ = حتا $\theta$

ثم أوجد : جميع قيم $\theta$ حيث $\theta \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ التى تحقق المعادلة.

## مثال ١٠

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ حا $\theta$ − ١ = ٠ حيث $\theta \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

٢ ٢ حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + \sqrt{٣}$ = ٠ حيث $\theta \in$ ]٠ ، ٢ $\pi$[

٣ ٤ حتا$^{٢}$ $\theta$ − ٣ = ٠ حيث $\theta \in$ ]٠ ، ٢ $\pi$[

## الحل

١ ∵ ٢ حا $\theta$ − ١ = ٠ ∴ حا $\theta$ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثانى ، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∴ $\theta$ = ٣٠° أ، $\theta$ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° (مرفوض لأن $\theta \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[)

∴ مجموعة الحل = {٣٠°}

٢ ∵ ٢ حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + \sqrt{٣}$ = ٠ ∴ ٢ حا $\theta$ = $-\sqrt{٣}$

∴ حا $\theta$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة) ∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° أ، $\theta$ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٢٤٠° ، ٣٠٠°}

٣ ∵ ٤ حتا$^{٢}$ $\theta$ − ٣ = ٠ ∴ ٤ حتا$^{٢}$ $\theta$ = ٣

∴ حتا$^{٢}$ $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ حتا $\theta$ = $\pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ إما حتا $\theta$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة) ∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

∴ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ $\theta$ = ٣٠° أ، $\theta$ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

أ، حتا $\theta$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة) ∴ $\theta$ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ $\theta$ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° أ، $\theta$ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ مجموعة الحل = {٣٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) طا ٤٢° = ..............

(أ) ظتا ٤٢° (ب) طا ٤٨° (جـ) ظتا ٤٨° (د) قتا ٤٨°

(٢) ظتا (٩٠° + θ) = ..............

(أ) طا (٩٠° − θ) (ب) − طا θ (جـ) طا (٩٠° + θ) (د) طا (٢٧٠° + θ)

(٣) $\frac{\text{قا } ١٠٥°}{\text{قتا } ١٥°}$ = ..............

(أ) $\frac{\text{حا } ١٠٥°}{\text{حتا } ١٥°}$ (ب) طا ١٣٥° (جـ) ظتا ١٥° (د) حتا ٩٠°

(٤) حتا θ + حتا (١٨٠° − θ) = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ حتا θ (د) حتا θ

(٥) حا θ + حتا (٢٧٠° + θ) = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ حا θ (د) حا θ حتا θ

(٦) إذا كان ا ب حـ مثلثًا حاد الزوايا فإن : حتا ا + حتا (ب + حـ) = ..............

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٧) إذا كان θ هى قياس الزاوية فى وضعها القياسى وكان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى (س ، − س) حيث س > ٠ فإن : θ = ..............

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٨) إذا كان : حا θ = − $\frac{١}{٢}$ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٩) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} \text{ ، ص}\right)$ حيث ص ∈ ح+ فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(١٠) إذا كان ا ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا وكان : حا ا = $\frac{٣}{٥}$ فإن : حا حـ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(١١) طا (٤٥° + س) / ظتا (٤٥° − س) = ...............

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) طا (٩٠° + س) (د) ظتا (٩٠° + س)

(١٢) إذا كان : س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : (حا س − حا ص) / (حتا س − حتا ص) = ...............

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٣) إذا كان : أ + ب = ٩٠° ، طا أ = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا ب = ...............

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

(١٤) إذا كان : حا θ = حتا ٢θ ، θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ فإن : حا ٣θ = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٥) إذا كان : طا θ = ظتا ٢θ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : حا θ + حتا ٢θ = ...............

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٦) 📖 إذا كان : حا α = حتا β فإن : طا (α + β) = ...............

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) غير معرف. (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٧) 📖 إذا كان : حا ٢θ = حتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : طا (٩٠° − ٣θ) = ...............

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٣}$

(١٨) إذا كان : ٥ حتا (٩٠° − θ) = ٤ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : حا θ = ...............

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١٩) إذا كانت : ظتا (٩٠° + θ) + ١ = ٠ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن : حتا ٤θ = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٢٠) إذا كان : حتا (٩٠° + θ) + حا (٩٠° − ٢θ) = ٠ حيث θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[ فإن : حا ٢θ = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢١) إذا كان : حتا (٢٧٠° − θ) = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...............

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٢) إذا كان : طا θ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، حتا θ < ٠ فإن : قتا θ = ...............

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

(٢٣) إذا كان : حا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، طا θ > ٠ فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

**٢** أوجد قيمة كل مما يأتى :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) حا ١٥٠° | (٢) قا ٢١٠° | (٣) طا ٢٤٠° | (٤) حتا (−١٥٠°) |
| (٥) طا ٢٢٥° | (٦) قتا $\frac{١١ π}{٦}$ | (٧) طتا ٧٨٠° | (٨) حتا (−٩٠٠°) |
| (٩) حا $\left(\frac{-٤ π}{٣}\right)$ | (١٠) قا $\left(\frac{-٢ π}{٣}\right)$ | (١١) قتا (−٤٨٠°) | (١٢) حا $\left(\frac{-٧ π}{٤}\right)$ |

**٣** أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) حتا ١٢٠° + طا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + حتا ٤٢٠° «−١»

(٢) حا ٣٩٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠° حا ١٢٠° «١»

(٣) حا ١٥٠° حتا (−٣٠٠°) + حتا ٩٣٠° طتا ٢٤٠° «$-\frac{١}{٤}$»

(٤) طا $\frac{٢ π}{٣}$ قا $\frac{١١ π}{٣}$ + طتا $\frac{١١ π}{٦}$ قتا $\frac{١٩ π}{٦}$ + طا $\frac{٢٥ π}{٦}$ قتا $\left(\frac{-١٩ π}{٣}\right)$ «$-\frac{٢}{٣}$»

**٤** أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) حتا (−٣٠٠°) حا ٤٢٠° − حتا ٧٥٠° حتا ٦٦٠° = صفر

(٢) حا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + حا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°) = −١

(٣) حا ٤٨٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠٠° حا (−١٢٠°) = صفر

(٤) حا ١٥٠° طا ٢٢٥° + حتا ٣١٥° قا (−١٢٠°) + حا (−١٣٥°) قتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

**٥** إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فأوجد :

| | | |
|---|---|---|
| (١) حا (١٨٠° + θ) | (٢) حتا $\left(\frac{π}{٢} - θ\right)$ | (٣) طا (٣٦٠° − θ) |
| (٤) قتا $\left(\frac{٣ π}{٢} - θ\right)$ | (٥) قا (π + θ) | (٦) حا (π − θ) |

**٦** إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها θ فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يمر بالنقطة $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

| | | |
|---|---|---|
| (١) حا (٢٧٠° + θ) | (٢) قا (٢٧٠° + θ) | (٣) قتا $\left(θ + \frac{π}{٢}\right)$ |
| (٤) طا $\left(\frac{π}{٢} - θ\right)$ | (٥) طتا (θ − ١٨٠°) | (٦) قا (− θ) |

**٧** إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة فى الوضع القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، $\frac{٣}{٥}$) فأوجد قيمة : حا (٩٠° − θ) + طا (٩٠° − θ) حتا (٩٠° + θ) «صفر»

**٨** إذا كان : حا $\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$ فأوجد قيمة :

(١) حتا $(١٨٠° - \theta)$ (٢) طا $(١٨٠° + \theta)$ (٣) قتا $(- \theta)$

(٤) طتا $(٣٦٠° - \theta)$ (٥) حا $(٩٠° - \theta)$ (٦) حا $(٢٧٠° - \theta)$

**٩** إذا كان : حتا $\theta = -\frac{٣}{٥}$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ فأوجد قيمة كل من :

(١) قتا $(١٨٠° + \theta)$ (٢) قا $(- \theta)$ (٣) طا $(٣٦٠° - \theta)$

(٤) طتا $(\theta - ٩٠°)$ (٥) قا $(٩٠° + \theta)$ (٦) طا $(٢٧٠° - \theta)$

**١٠** أوجد إحدى قيم $\theta$ حيث $٠° \leq \theta < ٩٠°$ التى تحقق كلًا مما يأتى :

(١) حا $(٣\theta + ١٥°)$ = حتا $(٢\theta - ٥°)$ «١٦°»

(٢) قا $(\theta + ٢٥°)$ = قتا $(\theta + ١٥°)$ «٢٥°»

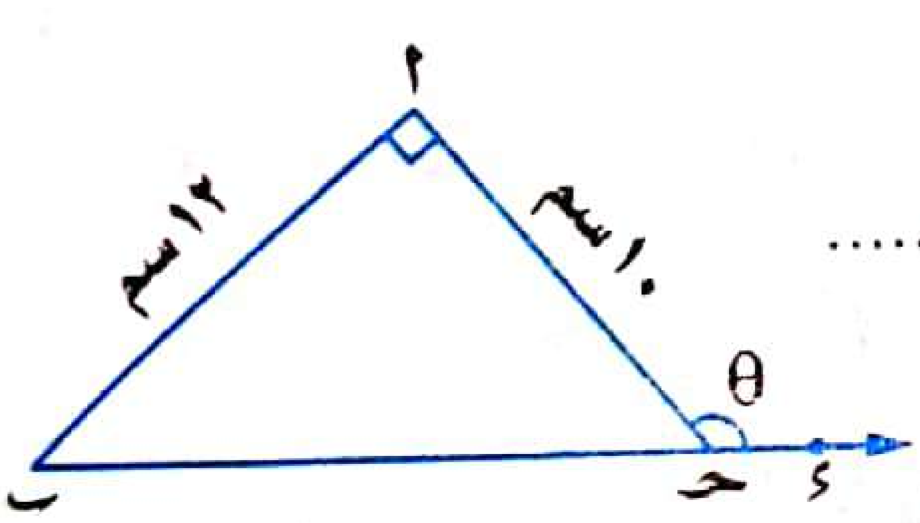
(٣) طا $(\theta + ٢٠°)$ = طتا $(٣\theta + ٣٠°)$ «١٠°»

(٤) حتا $\left(\frac{\theta + ٢٠°}{٢}\right)$ = حا $\left(\frac{\theta + ٤٠°}{٢}\right)$ «٦٠°»

(٥) طا $(\theta + ١٨° \; ٢٤')$ = طتا $(\theta + ٥٢° \; ٦')$ «٩° ٤٣َ»

**١١** بدون استخدام الآلة الحاسبة اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

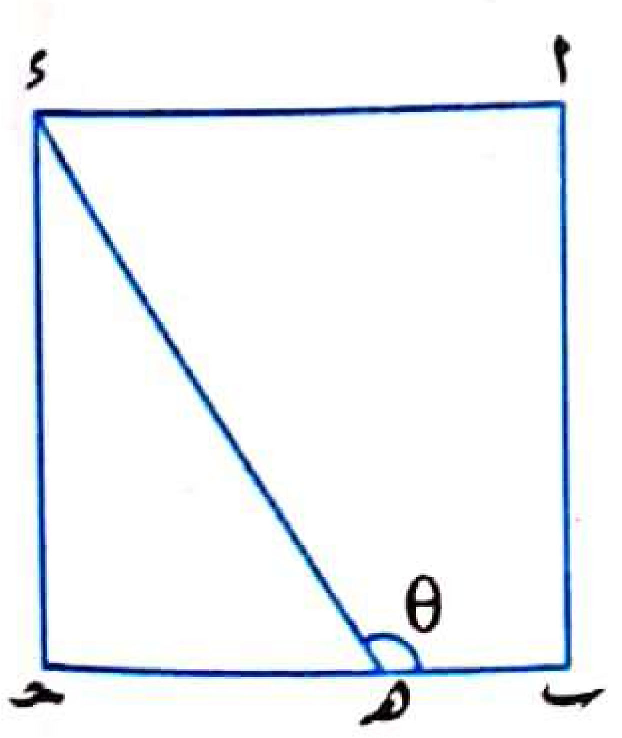



ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، أحـ = ١٠ سم ، أب = ١٢ سم فإن : طتا $\theta$ = ..............

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) $-\frac{٦}{٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $-\frac{٥}{٦}$

(٢) فى الشكل المقابل :

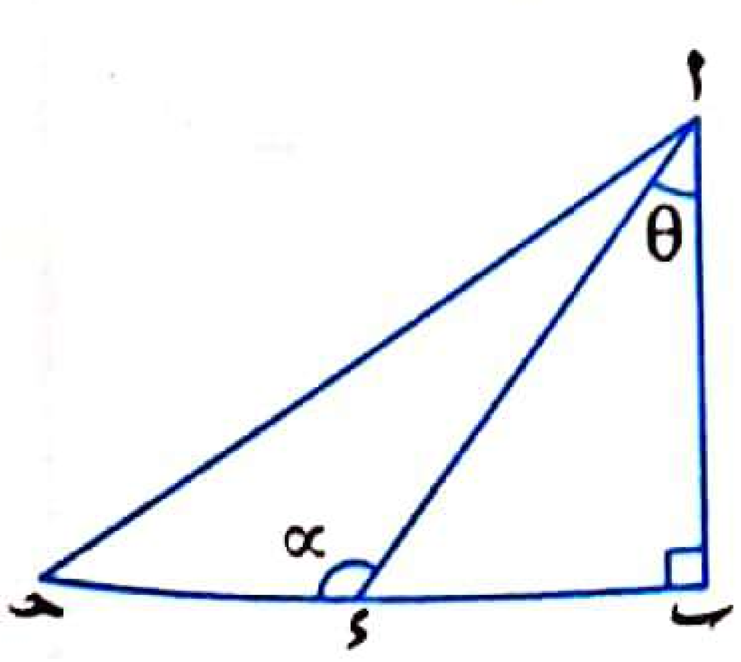



أب حـ ء مربع فيه : حـ هـ = ٢ ب هـ فإن : طا $\theta$ = ..............

(أ) $-\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٣) فى الشكل المقابل :

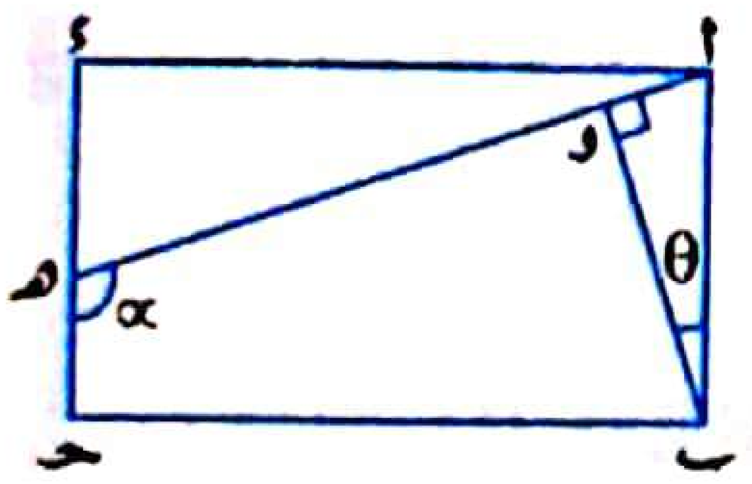



$\Delta$ أب حـ قائم الزاوية فى ب

، طا $\theta = \frac{٣}{٤}$

فإن : حتا $\alpha$ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$

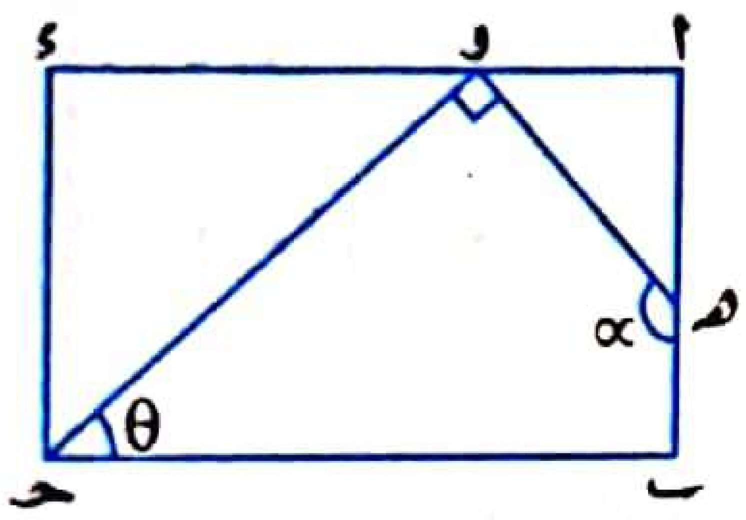


(٤) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل ، ظا $\theta$ = $\frac{١}{٣}$

، $\overline{ب و} \perp \overline{أ هـ}$ فإن : ظا $\alpha$ = ...............

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

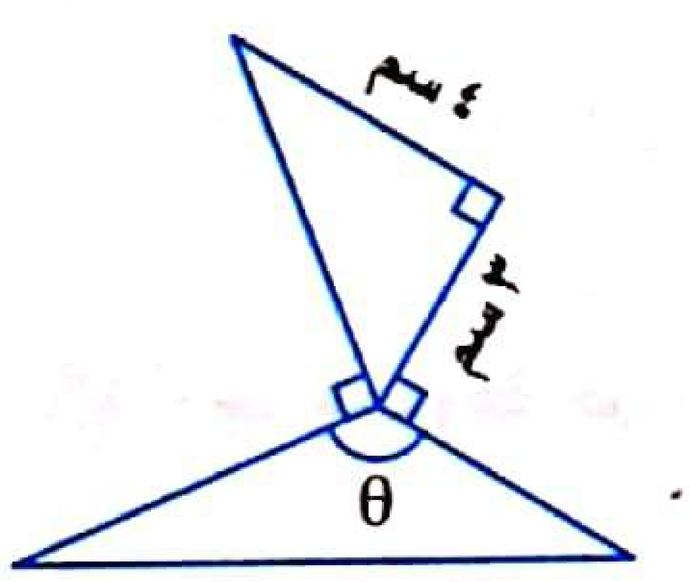


(٥) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل فيه : جتا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$

، $\overline{هـ و} \perp \overline{و جـ}$ فإن : جتا $\alpha$ = ...............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

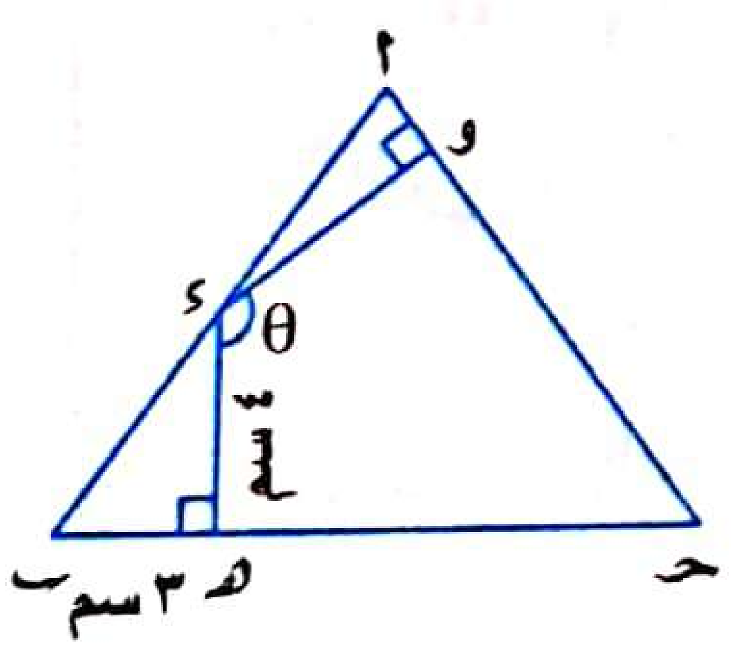



(٦) في الشكل المقابل :

جتا $\theta$ = ...............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$

(جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$




(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ ، ء $\in \overline{أ ب}$

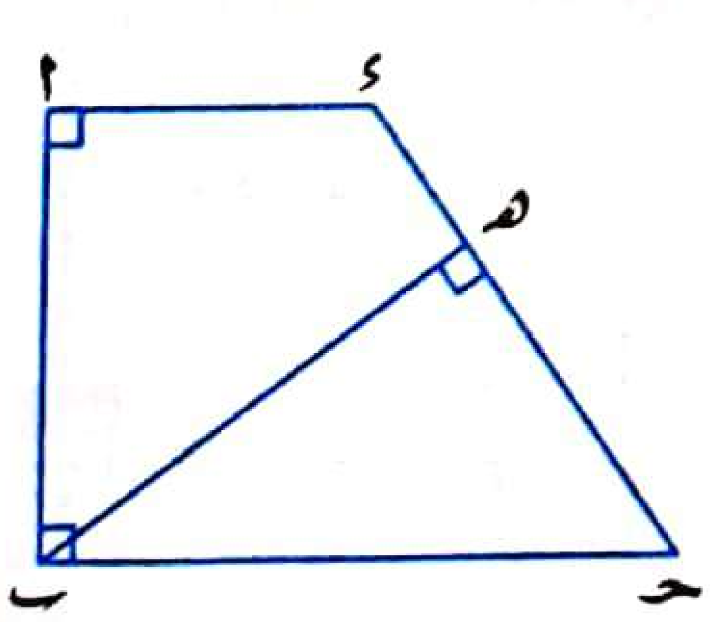
، $\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء و} \perp \overline{أ جـ}$

، ق(∠ هـ ء و) = $\theta$

، ء هـ = ٤ سم ، ب هـ = ٣ سم

فإن : جتا $\theta$ = ...............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$



(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : ٣ ب هـ = ٤ جـ هـ

فإن : ظا (∠ أ ء جـ) = ...............

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

**١٢** أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

(١) جا ٢ $\theta$ = جتا $\theta$ (٢) جتا ٥ $\theta$ = جا $\theta$

١٣ أوجد قيم $\theta$ فى كل من الحالات الآتية حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ :

(١) قتا $(\theta + ١٥^\circ)$ = قا $٤٢^\circ$

(٢) حا $(\theta + ٣٠^\circ)$ = حتا $\theta$

(٣) 📖 حا $\theta$ − حتا $\theta$ = ٠

(٤) 📖 قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦})$ = قا $\theta$

(٥) ظا $(\theta + ٢٧^\circ)$ = ظتا ٢ $\theta$

(٦) ظا $(\theta + ١٠^\circ)$ = ظتا $(٤ \theta - ١٠^\circ)$

(٧) قا $(٢ \theta + ٣٥^\circ)$ = قتا $(٣ \theta - ١٠^\circ)$

(٨) قا $\theta$ = قتا $(٣ \theta - ٩٠^\circ)$

(٩) حا $(٤ \theta + ٤٨^\circ)$ = حتا $(\theta - ٣٣^\circ)$

(١٠) قتا ٨ $\theta$ = قا ٢ $\theta$

---

١٤ أوجد جميع قيم $\theta$ حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

(١) ظا $\theta$ − ١ = ٠

(٢) ٢ حتا $\theta$ − ١ = ٠

(٣) 📖 ٢ حتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = ١

(٤) ٢ حا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = $\sqrt{٣}$

---

١٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية علمًا بأن $\theta \in ]٠ ، ٢\pi]$ :

(١) ٢ حتا $\theta$ + ١ = ٠

(٢) قا $\theta$ − $\sqrt{٢}$ = ٠

(٣) ٢ حا $\theta$ − $\sqrt{٣}$ = ٠

(٤) حتا $\theta$ + ١ = ٠

(٥) ٢ حا $\theta$ + $\sqrt{٣}$ = ٠

(٦) ظا $\theta$ + ١ = ٠

(٧) $\sqrt{٣}$ قتا $\theta$ = −٢

(٨) حا$^٢$ $\theta$ = $\frac{١}{٤}$

---

١٦ 📖 إذا كان : حتا $(\frac{٣\pi}{٢} - \theta)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ = $\frac{١}{٢}$

فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية $\theta$ «$٣٠٠^\circ$»

---

١٧ إذا كان : حا $(٢ \theta + ١٥^\circ)$ = حتا $(\theta + ٣٠^\circ)$ حيث $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$

أوجد قيمة : قتا$^٢$ ٢ $\theta$ + ظتا$^٢$ ٣ $\theta$ + قا$^٢$ ٤ $\theta$ «٩»

---

١٨ إذا كان : $\frac{\text{حا } (٣ \theta - ٢٥^\circ)}{\text{حتا } (٢ \theta - ٣٥^\circ)} = ١$ فأوجد قيمة : $\theta$ حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

ثم أوجد قيمة : $\frac{\text{حا } ١٨^\circ}{\text{حتا } ٧٢^\circ}$ + حا $(١٨٠^\circ - \theta)$ «$٣٠^\circ$ ، $١\frac{١}{٢}$»

---

١٩ إذا كان : $\frac{\text{ظا } \theta}{\text{ظتا } ٢ \theta} = ١$ حيث $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ فأوجد قيمة : $\theta$

ثم أوجد قيمة : حا $(١٨٠^\circ - ٣ \theta)$ حتا $(٣٦٠^\circ - ٢ \theta)$ + ظا ٢ $\theta$ ظتا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ «$٣٠^\circ$ ، $٣\frac{١}{٢}$»

**٢٠** إذا كان : $\text{ظا}(\theta - ١٥^\circ) = \text{ظتا}(٢\theta + ١٥^\circ)$ حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

فأوجد قيمة $\theta$ ثم أثبت أن : $\frac{١ + \text{جا}(٢٧٠^\circ + ٢\theta)}{١ + \text{جا}(٩٠^\circ + ٢\theta)} = \frac{١}{٣}$ «$٣٠^\circ$»

---

**٢١** إذا كان : $\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث $٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

فأوجد قيمة المقدار : $\text{جا}(١٨٠^\circ - \theta) + \text{ظا}(٩٠^\circ - \theta) - \text{ظا}(٢٧٠^\circ - \theta)$ «$\frac{-٤}{٥}$»

---

**٢٢** إذا كان : $١٣\,\text{جتا}\,\theta = ١٢$ حيث $٩٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

أوجد قيمة : $١٣\,\text{جا}(١٨٠^\circ - \theta) - ١٠\,\text{جا}^٢ ٤٥^\circ\,\text{ظا}^٢ ٦٠^\circ + ٥٠\,\text{جا}\,١٥٠^\circ$ «٥٠»

---

**٢٣** إذا كان : $١٥\,\text{ظا}\,\theta + ٨ = ٠$ ، $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية $\theta$

ثم أوجد قيمة كل من : $٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ ، $\text{قا}(١٠٨٠^\circ + \theta)$ «$\frac{-٢٤٠}{٢٨٩}$ ، $\frac{-١٧}{١٥}$»

---

**٢٤** إذا كان : $\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فأوجد قيمة $\theta$ ثم :

(١) أوجد قيمة : $\frac{١ - ٢\,\text{ظتا}(٢٧٠^\circ - \theta)}{١ + \text{جتا}^٢(٢٧٠^\circ + \theta)}$

(٢) أثبت أن : $\text{جتا}\,٢\theta = \frac{١ - \text{ظا}^٢(٢٧٠^\circ - \theta)}{\text{قتا}^٢(٩٠^\circ + \theta)}$ «$٤٥^\circ$ ، $\frac{-٣}{٣}$»

---

**٢٥** إذا كانت ب $(-٥\,ك ، -١٢\,ك)$ هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها $\theta$ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة ، $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$

أوجد قيمة : $\text{قتا}(٩٠^\circ - \theta)\,\text{جا}(٩٠^\circ + \theta) + ١٢\,\text{ظا}(٢٧٠^\circ + \theta)$ «$-٤$»

---

**٢٦** إذا كان : $١٣\,\text{جا}\,\theta - ٥ = ٠$ حيث $\theta \in ]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$

أوجد قيمة كل من : $\text{قتا}(٢٧٠^\circ + \theta)$ ، $\text{جتا}(\theta - ٢٧٠^\circ)$ ، $\text{ظا}(٢٧٠^\circ + \theta)$

ثم أثبت أن : $\text{جا}(٢٧٠^\circ - \theta) \times \text{قا}(٢٧٠^\circ + \theta) \times \text{ظتا}(٢٧٠^\circ + \theta) = \text{جا}\,٩٠^\circ$

---

**٢٧** إذا كانت : $\text{جتا}^٢ \propto = \frac{٩}{٢٥}$ حيث $٩٠^\circ < \propto < ١٨٠^\circ$ أوجد قيمة : $٢٥\,\text{جا} \propto - ٤\,\text{ظتا} \propto$ «٢٣»

---

**٢٨** إذا كان : $\text{ظا} \propto = \frac{٣}{٤}$ حيث $\propto$ أصغر زاوية موجبة ، $\text{ظا}\,\beta = \frac{٥}{١٢}$ حيث $١٨٠^\circ < \beta < ٢٧٠^\circ$

أوجد الدوال المثلثية لكل من الزاويتين $\propto$ ، $\beta$ ثم أوجد قيمة : $\text{جا} \propto \text{جتا}\,\beta - \text{جتا} \propto \text{جا}\,\beta$ «$\frac{-١٦}{٦٥}$»

---

**٢٩** إذا كان : $\text{جا} \propto = \frac{٣}{٥}$ حيث $\propto \in ]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، $١٣\,\text{جتا}\,\beta - ٥ = ٠$ حيث $\beta \in ]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

أوجد قيمة : $\text{جتا} \propto \text{جتا}\,\beta + \text{جا} \propto \text{جا}\,\beta$ «$\frac{-٥٦}{٦٥}$»

**٣٠** إذا كان : ٢٥ جا $\alpha$ + ٢٤ = ٠ حيث ١٨٠° < $\alpha$ < ٢٧٠° ، ٥ ظا $\beta$ + ١٢ = ٠

حيث $\beta$ أكبر زاوية موجبة ، $\beta \in$ ]٠° ، ٣٦٠°[ أوجد قيمة :

(١) جا (١٨٠° + $\alpha$) + جتا (١٨٠° − $\beta$)

(٢) قتا (١٨٠° + $\alpha$) ظتا (٩٠° − $\beta$) − قا (٣٦٠° + $\alpha$) ظا (٣٦٠° − $\beta$)

(٣) قتا (٩٠° + $\alpha$) ظتا (٢٧٠° + $\beta$) ظا (٢٧٠° − $\alpha$) قتا (٢٧٠° + $\beta$)

«$\frac{١٨٧}{٣٢٥}$ ، $\frac{٨٥}{١٤}$ ، ٦$\frac{١}{٢}$»

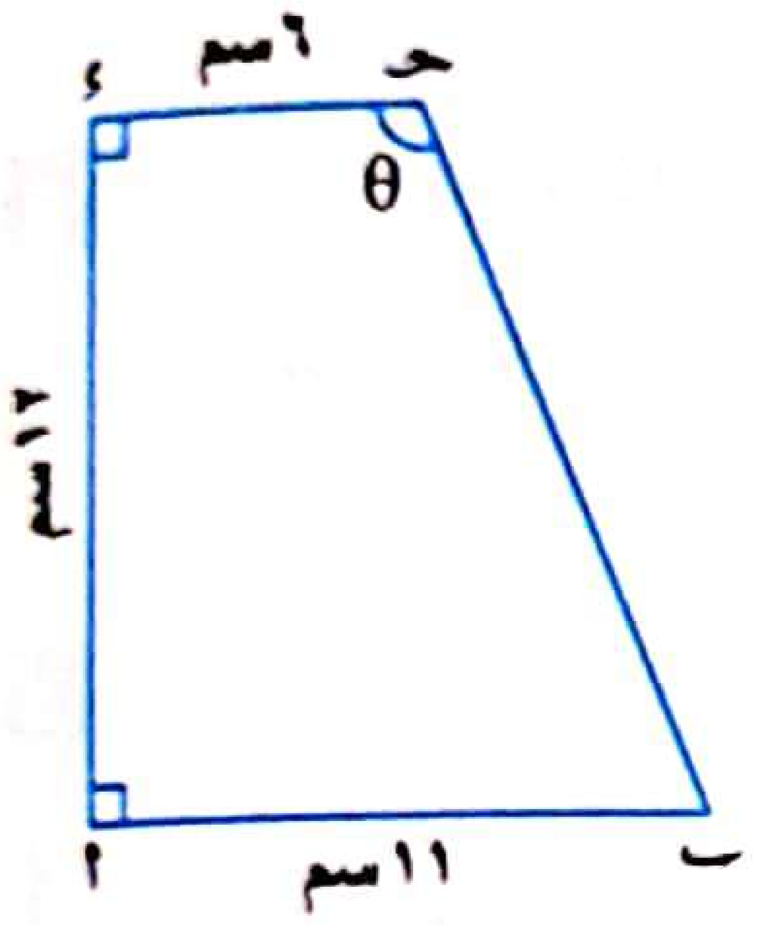
---

**٣١** إذا كان الضلع النهائى للزاوية التى قياسها (٩٠° − $\theta$) يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{٥}{١٣}$ ، ص)

فأوجد الدوال المثلثية للزاوية $\theta$ حيث $\theta \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

---

**٣٢** فى الشكل المقابل :




أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٩٠°

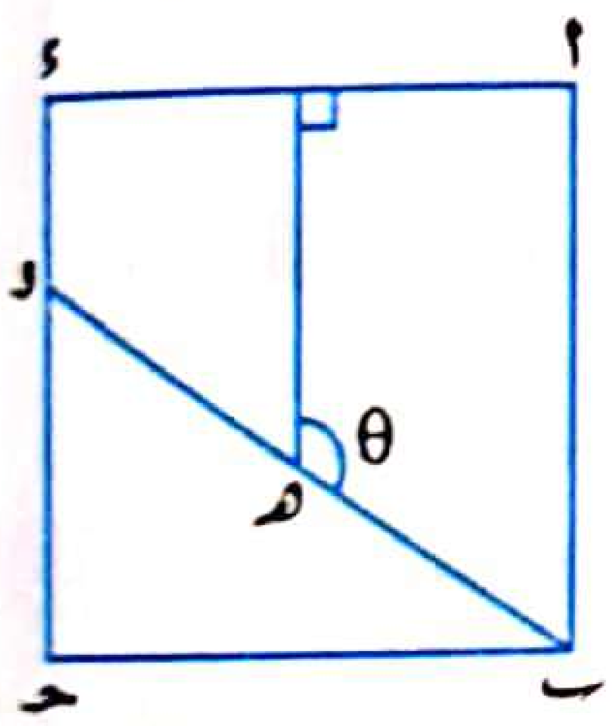
، حـ ء = ٦ سم ، ء أ = ١٢ سم ، أ ب = ١١ سم

أوجد : جا $\theta$

«$\frac{١٢}{١٣}$»

---

**٣٣** فى الشكل المقابل :




أ ب حـ ء مربع فيه : ٢ ء و = و حـ

أوجد : قا $\theta$

«$\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$»

## اكتشف الخطأ

**٣٤** فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة : جا ($\theta$ − $\frac{\pi}{٢}$)

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسِّر ذلك.

**إجابة كريم**

جا ($\theta$ − $\frac{\pi}{٢}$) = جا (٢$\pi$ + $\theta$ − $\frac{\pi}{٢}$)

= جا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + $\theta$)

= − جتا $\theta$

**إجابة زياد**

جا ($\theta$ − $\frac{\pi}{٢}$) = جا [− ($\frac{\pi}{٢}$ − $\theta$)]

= − جا ($\frac{\pi}{٢}$ − $\theta$)

= − (− جتا $\theta$) = جتا $\theta$

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٣٥** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ١٣٥° = ..............

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) حا ٧٥° × حتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ..............

(أ) ١ + $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ − ١ (جـ) ٢ (د) ١

(٣) إذا كانت النقاط أ ، ب ، حـ على شبكة تربيعية حيث أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ١) ، حـ (٠ ، −٢)

فإن : حا (∠ب أ حـ) = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{\sqrt{١٧}}$ (د) $\frac{-٤}{\sqrt{١٧}}$

(٤) $\frac{\text{قا ١° × قا ٢° × ... × قا ٨٨° × قا ٨٩°}}{\text{قتا ١° × قتا ٢° × ... × قتا ٨٨° × قتا ٨٩°}}$ = ..............

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩٠

(٥) $\frac{\text{حا}(٦٠\pi + \theta) + \text{حتا}(٩٠\pi + \theta)}{\text{حتا}(\frac{٥\pi}{٢} + \theta) - \text{حا}(\frac{٩\pi}{٢} + \theta)}$ = ..............

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٦) إذا كان : ٧ س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{حتا ٤ س}} + \frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{ظتا ٥ س}}$ = ..............

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٧) إذا كان : س + ص = ٣٠° فإن :

**أولًا :** ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص) = ..............

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) حا (س − ص) (د) حتا (س − ص)

**ثانيًا :** حا (٣ س + ٢ ص) + حا (٩ س + ٨ ص) = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) حتا س (د) حتا ص

(٨) إذا كان : د (س) = حا ٢ س

فإن : د (هـ) + د $(\text{هـ} + \frac{\pi}{٢})$ + د (هـ + π) + د $(\text{هـ} + \frac{٣\pi}{٢})$ + ...

+ د (هـ + ٩٩ π) + د $(\text{هـ} + \frac{١٩٩}{٢}\pi)$ = ..............

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

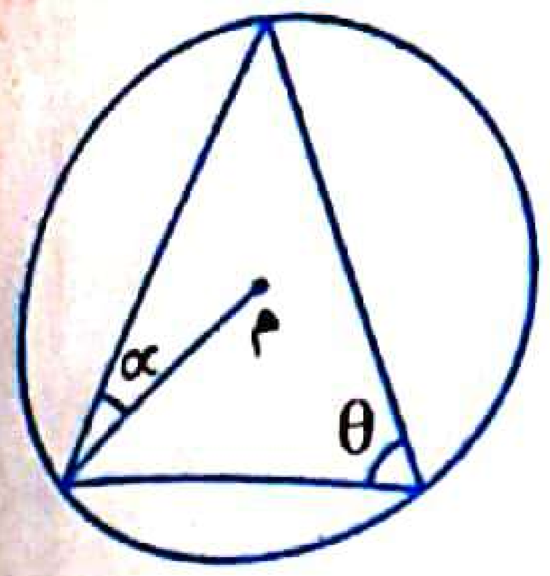
(٩) إذا كانت : حتا² θ = ١ فإن : θ = .............. حيث ن ∈ ص

(أ) ن π (ب) $\frac{ن}{٢}$ π (جـ) ٢ ن π (د) (٢ ن + ١) π

(١٠) عدد حلول المعادلة : ظا س = −$\sqrt{٣}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ١٥ π هو ..............

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

**(١١)** في الشكل المقابل :

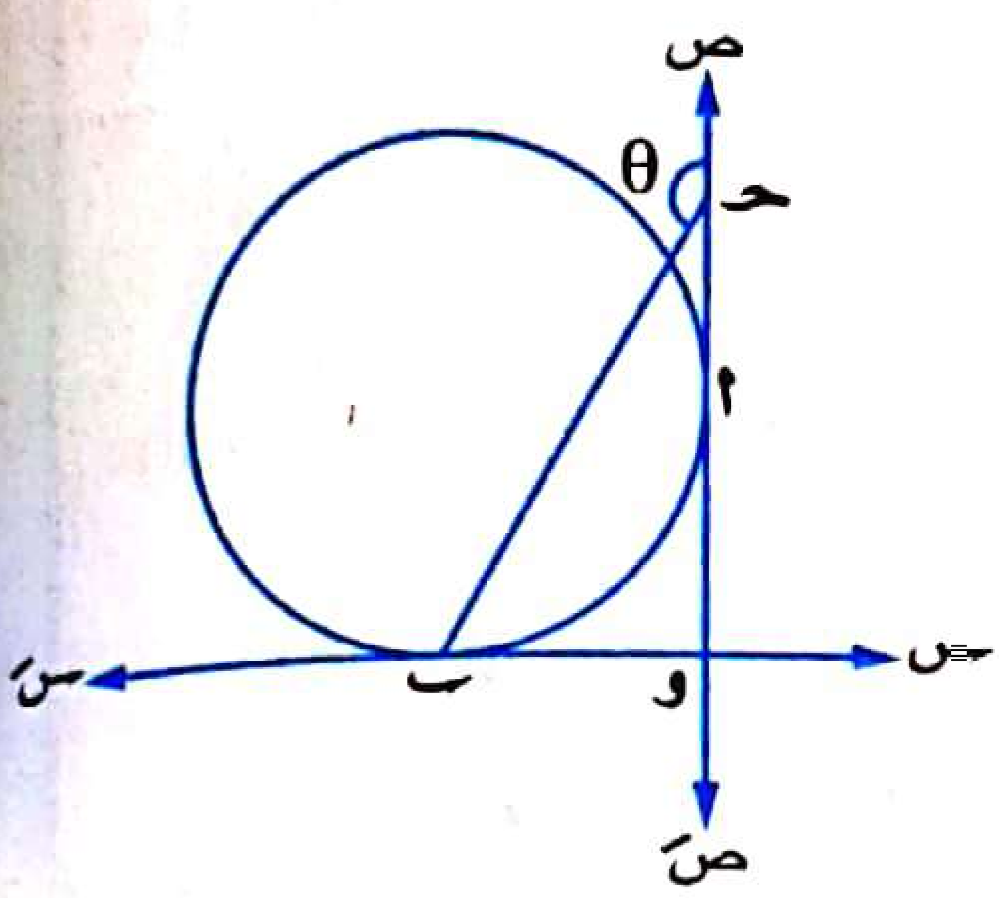



دائرة مركزها م

فإن : طا θ = ..............

(أ) طا ∝ (ب) طتا ∝ (جـ) حتا ∝ (د) حا ∝

**(١٢)** في الشكل المقابل :



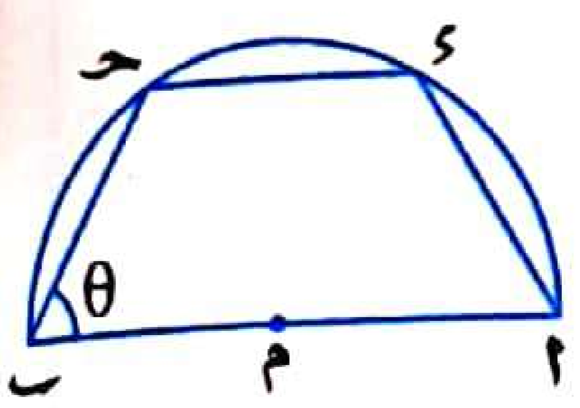

إذا كان : أ (٠ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٤)

فإن : حتا θ = ..............

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

**(١٣)** في الشكل المقابل :



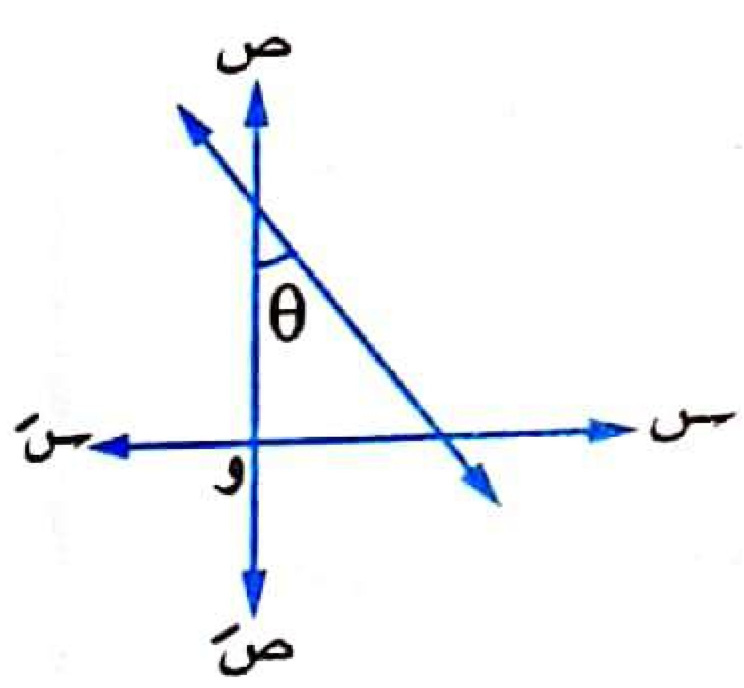

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطرًا في نصف دائرة م

، ١٣ حا θ = ١٢

فإن : حتا (∠ أ ء حـ) = ..............

(أ) $\frac{-١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٣}$ (د) $\frac{١٢}{١٣}$

**(١٤)** في الشكل المقابل :




إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي

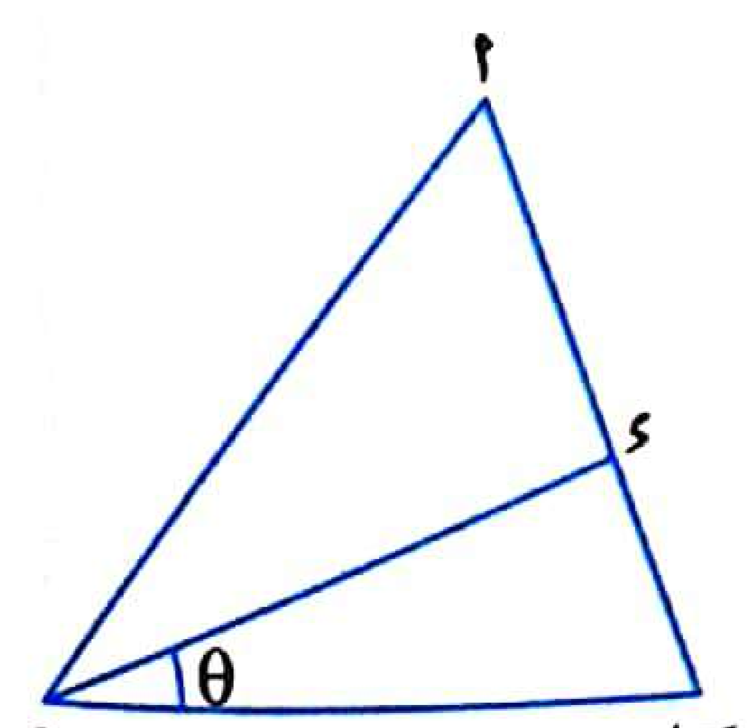
ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥ ، θ زاوية حادة تتكون

من تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات

فإن : ..............

(أ) حتا θ = $\frac{٣}{٤}$ (ب) حا θ = $\frac{٤}{٣}$ (جـ) طا θ = $\frac{٤}{٣}$ (د) حا θ = $\frac{٣}{٥}$

**(١٥)** في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث ٢ أ ء = ٣ ب ء

فإن : طا θ = ..............

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

**٣٦** أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية في حـ ، حا حـ = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد : حا (أ + ب + ٢ حـ)

«$\frac{-٣}{٥}$»

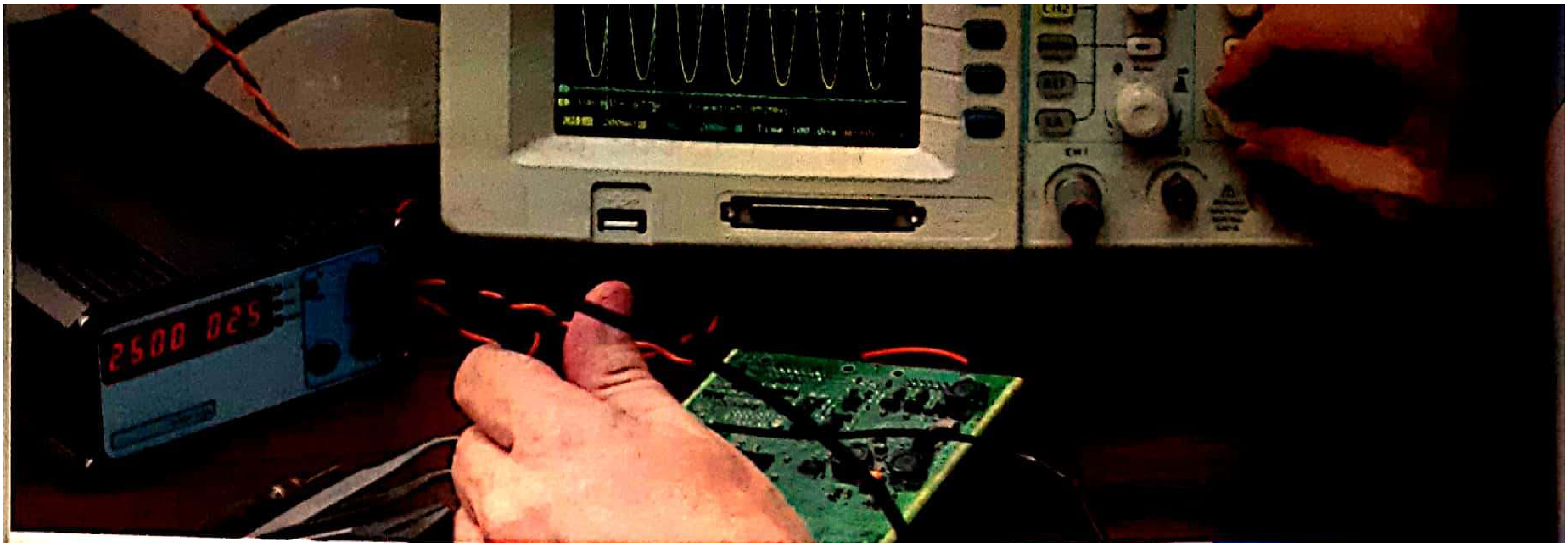
**٣٧** أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) حتا ٢٠° + حتا ٤٠° + حتا ٦٠° + ... + حتا ١٦٠° + حتا ١٨٠°

«-١»

(٢) حا ١° + حا ٢° + حا ٣° + ... + حا ٣٥٨° + حا ٣٥٩°

«صفر»



الدرس 5

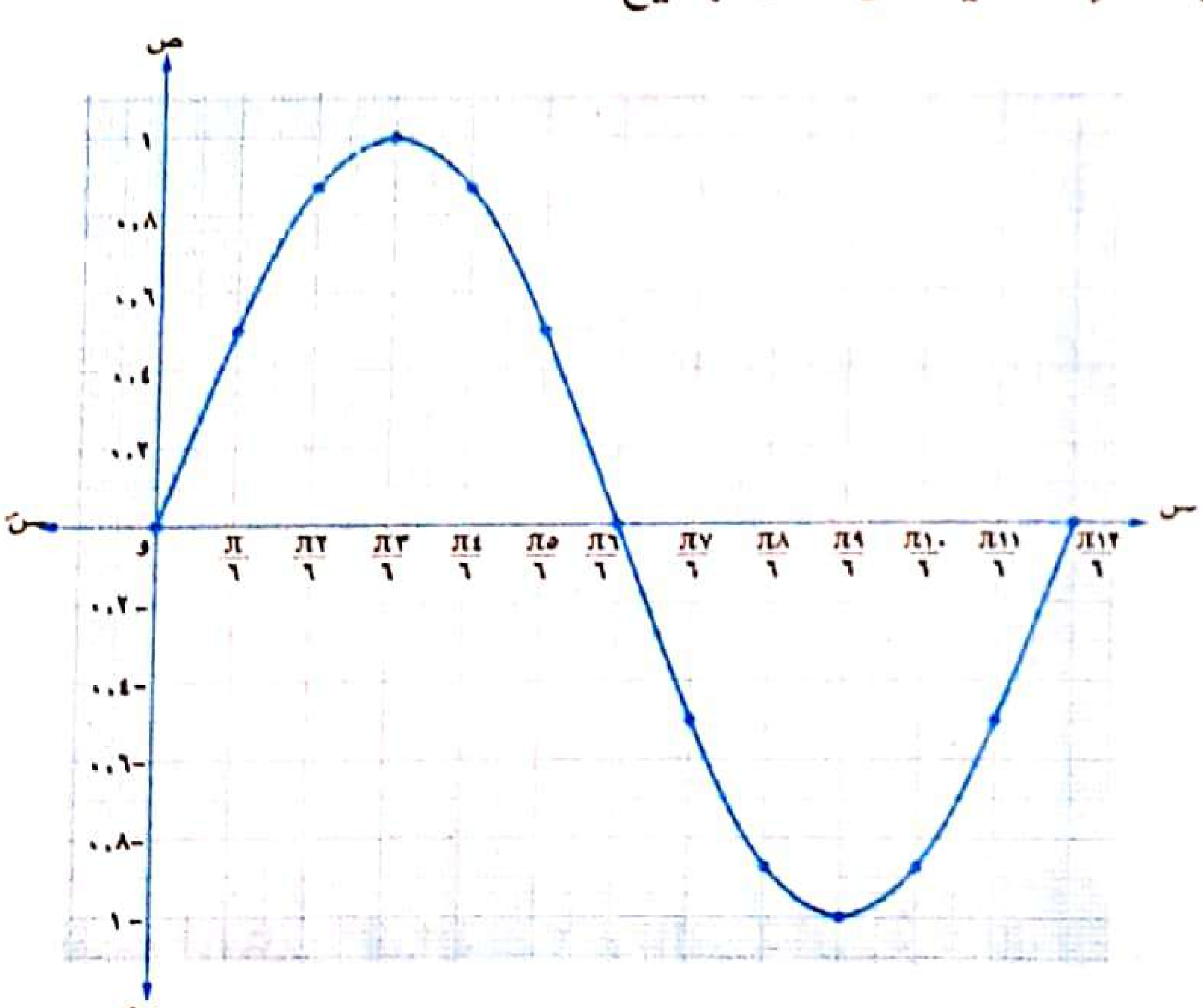
# التمثيل البيانى للدوال المثلثية

## أولًا دالة الجيب د : د (θ) = جا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جا θ بيانيًا نكوِّن جدولًا من بعض قيم θ الخاصة حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] وقيم جا θ المناظرة لها.

| θ | ٠ | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{٢\pi}{٦}$ | $\frac{٣\pi}{٦}$ | $\frac{٤\pi}{٦}$ | $\frac{٥\pi}{٦}$ | π | $\frac{٧\pi}{٦}$ | $\frac{٨\pi}{٦}$ | $\frac{٩\pi}{٦}$ | $\frac{١٠\pi}{٦}$ | $\frac{١١\pi}{٦}$ | ٢ π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جا θ | ٠ | ٠,٥ | ٠,٨٧ | ١ | ٠,٨٧ | ٠,٥ | ٠ | -٠,٥ | -٠,٨٧ | -١ | -٠,٨٧ | -٠,٥ | ٠ |

نعيِّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة [٠ ، ٢ π]



### ونلاحظ أن

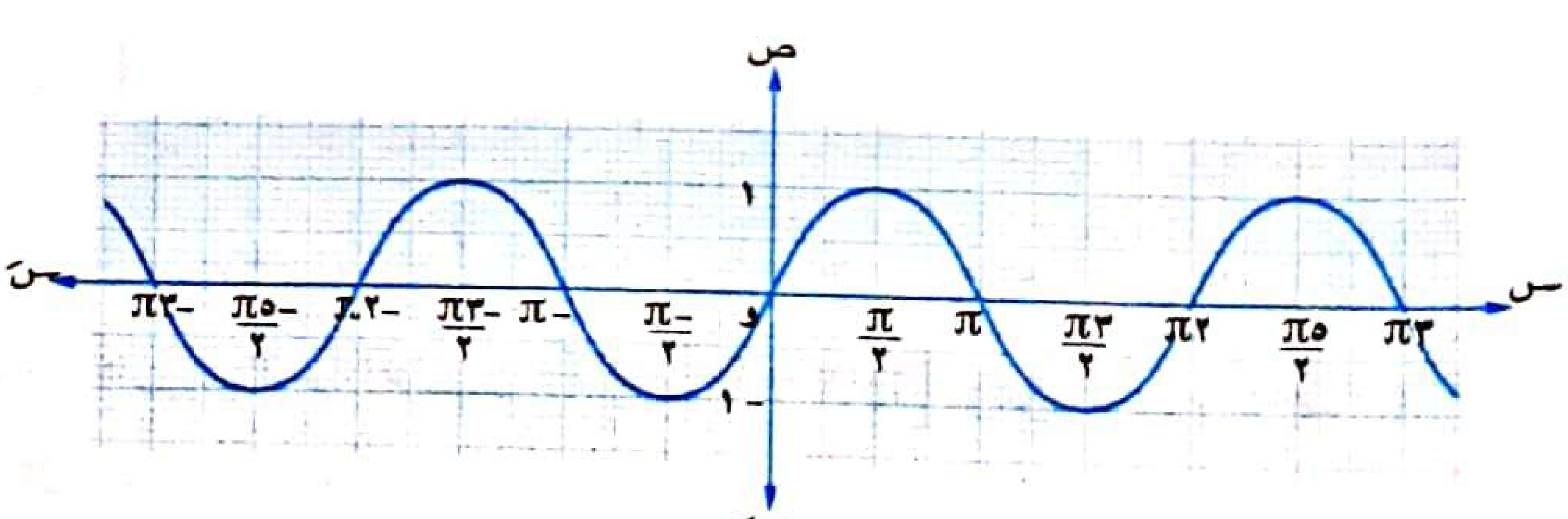
الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات [٠ ، ٢ π]

، [٢ π ، ٤ π]، [٤ π ، ٦ π] ، ...

وكذلك فى الفترات [-٢ π ، ٠]

، [-٤ π ، -٢ π] ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



**مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة الجيب د : د (θ) = جا θ**

[١] مجال دالة الجيب هو ]− ∞ ، ∞[

[٢] • القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

• القيمة الصغرى للدالة تساوى −١ وتحدث عندما $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

[٣] مدى الدالة = [−١ ، ١]

[٤] الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°)

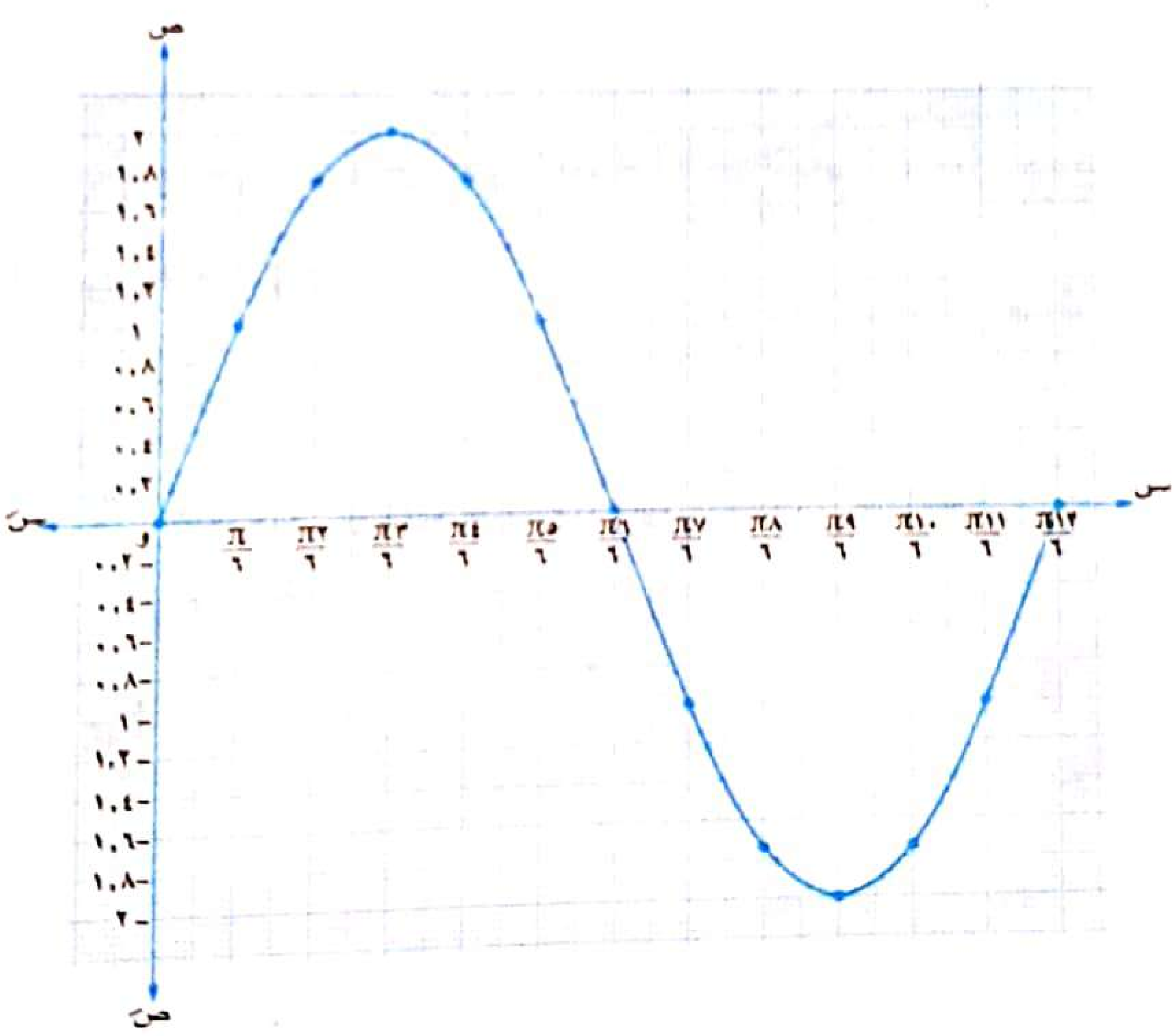
## مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٢ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومداها واذكر دورتها.

## الحل

| θ | ٠ | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{٢\pi}{٦}$ | $\frac{٣\pi}{٦}$ | $\frac{٤\pi}{٦}$ | $\frac{٥\pi}{٦}$ | π | $\frac{٧\pi}{٦}$ | $\frac{٨\pi}{٦}$ | $\frac{٩\pi}{٦}$ | $\frac{١٠\pi}{٦}$ | $\frac{١١\pi}{٦}$ | ٢ π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ١ | ١,٧ | ٢ | ١,٧ | ١ | ٠ | −١ | −١,٧ | −٢ | −١,٧ | −١ | ٠ |



• القيمة العظمى للدالة = ٢ ، القيمة الصغرى للدالة = −٢

• مدى الدالة = [−٢ ، ٢]

• دورة الدالة = ٢ π (أى ٣٦٠°)

## حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] ومن الرسم أوجد :

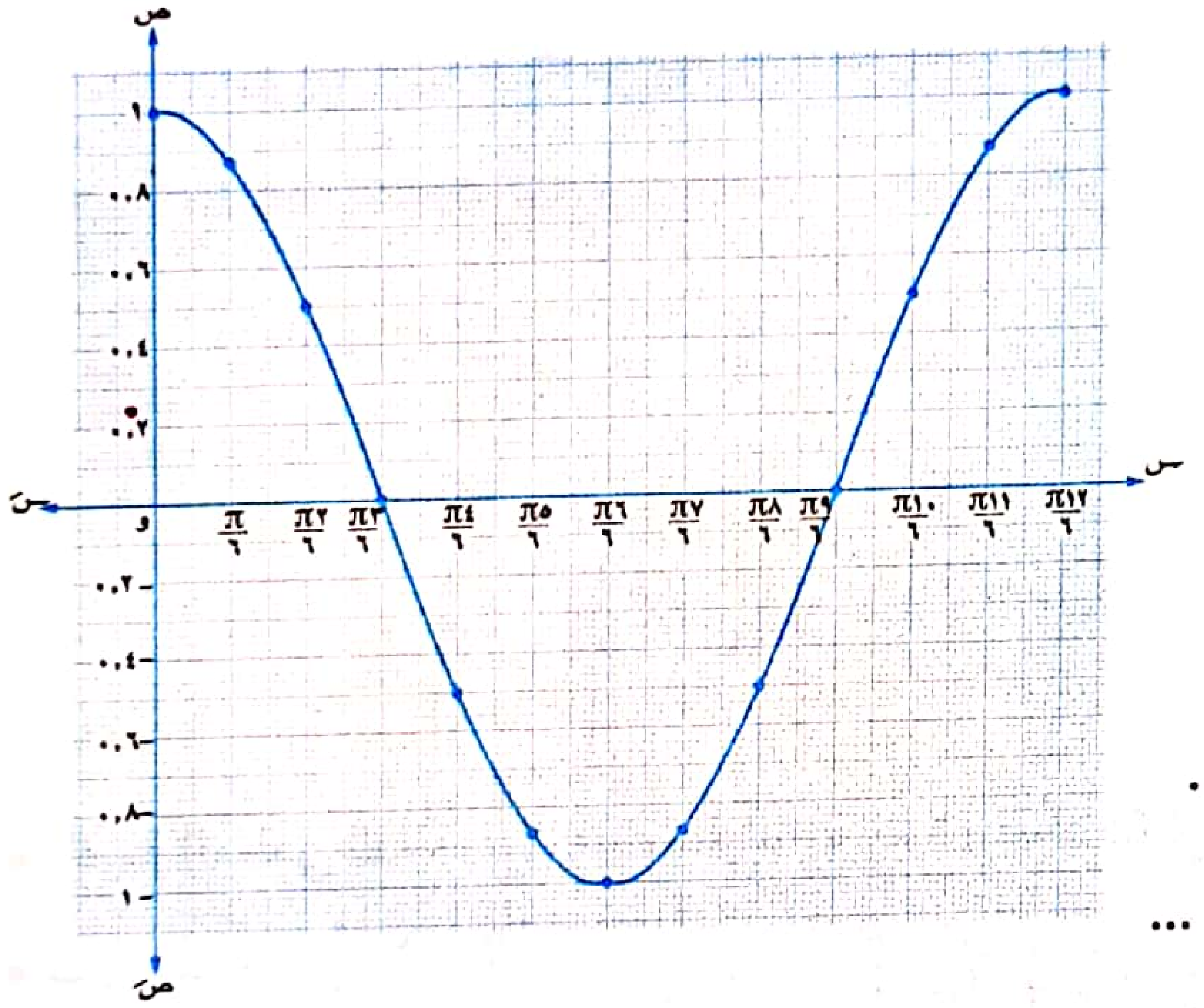
[١] القيم العظمى والصغرى للدالة.
[٢] مدى الدالة.
[٣] دورة الدالة.

## ثانيًا دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جتا θ بيانيًا نكوِّن جدولًا من بعض قيم θ الخاصة حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π] وقيم جتا θ المناظرة لها

| θ | ٠ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{8\pi}{6}$ | $\frac{9\pi}{6}$ | $\frac{10\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | ٢ π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جتا θ | ١ | ٠,٨٧ | ٠,٥ | ٠ | −٠,٥ | −٠,٨٧ | −١ | −٠,٨٧ | −٠,٥ | ٠ | ٠,٥ | ٠,٨٧ | ١ |

نعيِّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة [٠ ، ٢ π]



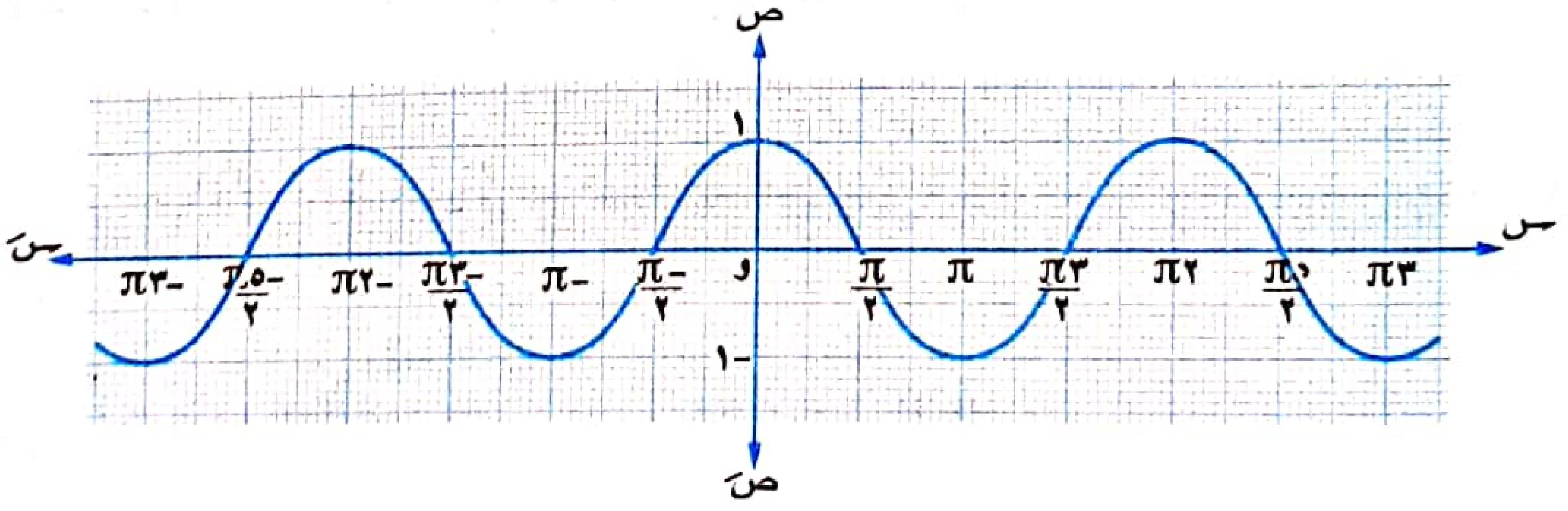
### ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات

[٠ ، ٢ π] ، [٢ π ، ٤ π] ، [٤ π ، ٦ π] ، ...

وكذلك فى الفترات [−٢ π ، ٠] ، [−٤ π ، −٢ π] ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



**مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ**

١ مجال دالة جيب التمام هو ]− ∞ ، ∞[

٢ • القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما θ = ٢ ن π حيث ن ∈ ص

• القيمة الصغرى للدالة تساوى −١ وتحدث عندما θ = π + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

٣ مدى الدالة = [−١ ، ١]

٤ الدالة دورية ودورتها ٢ π (أى ٣٦٠°)

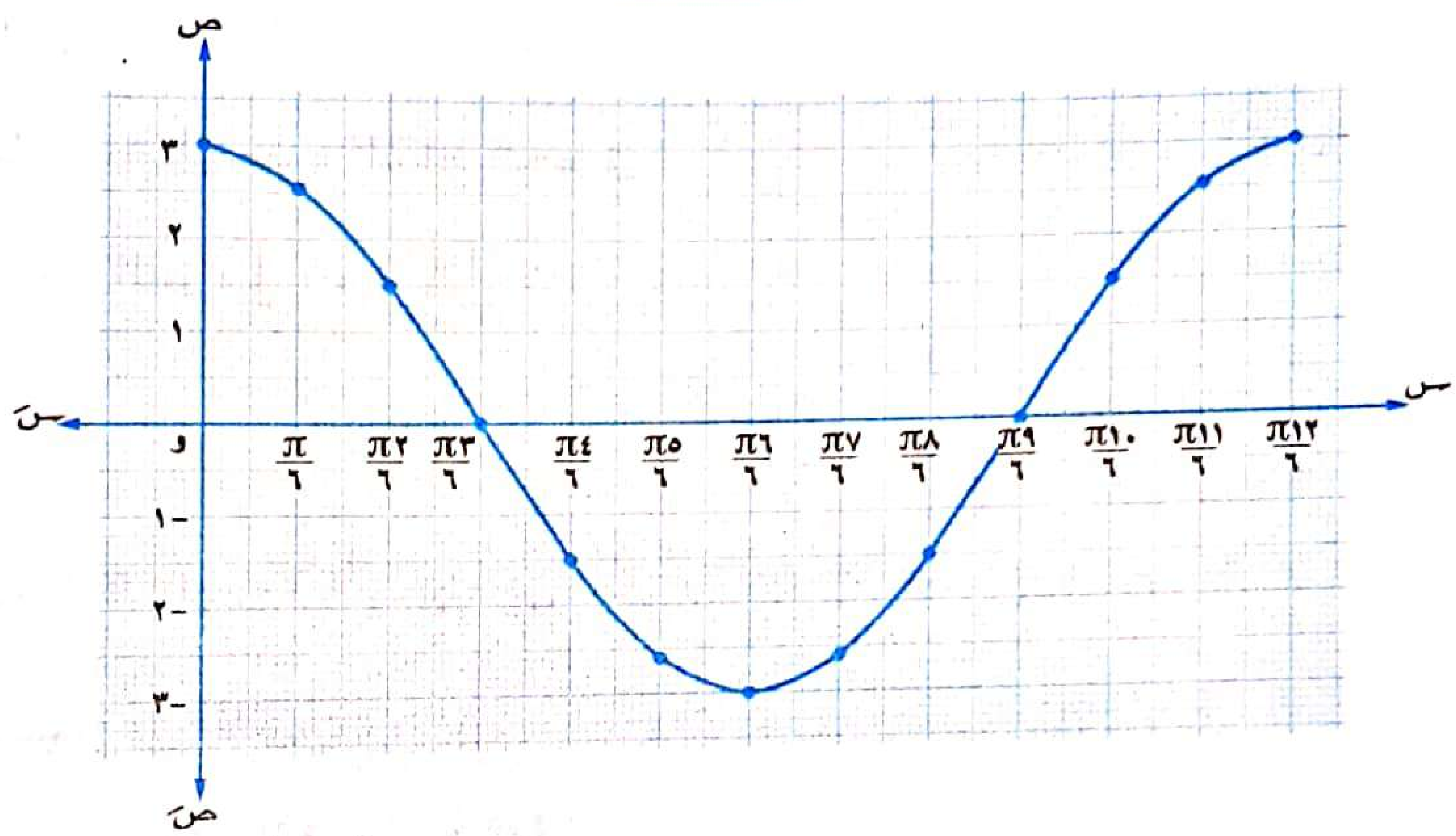
## مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها.

### الحل

| θ | ٠ | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{٢\pi}{٦}$ | $\frac{٣\pi}{٦}$ | $\frac{٤\pi}{٦}$ | $\frac{٥\pi}{٦}$ | π | $\frac{٧\pi}{٦}$ | $\frac{٨\pi}{٦}$ | $\frac{٩\pi}{٦}$ | $\frac{١٠\pi}{٦}$ | $\frac{١١\pi}{٦}$ | ٢ π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ٢,٦ | ١,٥ | ٠ | −١,٥ | −٢,٦ | −٣ | −٢,٦ | −١,٥ | ٠ | ١,٥ | ٢,٦ | ٣ |




- القيمة العظمى للدالة = ٣ ، القيمة الصغرى للدالة = −٣
- مدى الدالة = [−٣ ، ٣]
- دورة الدالة = ٢ π (أى ٣٦٠°)

## حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : د (θ) = ٢ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم استنتج :

١ القيم العظمى والصغرى للدالة.
٢ مدى الدالة.
٣ دورة الدالة.

## ملاحظة

كل من الدالتين : ص = أ جا ب θ ، ص = أ جتا ب θ دالة دورية دورتها $\frac{٢\pi}{|ب|}$ ومداها [−أ ، أ] حيث أ موجبة.

**فمثلًا** الدالة د : د (س) = ٣ جا ٥ س مداها [−٣ ، ٣] ودورتها $\frac{٢\pi}{٥}$

## مثال ٣

### استخدام التكنولوجيا

باستخدام أحد برامج الكمبيوتر الرسومية مثل بيانيًا الدالة ص = ٥ جا ٣ θ ومن الرسم أوجد :

- مدى الدالة.
- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.
- دورة الدالة.

### الحل

سوف نستخدم برنامج GeoGebra الذى تستطيع تنزيله مجانًا من الموقع www.geogebra.org

١ اكتب فى شريط الإدخال (input) صيغة الدالة كالآتى : Y = 5 sin (3 x)

٢ اضغط زر الإدخال (Enter) فى جهازك وسوف يظهر لك الشكل البيانى للدالة كما فى الشكل التالى :




- مدى الدالة = [−٥ ، ٥]
- القيمة العظمى = ٥ ، القيمة الصغرى = −٥
- دورة الدالة = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$ أى ١٢٠°

**ملاحظة :**

يمكن رسم الدالة ص = ٥ جا ٣ θ (بالمثال السابق) حيث : ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠° بدون استخدام جهاز الكمبيوتر كما يلى :

∵ ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠° ∴ ٠° ≤ ٣ θ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٣ θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة : ٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ... ، ٣٦٠°

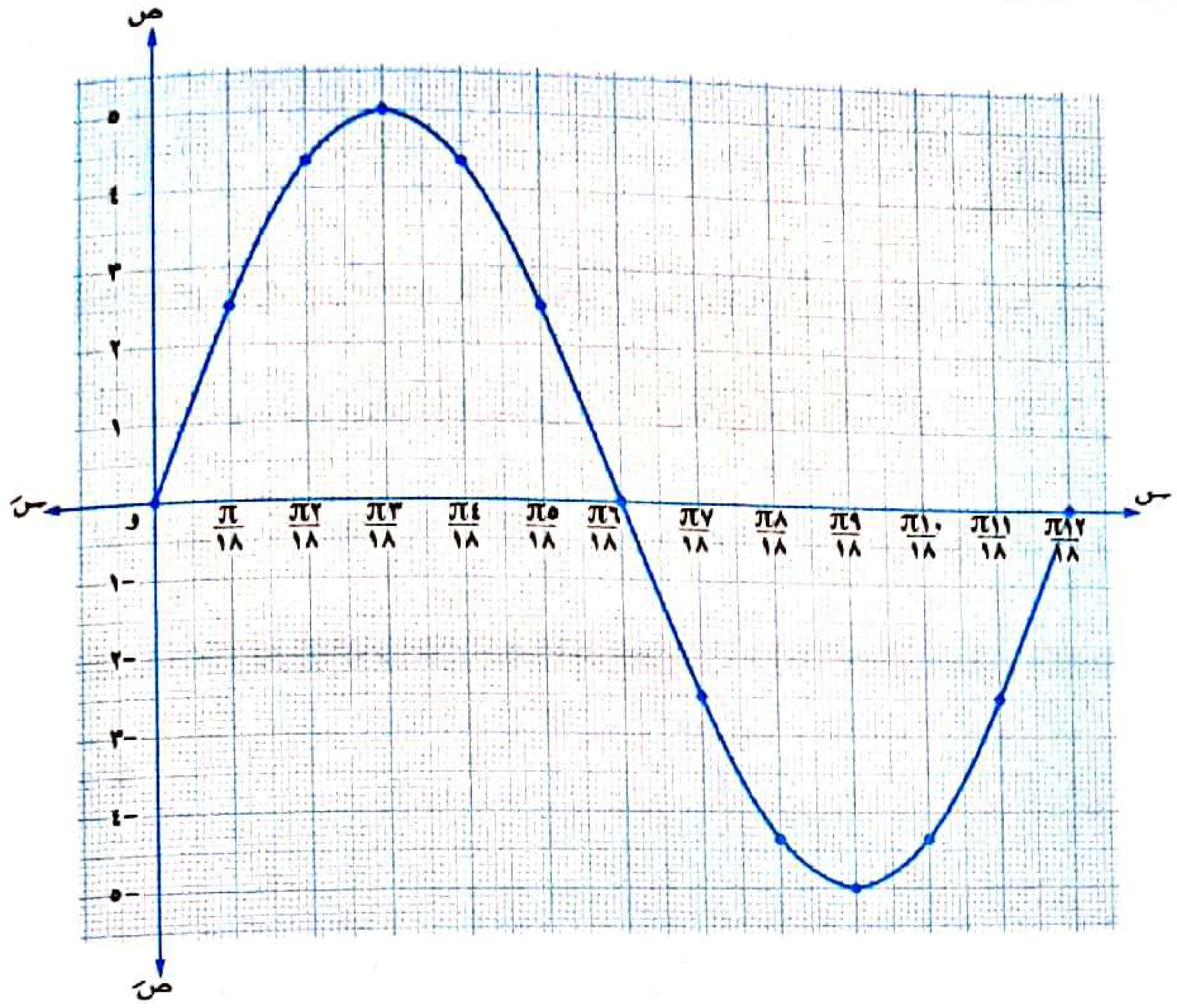
نحصل على قيم θ بالقسمة على ٣ وهى : ٠° ، ١٠° ، ٢٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ... ، ١٢٠°

وهى تكافئ : ٠ ، $\frac{\pi}{18}$ ، $\frac{2\pi}{18}$ ، $\frac{3\pi}{18}$ ، ... ، $\frac{12\pi}{18}$

ثم نكوّن الجدول الآتى :

| θ | ٠ | $\frac{\pi}{18}$ | $\frac{2\pi}{18}$ | $\frac{3\pi}{18}$ | $\frac{4\pi}{18}$ | $\frac{5\pi}{18}$ | $\frac{6\pi}{18}$ | $\frac{7\pi}{18}$ | $\frac{8\pi}{18}$ | $\frac{9\pi}{18}$ | $\frac{10\pi}{18}$ | $\frac{11\pi}{18}$ | $\frac{12\pi}{18}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص = ٥ جا ٣ θ | ٠ | ٢,٥ | ٤,٣ | ٥ | ٤,٣ | ٢,٥ | ٠ | −٢,٥ | −٤,٣ | −٥ | −٤,٣ | −٢,٥ | ٠ |

وهذا الشكل يمثل دورة واحدة للدالة ص = ٥ جا ٣ θ والتى يمكن تكرارها للحصول على الشكل الذى ظهر لنا عند تمثيلها باستخدام الكمبيوتر.



# على التمثيل البيانى للدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة د : د ($\theta$) = جا $\theta$ هو ..............

(أ) {١ ، -١}　　(ب) [-١ ، ١]　　(جـ) ]-١ ، ١[　　(د) ]-∞ ، ∞[

(٢) إذا كانت : د ($\theta$) = جتا ٥ $\theta$ فإن مدى الدالة هو ..............

(أ) {-٥ ، ٥}　　(ب) [-١ ، ١]　　(جـ) ]-٥ ، ٥[　　(د) [-٥ ، ٥]

(٣) القيمة العظمى للدالة ع : ع ($\theta$) = ٤ جا $\theta$ هى ..............

(أ) ٤　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) ∞

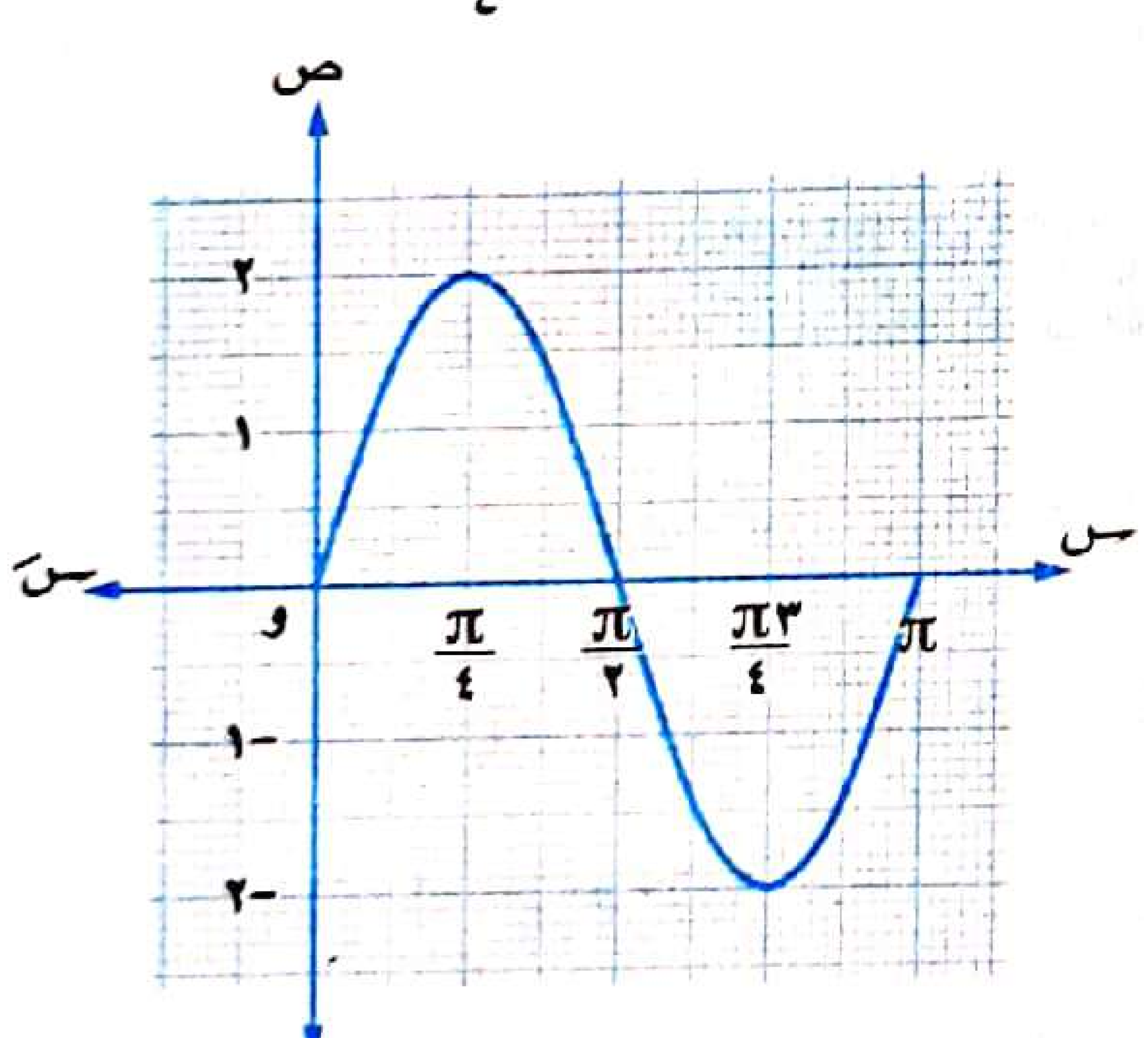
(٤) القيمة الصغرى للدالة ع : ع ($\theta$) = ٥ جتا ٧ $\theta$ هى ..............

(أ) ٥　　(ب) صفر　　(جـ) -٥　　(د) -٧

(٥) الدالة د : د ($\theta$) = ٢ جا ٤ $\theta$ دالة دورية ودورتها تساوى ..............

(أ) ٢ $\pi$　　(ب) $\pi$　　(جـ) $\frac{\pi}{٢}$　　(د) $\frac{\pi}{٤}$

(٦) الشكل المقابل يمثل دورة واحدة لمنحنى دالة مثلثية :




ص = د (س) فإن قاعدة الدالة هى ..............

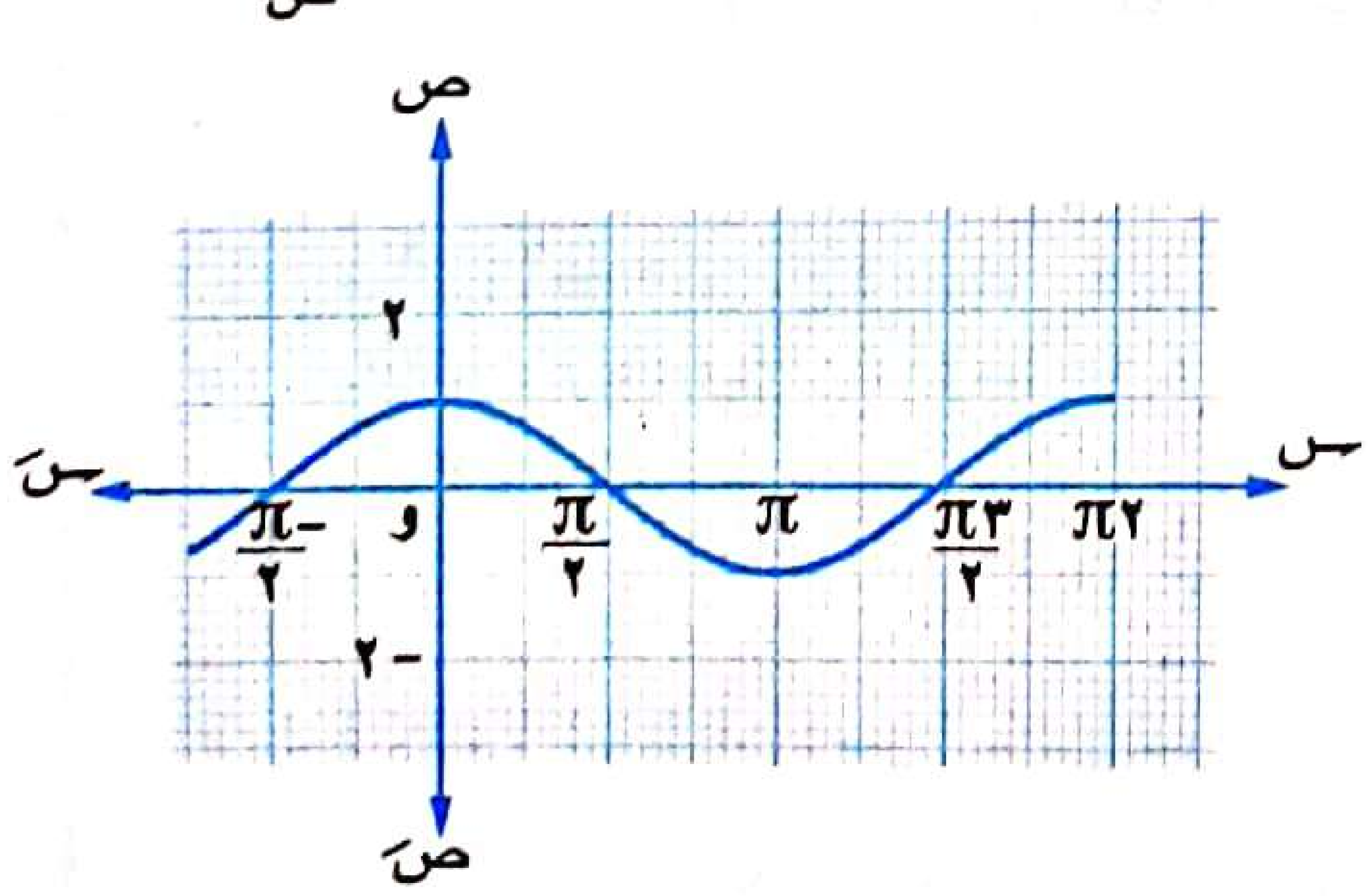
(أ) ص = ٢ جا س

(ب) ص = جا ٢ س

(جـ) ص = ٢ جا ٢ س

(د) ص = جا س

(٧) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة مثلثية :




ص = د (س) فإن قاعدة الدالة هى ..............

(أ) ص = جا $\theta$

(ب) ص = جتا $\theta$

(جـ) ص = ٢ جتا $\theta$

(د) ص = ٢ جا $\theta$

**٢** أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = $\frac{١}{٢}$ جا $\theta$　　(٢) ص = $\frac{١}{٣}$ جا ٢ $\theta$　　(٣) ص = ٢ جا ٣ $\theta$

**٣ ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :**

(١) ص = ٤ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢π]

(٢) ص = ٤ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢π]

(٣) ص = ٢ جتا θ حيث θ ∈ [-٢π ، ٢π]

(٤) ص = ٣ جا θ حيث θ ∈ [-٢π ، ٢π]

---

**٤ ارسم الشكل البيانى لكل من الدالتين الآتيتين ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :**

(١) ص = جتا ٣ θ حيث ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠°

(٢) ص = ٥ جا ٢ θ حيث ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

---

**٥** مثل كلًا من الدالتين ص = ٤ جتا θ ، ص = ٣ جا θ باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد :

(١) مدى الدالة.  (٢) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.

**مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير**

**٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : $\frac{٢ - جا س}{٣}$ = م فإن : ..............

(أ) $\frac{١}{٣}$ ≤ م ≤ ١  (ب) $\frac{٢}{٣}$ ≤ م ≤ ٣  (جـ) ١ ≤ م ≤ ٣  (د) ٢ ≤ م ≤ ٤

(٢) الدالة ص = جا $\left(\frac{\pi}{٤} + س\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٢}$  (ب) $\frac{-\pi}{٢}$  (جـ) $\frac{\pi}{٤}$  (د) صفر

(٣) الدالة د : د (س) = جا (ب س) دالة دورية ودورتها $\frac{٢\pi}{٣}$ فإن : ب = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$  (ب) $\frac{١}{٣}$  (جـ) ٣  (د) ٦

(٤) إذا كانت النقطتان (س$_١$ ، جتا س$_١$) ، (س$_٢$ ، جتا س$_٢$) تقعان على منحنى الدالة د : د (س) = جتا س فإن أكبر قيمة للمقدار (جتا س$_١$ - جتا س$_٢$) = ..............

(أ) ١  (ب) ٢  (جـ) صفر  (د) ١٨٠°

(٥) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ دالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{٢}$ ومداها [−١ ، ١]

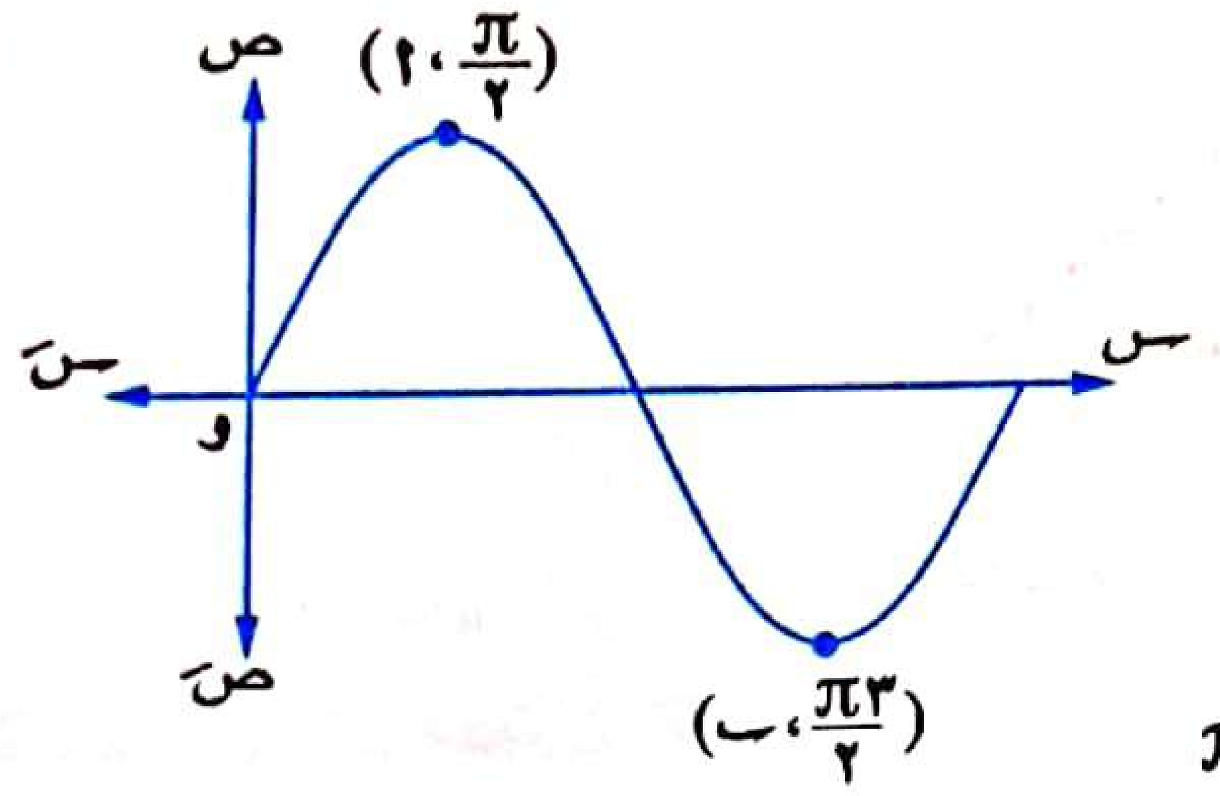
فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٦) إذا كان الشكل المقابل يوضح

منحنى ص = جا س

فإن : |أ| + |ب| = ...............




(أ) ١ (ب) ٢

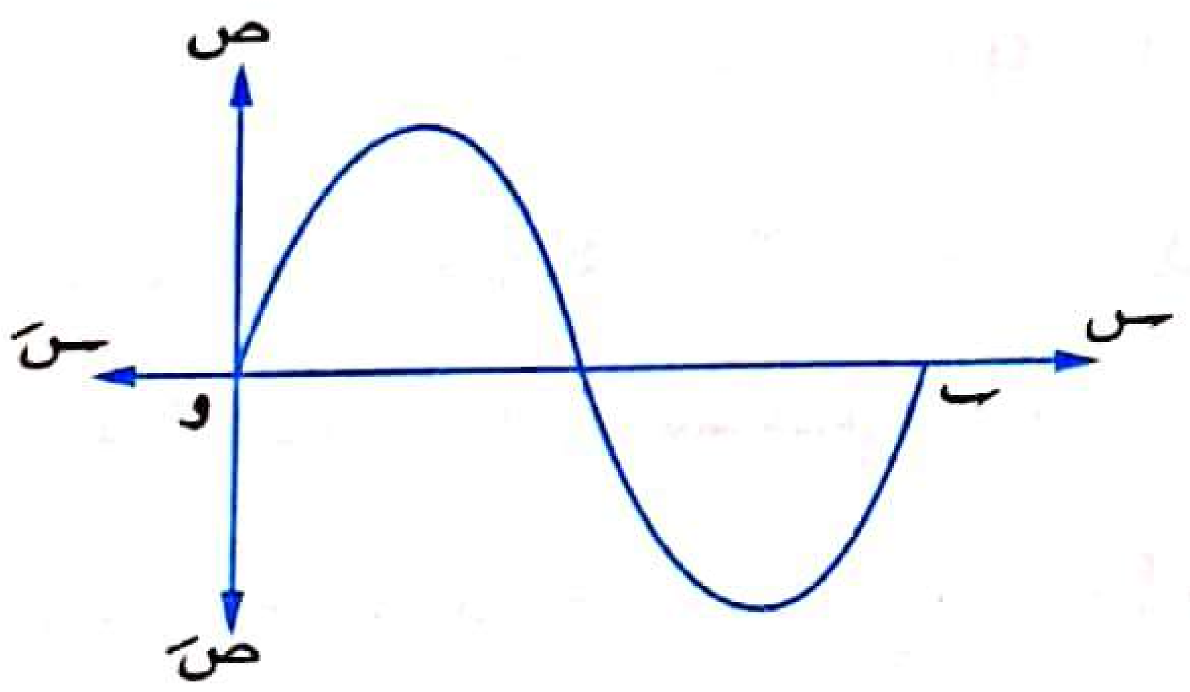
(جـ) $\pi$ (د) ٢ $\pi$

(٧) إذا كان الشكل المقابل يوضح

منحنى ص = ٣ جا $\frac{١}{٢}$ س

فإن الإحداثى السينى

لنقطة ب يساوى ...............



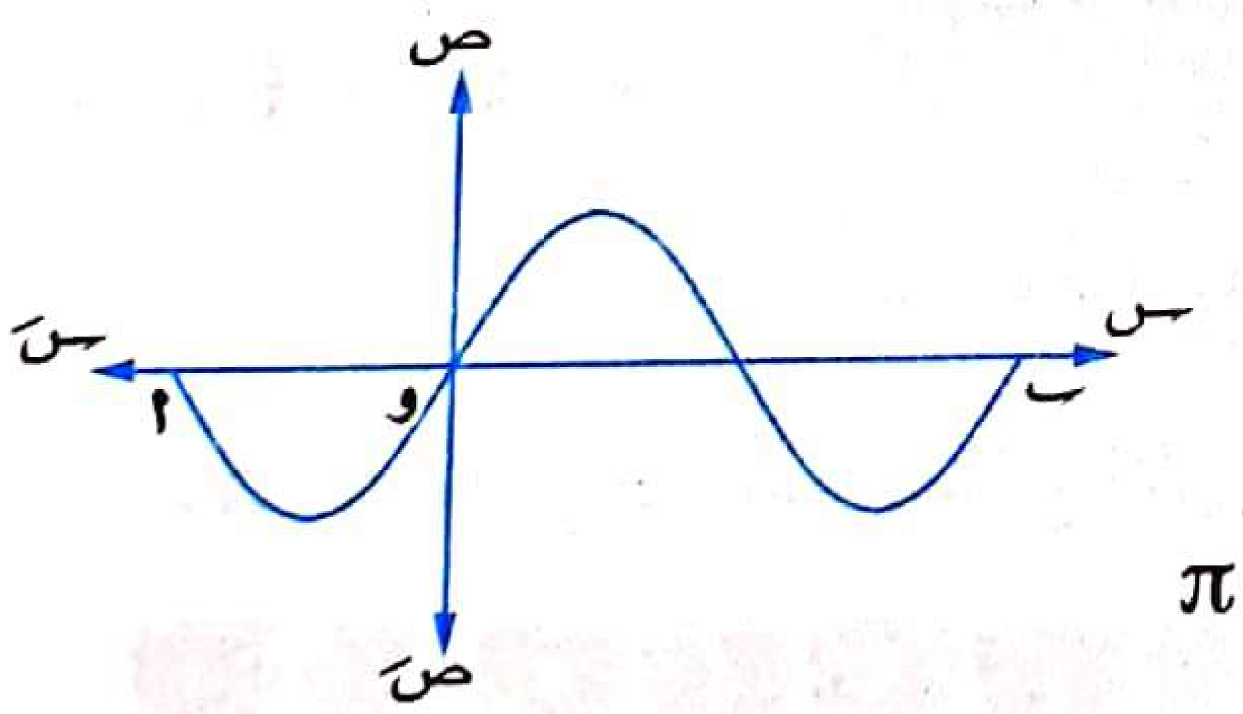

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\pi$

(جـ) ٢ $\pi$ (د) ٤ $\pi$

(٨) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ص = جا س

فإن : ب − أ = ...............

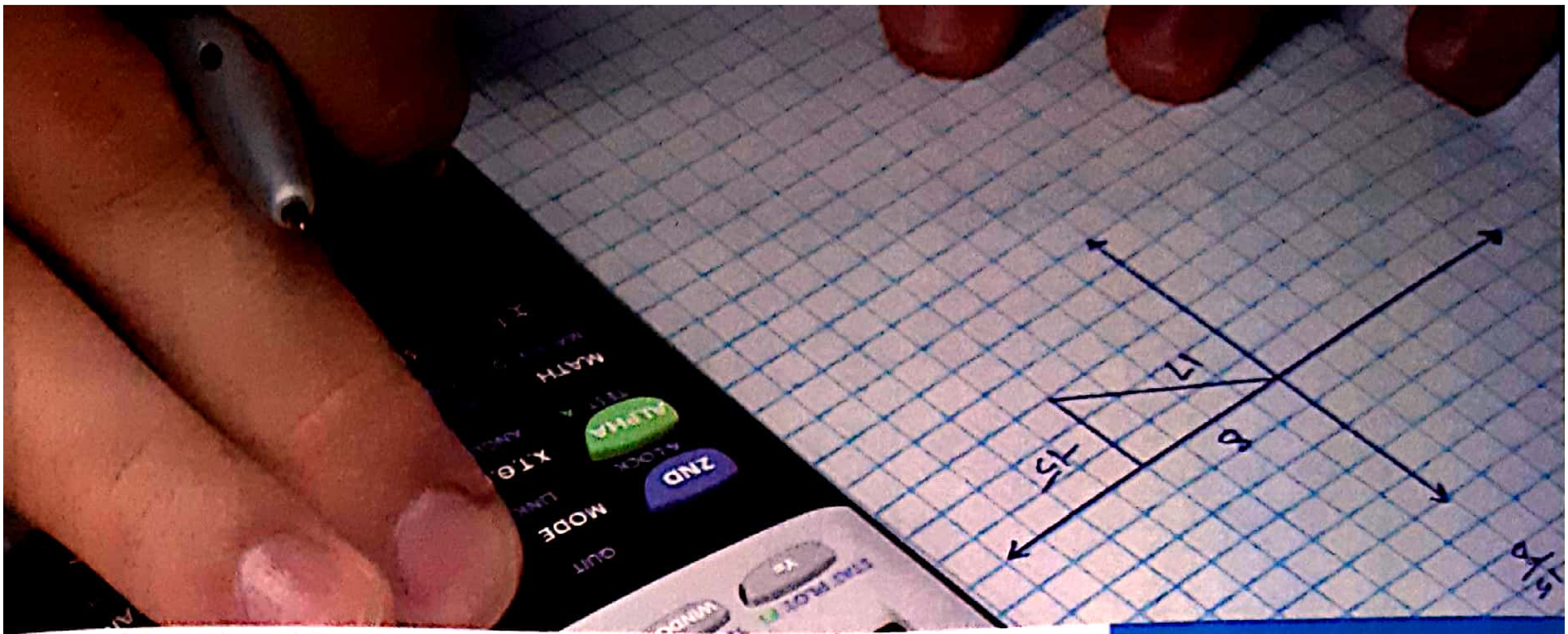



(أ) $\pi$ (ب) ٢ $\pi$

(جـ) ٣ $\pi$ (د) ٤ $\pi$

(٩) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ $\pi$] يساوى ...............

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧



# الدرس 6
# إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

* نعلم أنه : إذا كانت ص = حا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص إذا علمنا قيمة θ

**فمثلاً** إذا كانت θ = ٣٠° فإن : ص = حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

* هناك صورة أخرى تستخدم فى إيجاد قيمة θ إذا علمت قيمة ص وهى : θ = حا$^{-١}$ ص

**فمثلاً** إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ فإن : θ = حا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٣٠°

**مثال ١**

**أوجد قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التى تحقق كلًا مما يأتى :**

١ حا θ = ٠,٦٤٣٨ ٢ حتا θ = ٠,٤٥١٧

**الحل**

١ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT Sin (Sin$^{-1}$) 0 . 6 4 3 8 = °'''

فيظهر على الشاشة العدد ”40° 4' 32.75

∴ θ ≃ ٣٣ً ٤َ ٤٠°

٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT cos (cos$^{-1}$) 0 . 4 5 1 7 = °'''

فيظهر على الشاشة ”63° 8' 49.9 ∴ θ ≃ ٥٠ً ٨َ ٦٣°

**لاحظ**

إننا استخدمنا الآلة الحاسبة لأن قيم الدالة المثلثية ليست من الدوال الخاصة أو المنتسبة إليها.

**ملاحظة**

الدوال : $\theta$ = جا$^{-١}$ س ، $\theta$ = جتا$^{-١}$ س ، $\theta$ = ظا$^{-١}$ س تعرف بأنها الدوال العكسية للدوال المثلثية الأساسية وهذه الدوال تنتج قيمة وحيدة للمتغير $\theta$ لكل قيمة للمتغير س وتعين قيمة $\theta$ داخل نطاق محدد حسب خواص كل دالة

ولذلك فإن الآلة الحاسبة تأخذ فترات معينة تنتمى إليها $\theta$ بحيث يكون للدوال المثلثية دوالًا عكسية وهى كالتالى :

- جا$^{-١}$ أ $\in [\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$ حيث أ $\in [-١ ، ١]$
- جتا$^{-١}$ أ $\in [٠ ، \pi]$ حيث أ $\in [-١ ، ١]$
- ظا$^{-١}$ أ $\in ]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$ حيث أ $\in$ ح

**فمثلًا** جا$^{-١}$ $(-\frac{١}{٢}) = -٣٠^\circ$ أى $\frac{-\pi}{٦}$ (قيمة وحيدة $\in [\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$)

، جتا$^{-١}$ $(\frac{١}{٢}) = ٦٠^\circ$ أى $\frac{\pi}{٣}$ (قيمة وحيدة $\in [٠ ، \pi]$)

وبالتالى فإنه عند حساب $\theta$ حيث $\theta$ = جا$^{-١}$ أ ، $\theta$ = جتا$^{-١}$ أ ، $\theta$ = ظا$^{-١}$ أ

نستخدم الآلة مباشرة ويكون الحل قيمة وحيدة

أما عند حساب $\theta$ حيث $٠ < \theta < ٣٦٠^\circ$ ، جا $\theta$ = أ ، جتا $\theta$ = أ ، ظا $\theta$ = أ

نتبع الخطوات كما بالمثال التالى.

## مثال ٢

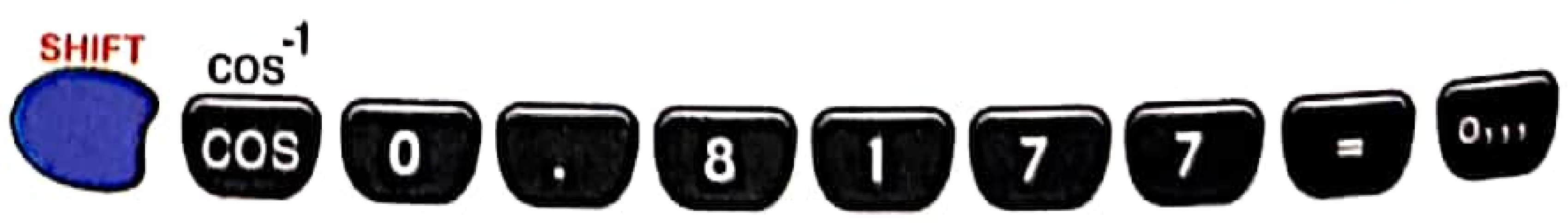
إذا كان : $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ فأوجد $\theta$ التى تحقق كلًا مما يأتى :

١ جتا $\theta$ = ٠,٨١٧٧ ٢ ظا $\theta$ = −٨,٦٤٢١

## الحل

١ ∵ جتا $\theta$ = ٠,٨١٧٧ > ٠ (موجبة) ∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى جيب تمامها ٠,٨١٧٧ وذلك بكتابة جتا$^{-١}$ ٠,٨١٧٧ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :




∴ جتا$^{-١}$ ٠,٨١٧٧ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً

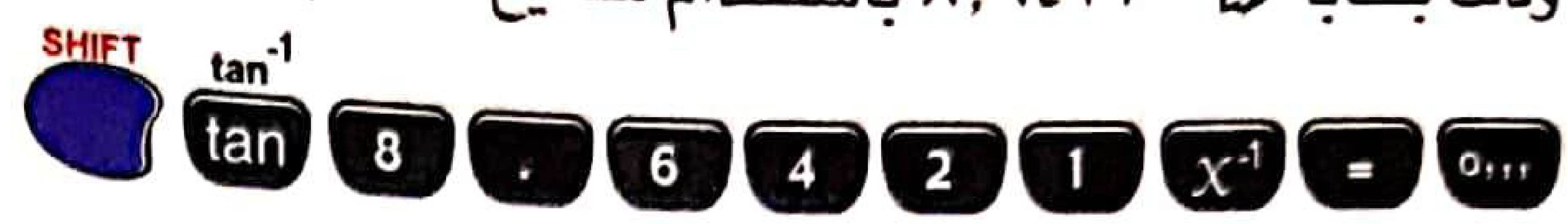
∴ الربع الأول : $\theta$ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً ، الربع الرابع : $\theta$ ≃ ٣٦٠° − (٣٥° ٨َ ٤١ً) = ٣٢٤° ٥١َ ١٩ً

٢ ∵ ظا θ = −٨,٦٤٢١ < ٠ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى ظل تمامها | −٨,٦٤٢١ |

وذلك بكتابة ظا^−١ ٨,٦٤٢١ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :




∴ ظا^−١ ٨,٦٤٢١ ≃ ٦° ٣٦َ ٢ً

∴ الربع الثانى : θ ≃ ١٨٠° − (٦° ٣٦َ ٢ً) = ١٧٣° ٢٣َ ٥٨ً

، الربع الرابع : θ ≃ ٣٦٠° − (٦° ٣٦َ ٢ً) = ٣٥٣° ٢٣َ ٥٨ً

## حاول بنفسك

أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° التى تحقق أن :

١ جا θ = ٠,٨ ٢ ظا θ = ٠,٤٦٩٥ ٣ قا θ = −٢,٩١١٥

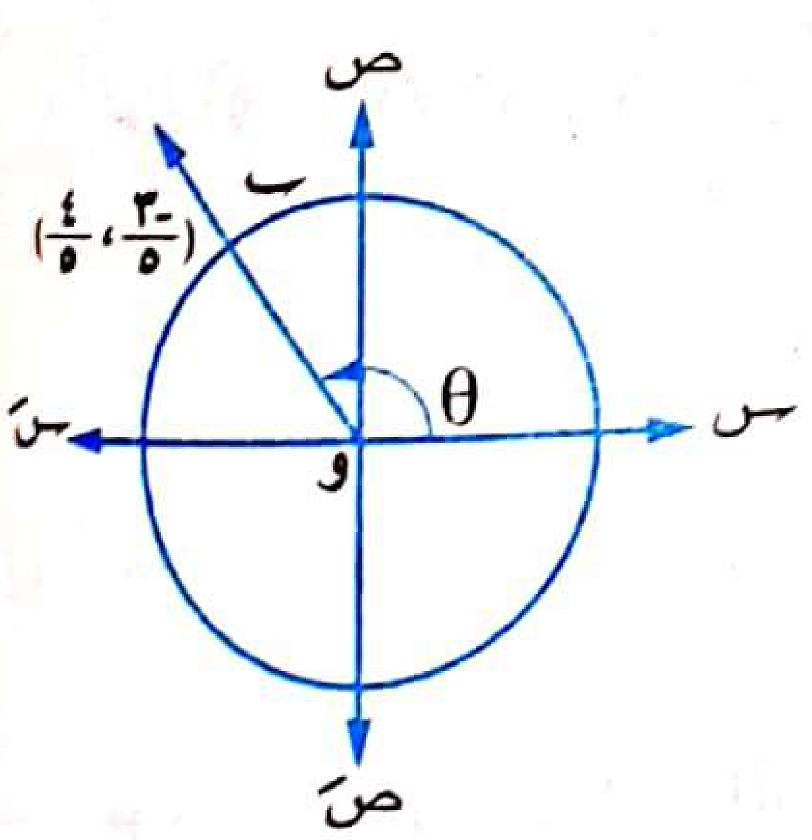
## مثال ٣

**إذا قطع الضلع النهائى لزاوية موجبة قياسها θ فى وضعها القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$**

**فأوجد : θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠°**

### الحل

∵ النقطة ب $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ تقع فى الربع الثانى.




∴ الزاوية الموجهة التى قياسها θ تقع فى الربع الثانى.

، ∵ جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$

∴ θ = جا^−١ $\frac{٤}{٥}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد جا^−١ $\frac{٤}{٥}$




∴ جا^−١ $\frac{٤}{٥}$ ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

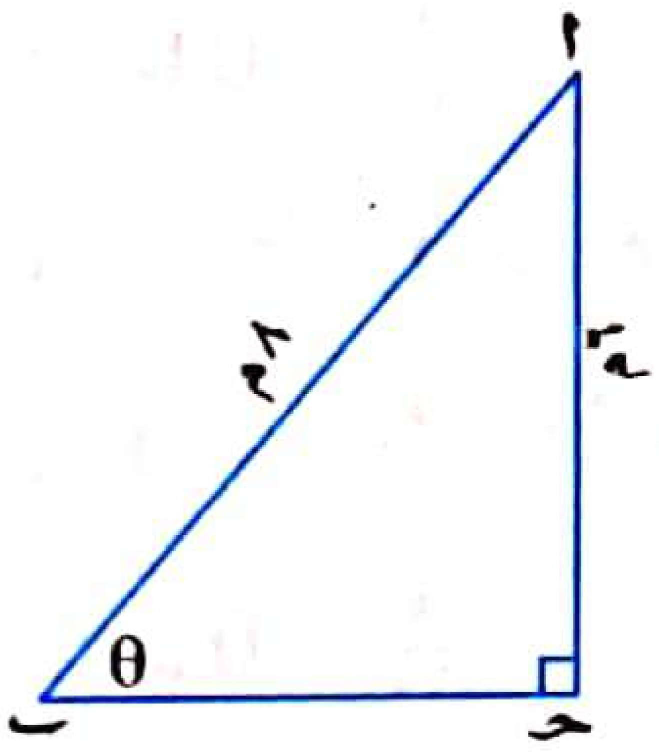
∴ θ = ١٨٠° − (٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ١٢٦° ٥٢َ ١٢ً

## مثال ٤

**سلم طوله ٨ أمتار يستند على جدار رأسى وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٦ أمتار.**

**فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأرض.**

### الحل




السلم يصنع مع الحائط الرأسى والأرض الأفقية مثلثًا قائم الزاوية وليكن

$\triangle$ أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ

$\therefore$ جا $\theta = \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

حيث : $٠° < \theta < ٩٠°$

$\therefore \theta =$ جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$




$\therefore \theta \simeq$ ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

$\therefore \theta^{ء} =$ ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً $\times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq$ ٠,٨٤٨ ء

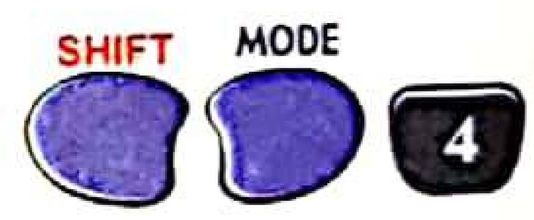
$\therefore$ قياس زاوية ميل السلم على الأرض $\simeq$ ٠,٨٤٨ ء

### ملاحظة

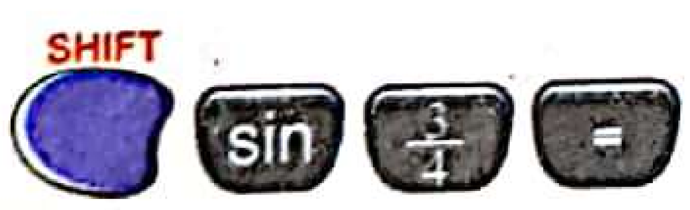
**فى المثال السابق :**

$\theta =$ جا$^{-١} \frac{٣}{٤}$ يمكن إيجاد $\theta$ بالراديان مباشرةً باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

١ اضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين لتحويل الآلة من النظام الستينى (Deg) إلى النظام الدائرى (Rad)




٢ أوجد $\theta$ بالراديان مباشرةً بالضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين

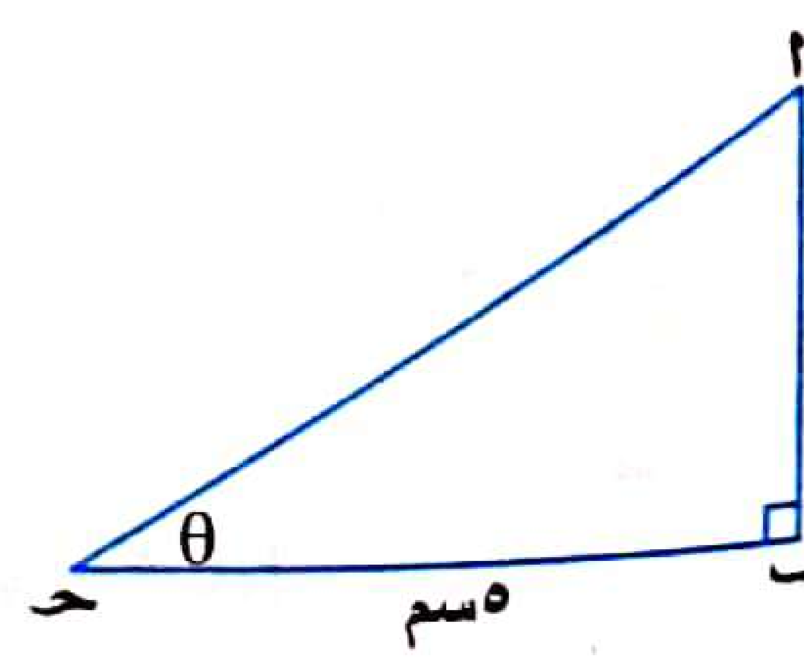



$\therefore \theta^{ء} \simeq$ ٠,٨٤٨ .

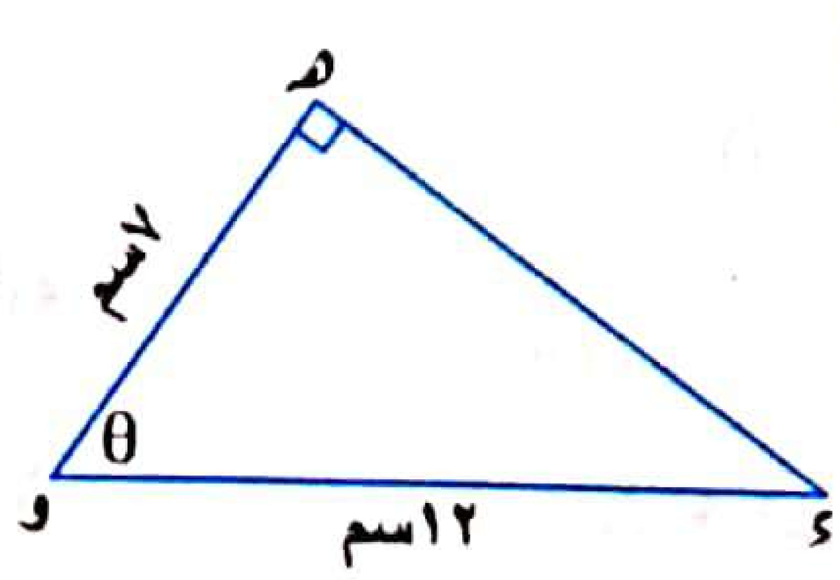
### حاول بنفسك

أوجد $\theta$ بالراديان فى كل من المثلثات القائمة الآتية :

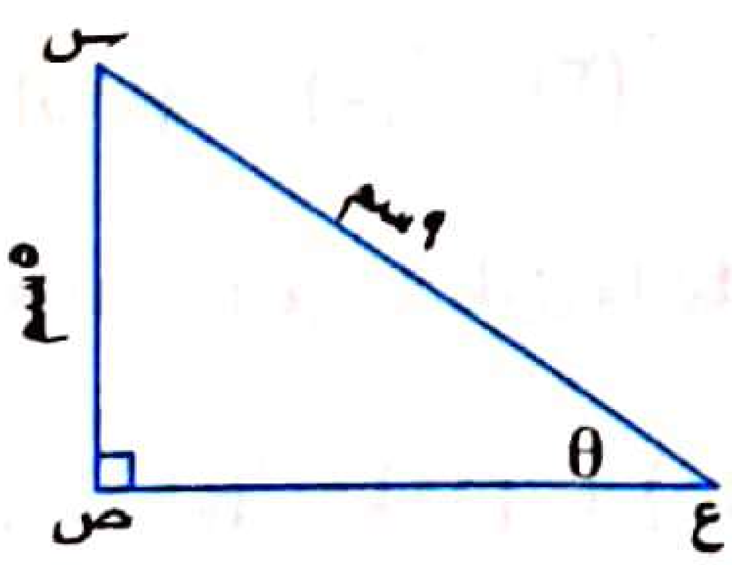
١




٢




٣

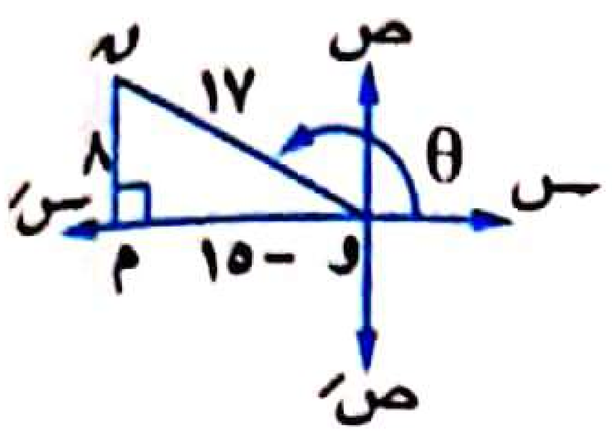


## مثال ٥

إذا كان : جا $\theta = \frac{٨}{١٧}$ حيث $°٩٠ < \theta < °١٨٠$

فأوجد $\theta$ لأقرب ثانية ثم أوجد باقى الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها $\theta$

### الحل




$\because$ جا $\theta = \frac{٨}{١٧}$ $\therefore \theta =$ جا$^{-١} \frac{٨}{١٧} \simeq$ ٢١ َ ٤ ً ٢٨ °

، $\because$ $°٩٠ < \theta < °١٨٠$ $\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى.

$\therefore \theta = °١٨٠ - °٢٨$ َ٤ ً٢١ = ٣٩ ً ٥٥ َ ١٥١ °

$\because$ جا $\theta = \frac{٨}{١٧}$ $\therefore$ نعتبر أن م ن = ٨ وحدة طول ، و ن = ١٧ وحدة طول

فيكون (باستخدام نظرية فيثاغورس) و م = ١٥ وحدة طول وله إشارة سالبة

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{و م}{و ن} = \frac{-١٥}{١٧}$ ، ظا $\theta = \frac{م ن}{و م} = \frac{٨}{-١٥} = -\frac{٨}{١٥}$

، قتا $\theta = \frac{و ن}{م ن} = \frac{١٧}{٨}$ ، قا $\theta = \frac{و ن}{و م} = \frac{١٧}{-١٥} = -\frac{١٧}{١٥}$ ، ظتا $\theta = \frac{و م}{م ن} = \frac{-١٥}{٨}$

### حاول بنفسك

إذا كان : جا $\theta = -\frac{١}{٣}$ ، $°٢٧٠ \leqq \theta \geq °٣٦٠$

[١] أوجد : $\theta$ لأقرب ثانية. [٢] أوجد قيمة كل من : جتا $\theta$ ، ظا $\theta$ ، قا $\theta$

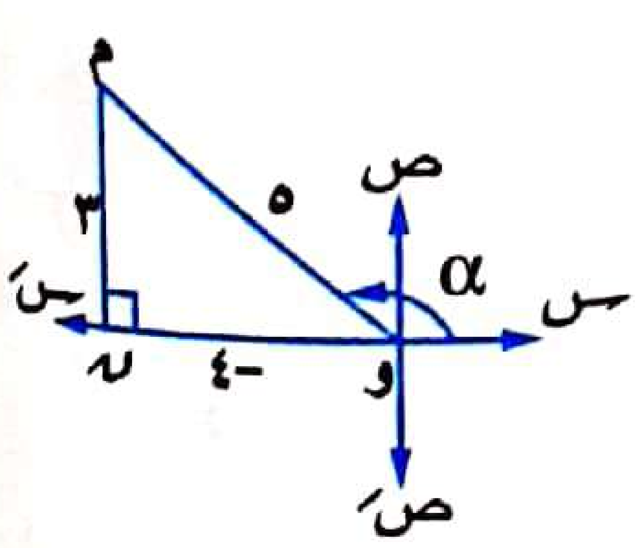
## مثال ٦

إذا كان : جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$ حيث $°٩٠ < \alpha < °١٨٠$ ، ظا $\beta = -\frac{١٢}{٥}$ حيث $\beta \ni ]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$

، جا $\theta =$ جا $(°١٨٠ - \alpha)$ جتا $(\beta - °١٨٠)$ جتا $\alpha$

أوجد : $\theta$ لأقرب دقيقة حيث $°٠ < \theta < °٩٠$

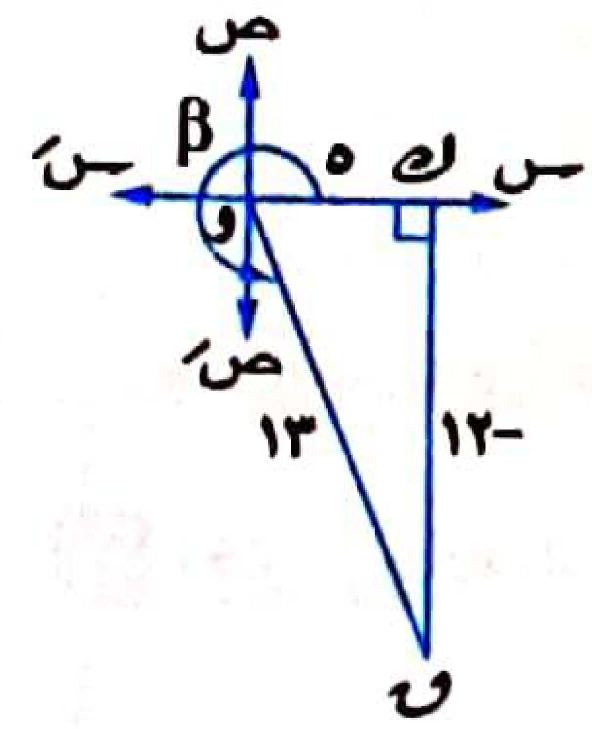
### الحل




$\because$ (و ن)$^٢$ = (٥)$^٢$ - (٣)$^٢$ = ١٦

$\therefore$ و ن = ٤ وحدة طول وإشارته سالبة.

، $\because$ (و ى)$^٢$ = (١٢)$^٢$ + (٥)$^٢$ = ١٦٩ $\therefore$ و ى = ١٣ وحدة طول.




∴ جا $\theta$ = جا (١٨٠° − $\alpha$) جتا ($\beta$ − ١٨٠°) جتا $\alpha$

= جا $\alpha$ جتا (١٨٠° + $\beta$) جتا $\alpha$

= جا $\alpha$ × (− جتا $\beta$) × جتا $\alpha$ = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ × $\frac{-٤}{٥}$ = $\frac{١٢}{٦٥}$

، ∵ ٠° < $\theta$ < ٩٠°   ∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول.

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : $\theta$ = ١٠° ٣٨َ

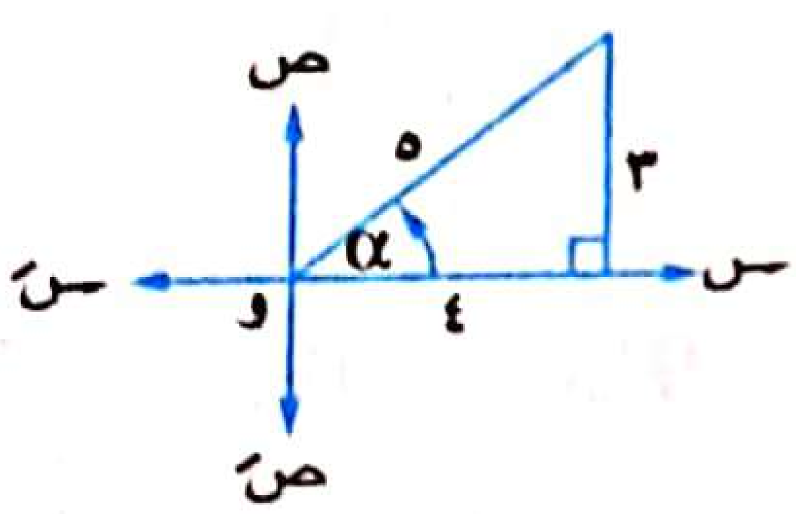
## مثال ٧

إذا كان : ٥ جا (١٨٠° − $\alpha$) = ٣ حيث ٠° < $\alpha$ < ٩٠°

، ٥ ظتا (٩٠° + $\beta$) − ١٢ = ٠ حيث ٩٠° < $\beta$ < ١٨٠°

أوجد قيمة $\theta$ حيث : جتا $\theta$ = جتا (٩٠° + $\alpha$) ظا (٢٧٠° + $\beta$) ظا (٢٧٠° − $\alpha$) حيث $\theta$ ∈ ]٠ ، ٢$\pi$[

## الحل



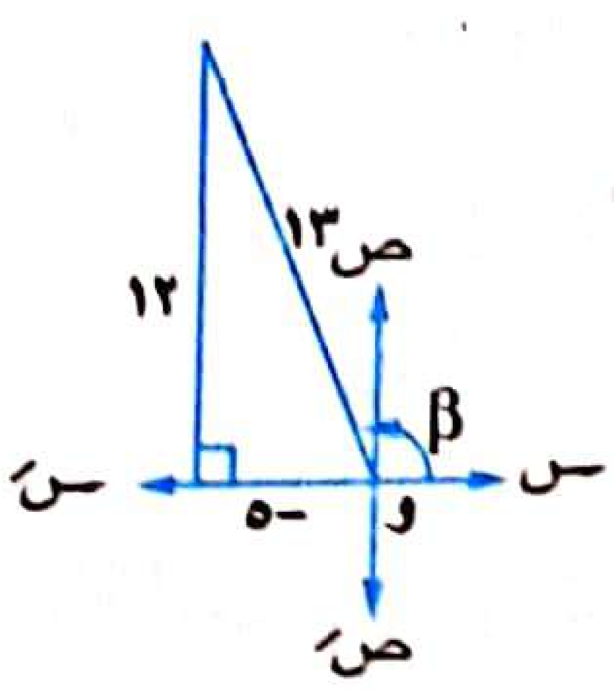

∵ ٥ جا (١٨٠° − $\alpha$) = ٣   ∴ ٥ جا $\alpha$ = ٣

∴ جا $\alpha$ = $\frac{٣}{٥}$ حيث $\alpha$ تقع فى الربع الأول.

كذلك ∵ ٥ ظتا (٩٠° + $\beta$) = ١٢

∴ ٥ (− ظا $\beta$) = ١٢

∴ ظا $\beta$ = $\frac{-١٢}{٥}$ حيث $\beta$ تقع فى الربع الثانى.




جتا $\theta$ = جتا (٩٠° + $\alpha$) ظا (٢٧٠° + $\beta$) ظا (٢٧٠° − $\alpha$)

= (− جا $\alpha$) × (− ظتا $\beta$) × ظتا $\alpha$ = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{-١}{٣}$

، ∵ جتا $\theta$ < ٠

∴ $\theta$ ∈ الربع الثانى.   أ، $\theta$ ∈ الربع الثالث.

∴ $\theta$ = ١٨٠° − ٧٠° ٣٢َ   |   ∴ $\theta$ = ١٨٠° + ٧٠° ٣٢َ

= ١٠٩° ٢٨َ   |   = ٢٥٠° ٣٢َ

# على إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

**١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : θ = حا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ..............

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(٢) إذا كان : ظا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢١٠°

(٣) إذا كان : قتا θ = −٢ ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ٣٠٠° (جـ) ٣٣٠° (د) ١٥٠°

(٤) حا$^{-1}$ ٠,٧ ≃ ..............

(أ) ٤٤° ٢٥َ ٣٧ً (ب) ١٣٥° ٣٤َ ٢٣ً

(جـ) ٢٢٤° ٢٥َ ٣٧ً (د) ٣١٥° ٣٤َ ٢٣ً

(٥) حا$^{-1}$ (−٠,٦) ≃ ..............

(أ) −٣٦,٨٧° (ب) ١٤٣,١٣° (جـ) ٢١٦,٨٧° (د) ٣٢٣,١٣°

(٦) إذا كان : حتا θ = ٠,٤٣٦ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : θ ≃ ..............

(أ) ٦٤° ٩َ (ب) ١١٥° ٥١َ (جـ) ٢٤٤° ٩َ (د) ٢٩٥° ٥١َ

(٧) إذا كان : ظا θ = ١,٨ وكانت ٩٠° ≤ θ ≤ ٣٦٠° فإن : θ ≃ ..............

(أ) ٦٠° ٥٧َ (ب) ١١٩° ٣َ (جـ) ٢٤٠° ٥٧َ (د) ٢٩٩° ٣َ

---

**٢ أوجد بالقياس الستينى قياس أصغر زاوية موجبة θ تحقق كلًا من :**

(١) حا θ = ٠,٦ (٢) حتا θ = ٠,٧٨٦٥ (٣) ظا θ = ٢,٤٥٧٧

(٤) ظا θ = −٠,٨٢٢٧ (٥) حا θ = −٠,٤٦٥٢ (٦) حتا θ = −٠,٥٢٠٦

(٧) ظتا θ = ٣,٦٣١٨ (٨) ظتا θ = −١,٤٦١٢ (٩) قا θ = ١,٠٤٧٨

(١٠) قتا θ = −٢,٥٤٦٦ (١١) قا θ = −٣,٥٧ (١٢) قتا θ = ٢,٩٨١١

---

**٣ إذا كان ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد θ التى تحقق كلًا مما يأتى :**

(١) حا θ = ٠,٨٦٦٠٣ (٢) حتا θ = −٠,٤٧٥٢ (٣) قتا θ = −١,٢٥٧٦

(٤) ظا θ = ١,٠٥٤١٧ (٥) حتا θ = −٠,٦٤٢ (٦) قا θ = ٢,٠٥١٥

(٧) قتا θ = −١,٨٧١٥ (٨) ظتا θ = −٢,٧٠١٢ (٩) ظا θ = −٢,١٤٥٦

٤ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب

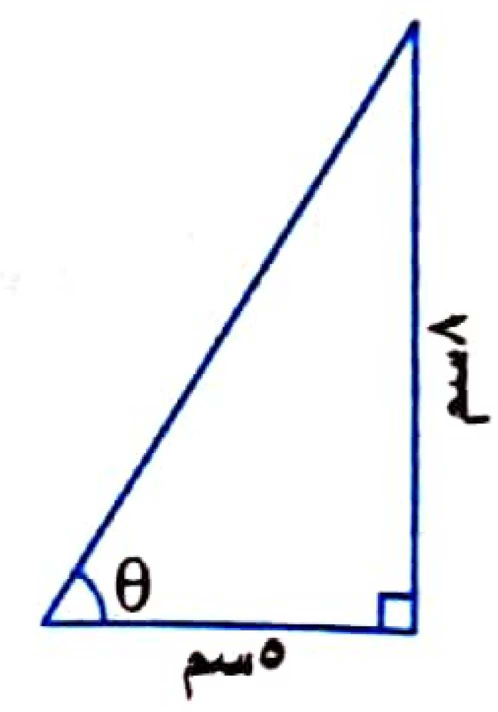
فأوجد : ق(∠ θ) حيث ٠° < θ < ٣٦٠° عندما :

(١) ب$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ (٢) ب$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ (٣) ب$\left(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠}\right)$

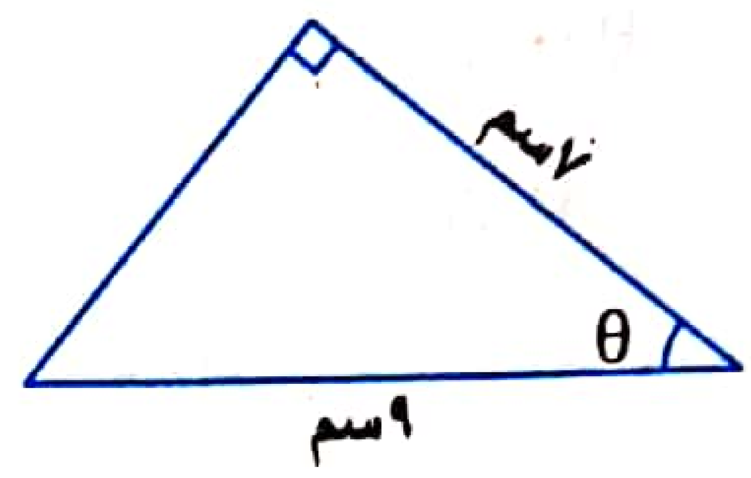
---

٥ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :

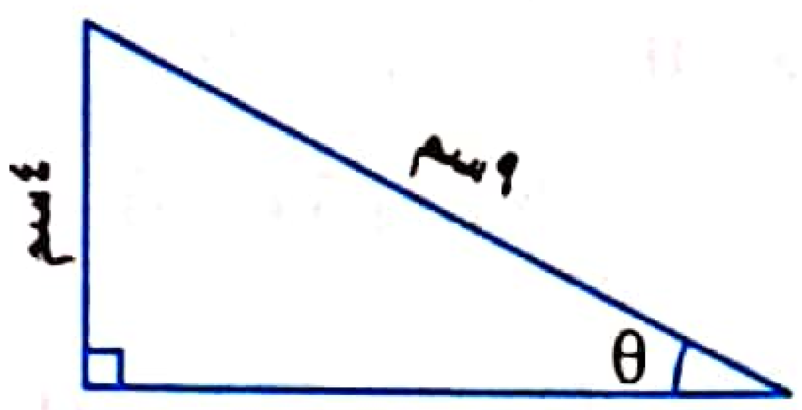
(١)




(٢)




(٣)




---

٦ إذا كان : حا θ = $\frac{١}{٣}$ وكانت ٩٠° ≤ θ ≤ ١٨٠° :

(١) احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية. (٢) أوجد قيمة كل من : حتا θ ، ظا θ ، قا θ

---

٧ أ ب حـ مثلث فيه حتا أ = −٠,٥٨٠٧ ، ظا ب = ٠,٤٥٧٨ فأوجد لأقرب دقيقة ق (∠ حـ) «٢٩° ٥٤َ»

---

٨ إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :

ظا θ = حا ٤٨َ ٢٣° + حتا ٣٢َ ٨٤° «٢٦° ٣١َ ، أ ٢٠٦° ٣١َ»

---

٩ إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :

حتا θ = حا ٧٠° − ٢ حتا ٨٠° ظا ٧٥° «١١٠° ٥٣َ ، أ ٢٤٩° ٧َ»

---

١٠ إذا كان : ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، θ ∈ ]٠ ، ٢π[

أوجد قيمة ∝ لأقرب دقيقة إذا كان :

حا ∝ = حا ١٥٠° حا (− θ) + $\frac{١}{٥}$ قا (١٨٠° + θ) ظا ٢٢٥° «٤٠° ٣٢َ ، أ ١٣٩° ٢٨َ»

---

١١ إذا كان : حا ∝ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < ∝ < ١٨٠° أوجد θ من المعادلة :

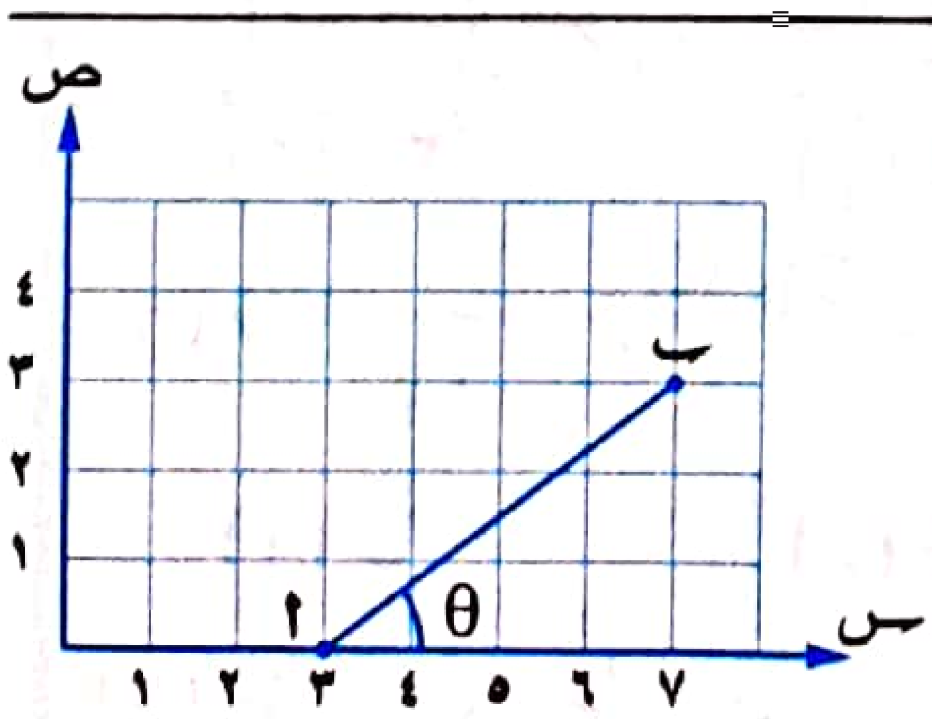
$\frac{-٥}{٤}$ حتا (٣٦٠° − ∝) + ظتا (٢٧٠° − θ) = ٢ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° «٤٥° ، أ ٢٢٥°»

---

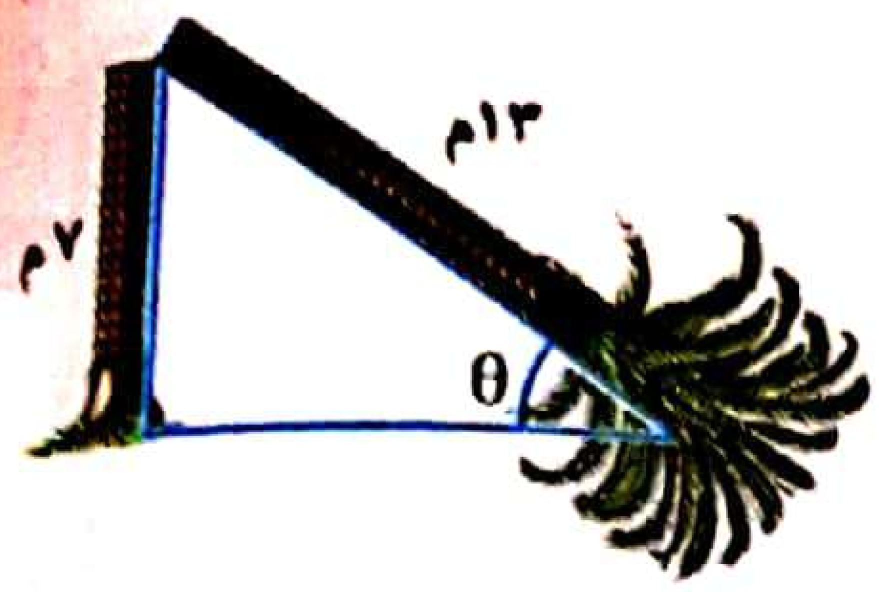
١٢ الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين

النقطتين أ (٣ ، ٠) ، ب (٧ ، ٣)

أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{أب}$ ومحور السينات.




«٣٦° ٥٢َ ١٢ً»




## اكتشف الخطأ

**١٣** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا ، بحيث تأخذ الشكل المجاور ، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار ، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هى الزاوية التى يصنعها الجزء المائل مع الأفقى.
فأوجد θ بالتقدير الستينى.

**إجابة كريم**

∵ قتا θ = $\frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قتا$^{-1}$ $\frac{١٣}{٧}$

∴ θ ≃ ٤٤ً ٣٤َ ٣٢°

**إجابة عمر**

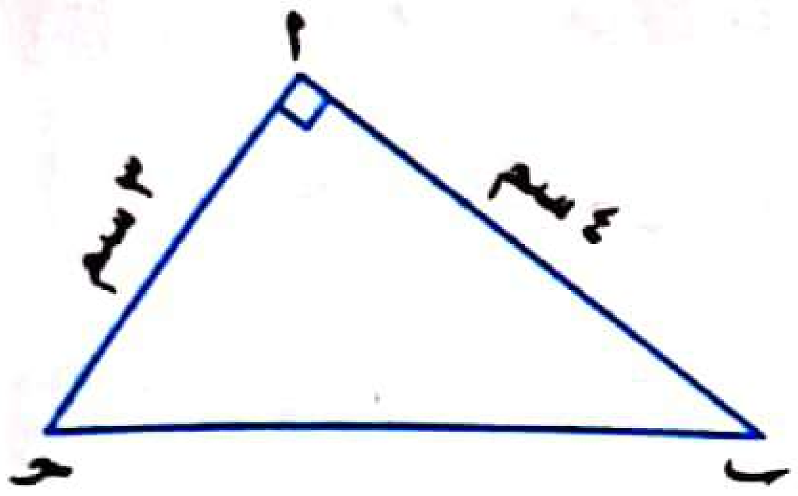
∵ قا θ = $\frac{١٣}{٧}$ ∴ θ = قا$^{-1}$ $\frac{١٣}{٧}$

∴ θ ≃ ١٦ً ٢٥َ ٥٧°

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٤** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :




(١) فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ..............

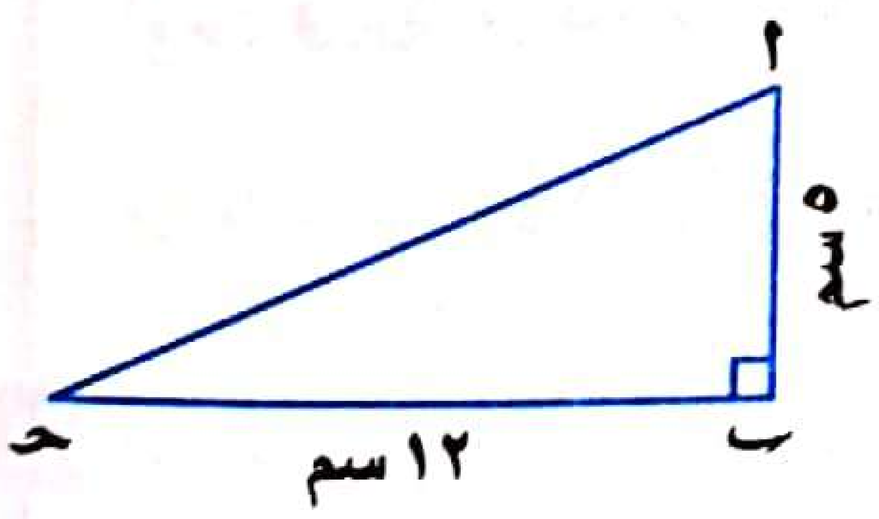
(أ) حا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$ (ب) حا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ظا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$ (د) ظتا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

(٢) حا (حتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ..............

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٣) قتا (حتا$^{-1}$ صفر) = ..............

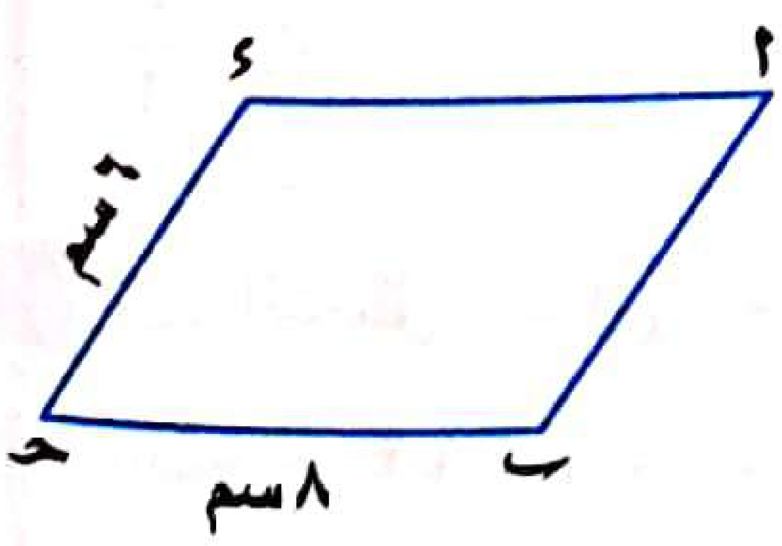
(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) صفر




(٤) فى الشكل المقابل :

حا (ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$) = ..............

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) ١٣




(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ د متوازى أضلاع مساحته = ٤٠ سم$^{٢}$ فإن : ق (∠ أ) ≃ ..............

(أ) ٣٧° (ب) ٥٦° (جـ) ٥٣° (د) ٣٤°

(٦) ظا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

(٧) حتا$^{-1}$ س + حا$^{-1}$ س = ..............

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\pi$

# تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** 📖 يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°

ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى. «٣,٤٩ء»

---

**٢** 📖 كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم ؟

«٢ π سم»

---

**٣** 📖 قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات ، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم ، فأوجد سرعته بالكيلو متر فى الساعة. «٩٤٢٤,٧٨ كم/س»

---

**٤** 📖 قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات ، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم.



فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر. «٢٠٩٤٤ كم»

---

**٥** 📖 تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها ، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل ١٥° لكل ساعة.



(١) أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

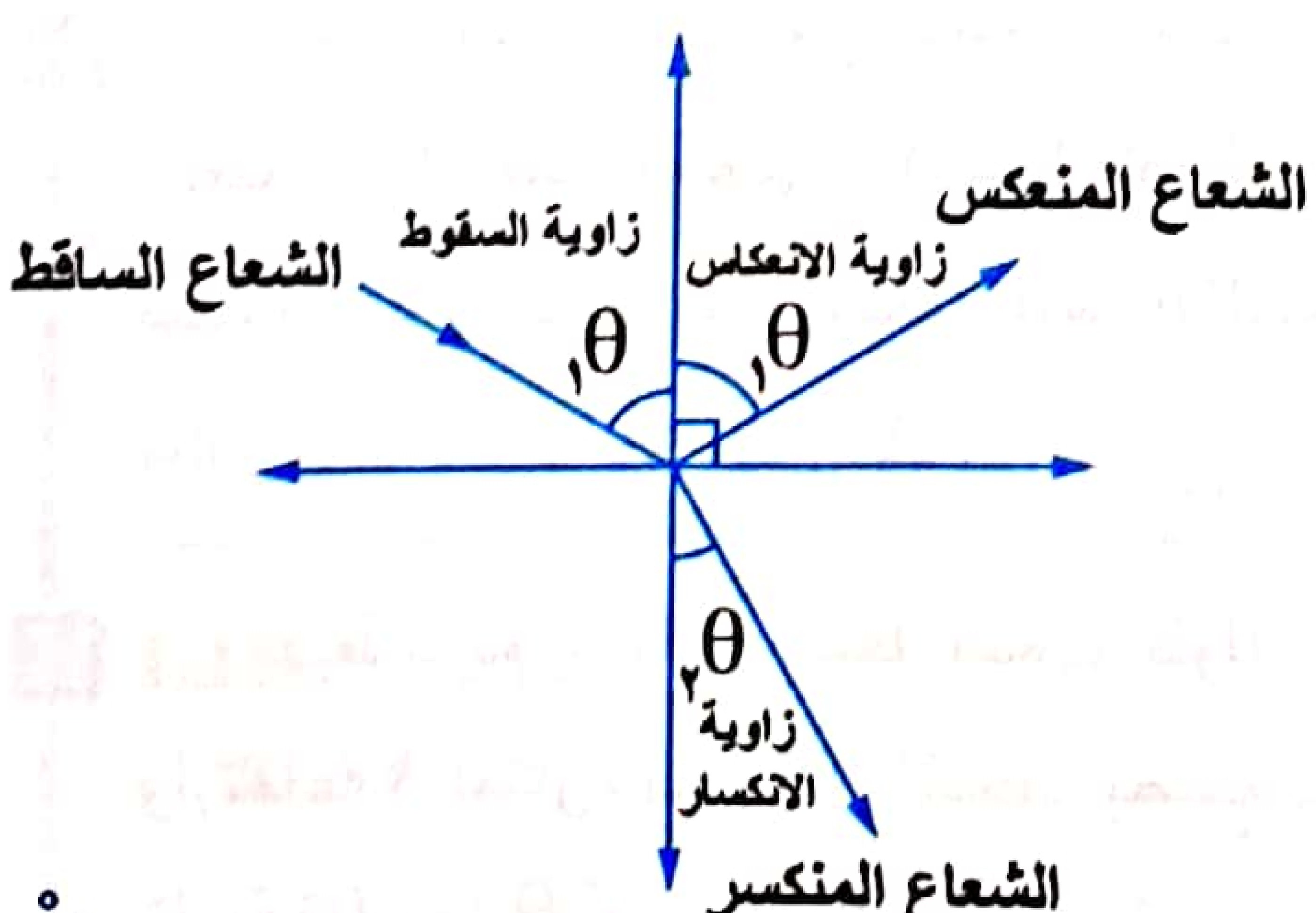
(٢) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{٢\pi}{٣}$ راديان ؟

(٣) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم ، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

«١,٠٥ء ، ٨ ساعات ، ٢٠ π سم»

---

**٦** 📖 عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف ، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور :

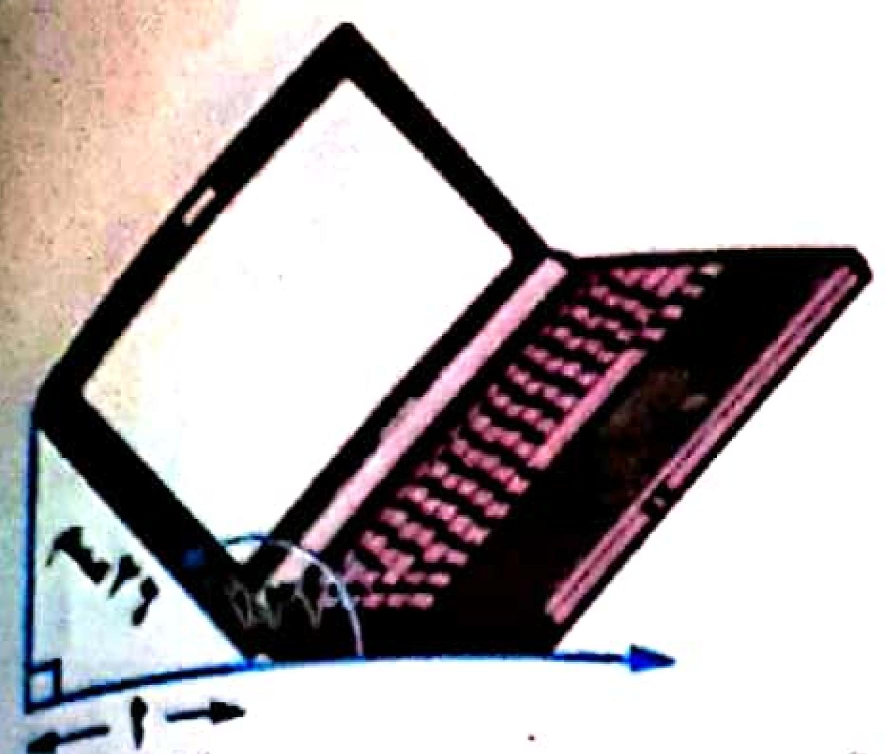



إذا كان جا $\theta_1$ = ك جا $\theta_2$

، كانت ك = $\sqrt{٣}$ ، $\theta_1$ = ٦٠° فأوجد قياس زاوية $\theta_2$

«٣٠°»

**٧** عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كان قياس زاوية ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل :



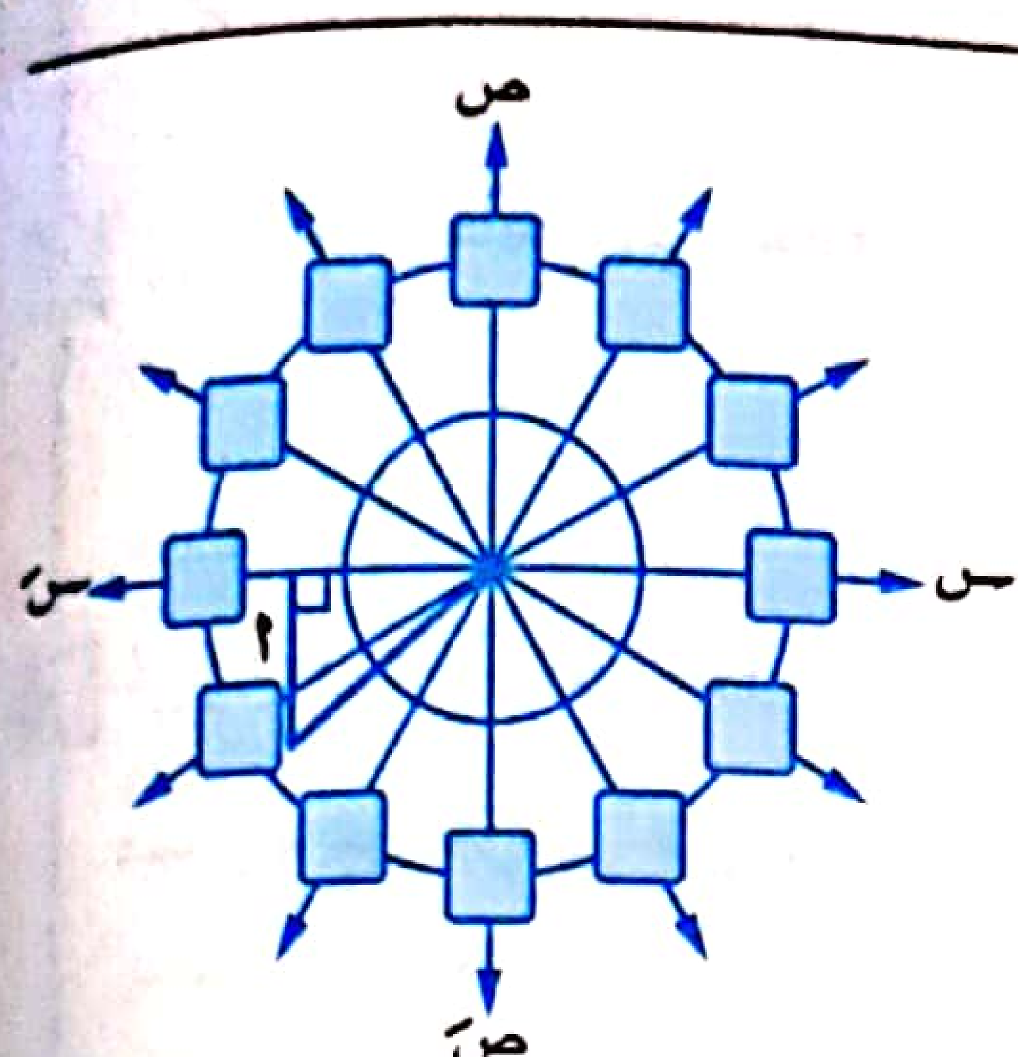

«١٧٠ سم»

(١) ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى ، بحيث تكون الزاوية ١٣٢° فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم أ ، ثم أوجد قيمة أ لأقرب سنتيمتر.

---

**٨** تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى ، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ طول نصف قطره ١٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى $\frac{٥\pi}{٤}$ :




(١) ارسم الزاوية التى قياسها $\frac{٥\pi}{٤}$ فى الوضع القياسى.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة أ ثم أوجد قيمة أ بالمتر لأقرب رقمين عشريين.

«٨,٤٩ متر»

---

**٩** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجزر ، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار ، وكانت حركة المد والجزر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة.

(١) أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.

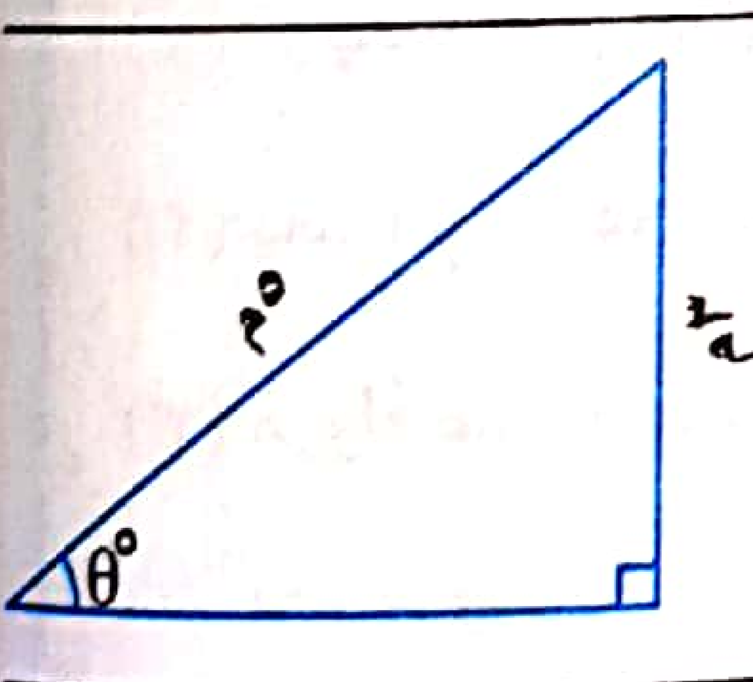
(٢) ارسم مخططًا بيانيًا يبيِّن كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجزر أثناء اليوم.

(٣) أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء.

---

**١٠** سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٣ أمتار

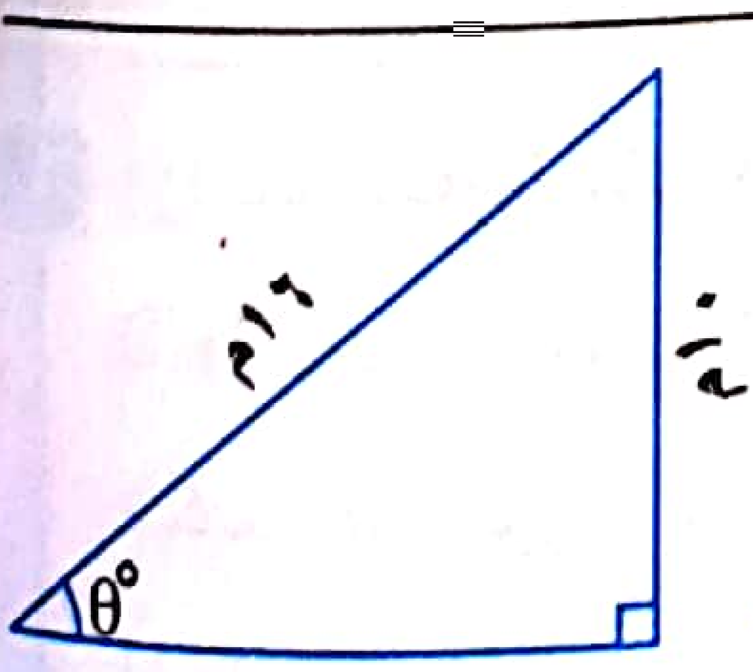
فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأفقى.




«٠,٦٤٤ ء»

---

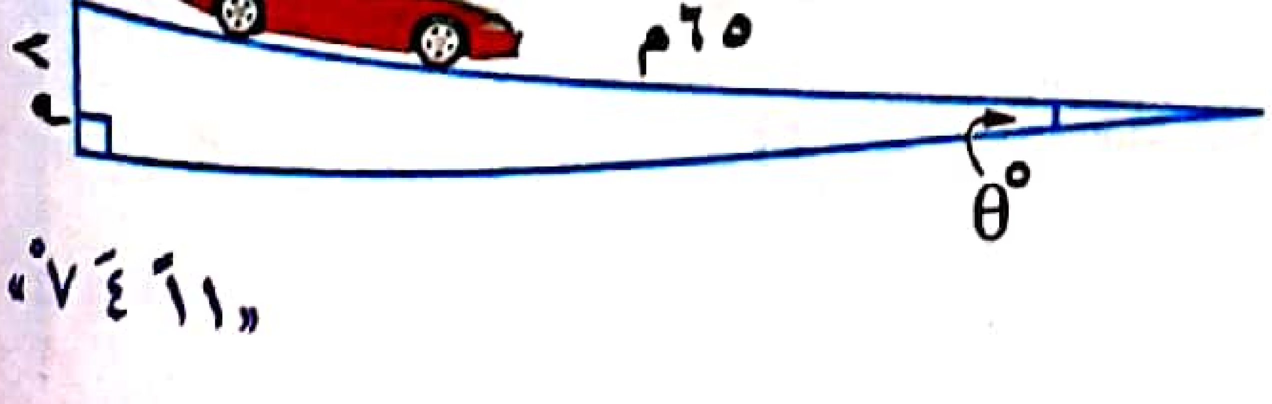
**١١** توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات لأقرب جزء من ألف.




«٣٨,٦٨٢°»

---

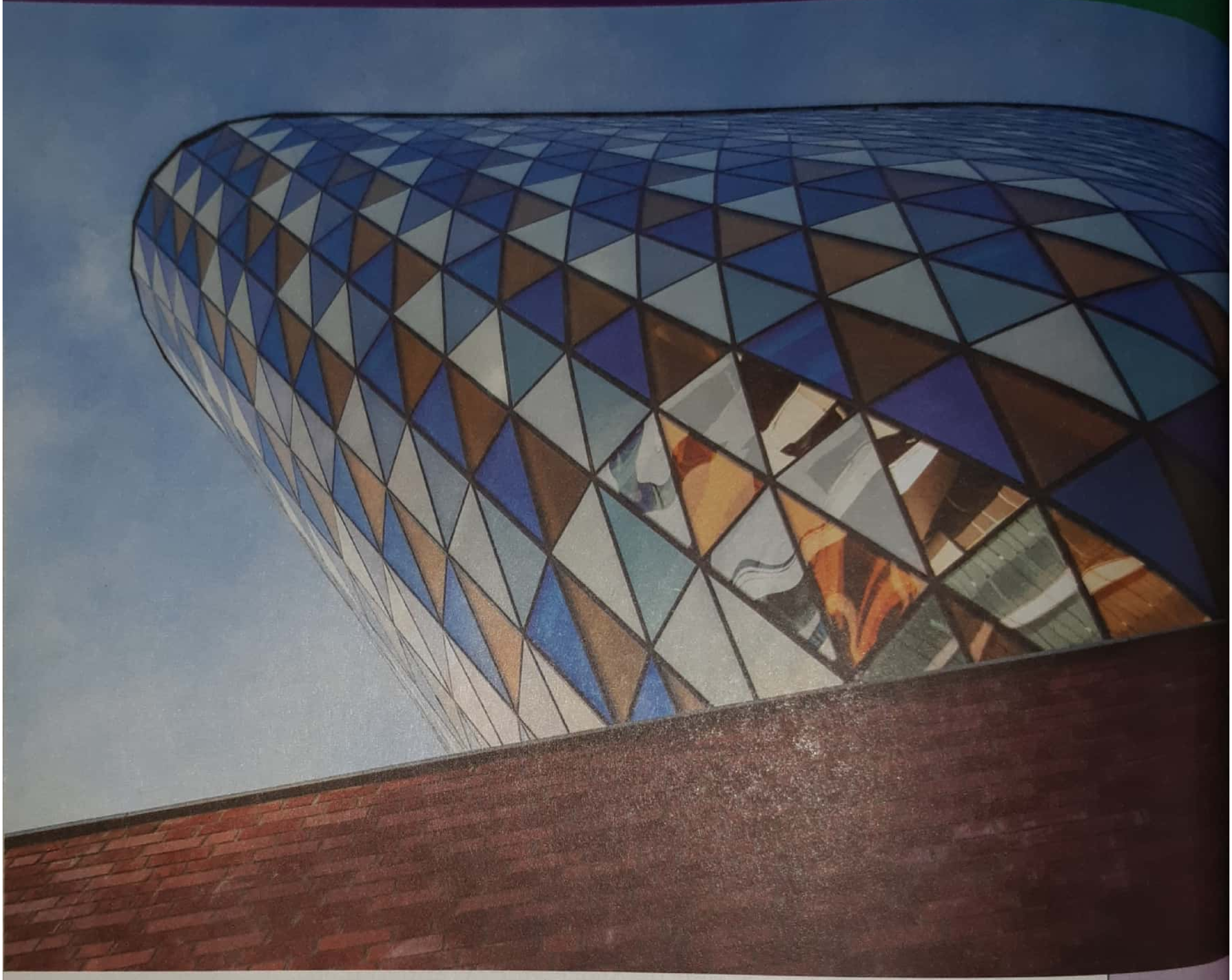
**١٢** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ مترًا وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ أوجد θ بالتقدير الستينى.




«٧ ٤ ١١»

ثانيًا

# الهندســة

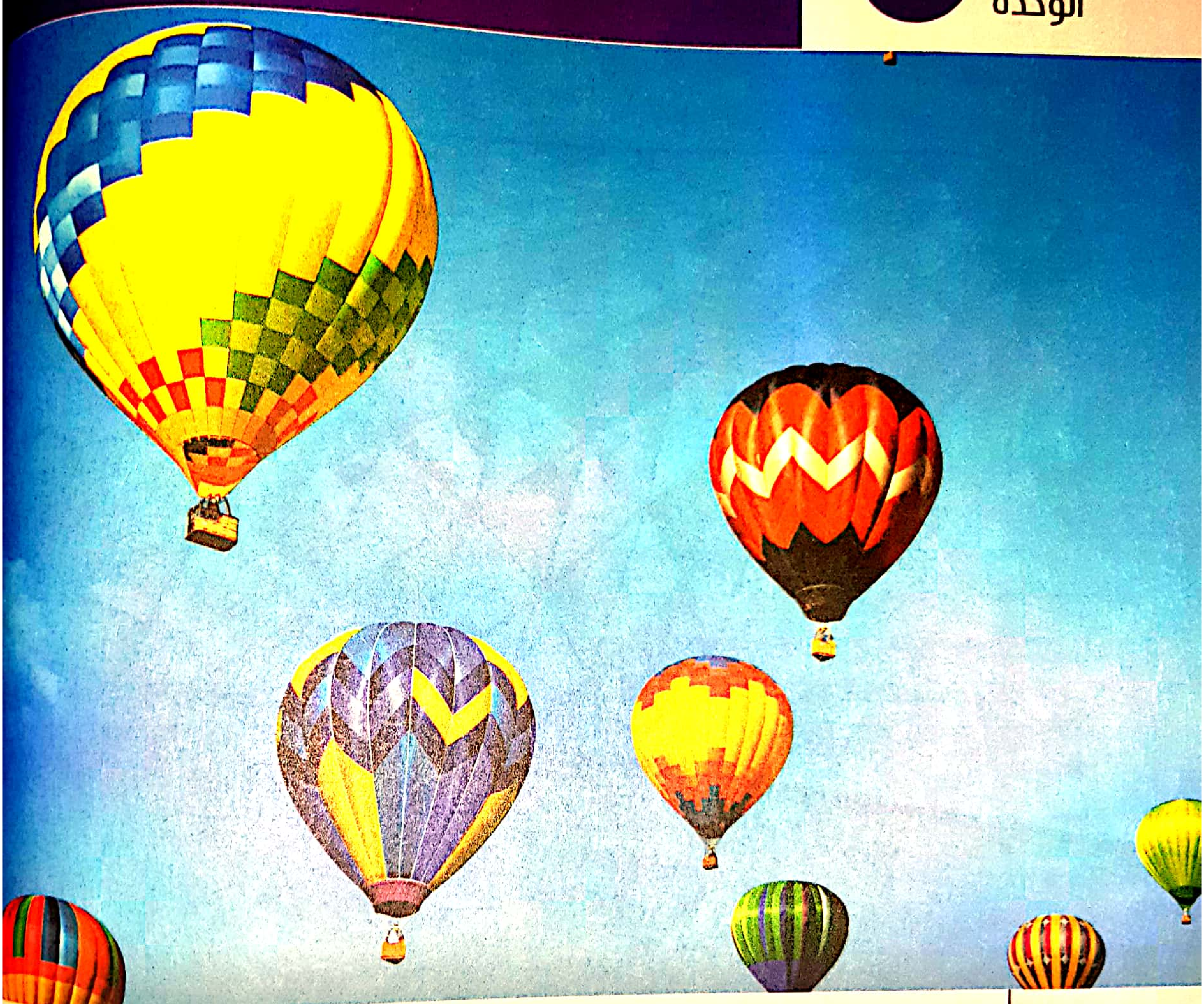


**الوحدة الثالثة** التشابــه.

**الوحدة الرابعة** نظريات التناسب فى المثلث.

# الوحدة 3

# التشــابه



## فى نهاية الوحــدة

- تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثالثة.

# دروس الوحدة

الدرس 1 تشابه المضلعات.

الدرس 2 تشابه المثلثات.

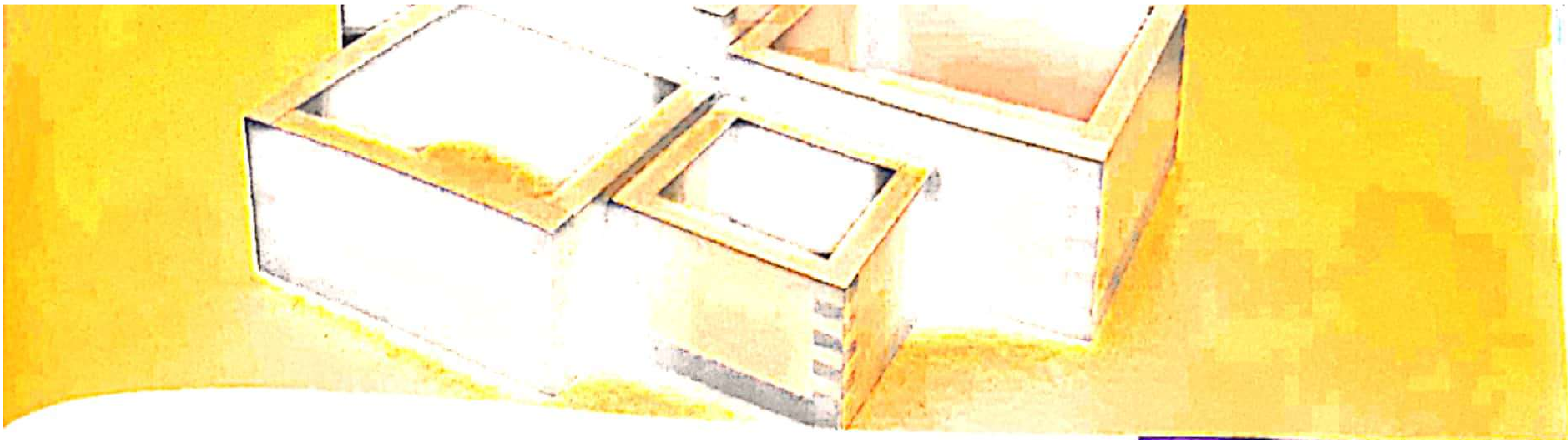
الدرس 3 العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس 4 تطبيقات التشابه فى الدائرة.

## نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية عن موضوع التشابه.
- يستخدم معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.
- يتعرف مسلمة التشابه «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».
- يعرف أنه إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.
- يعرف أنه إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين ، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.
- يحل تمارين وتطبيقات رياضية على حالات تشابه المثلثات.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين».
- يستخدم تشابه المثلثات فى القياس غير المباشر.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- يتعرف العلاقة بين طول مماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- ينمذج ويحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.



الدرس 1

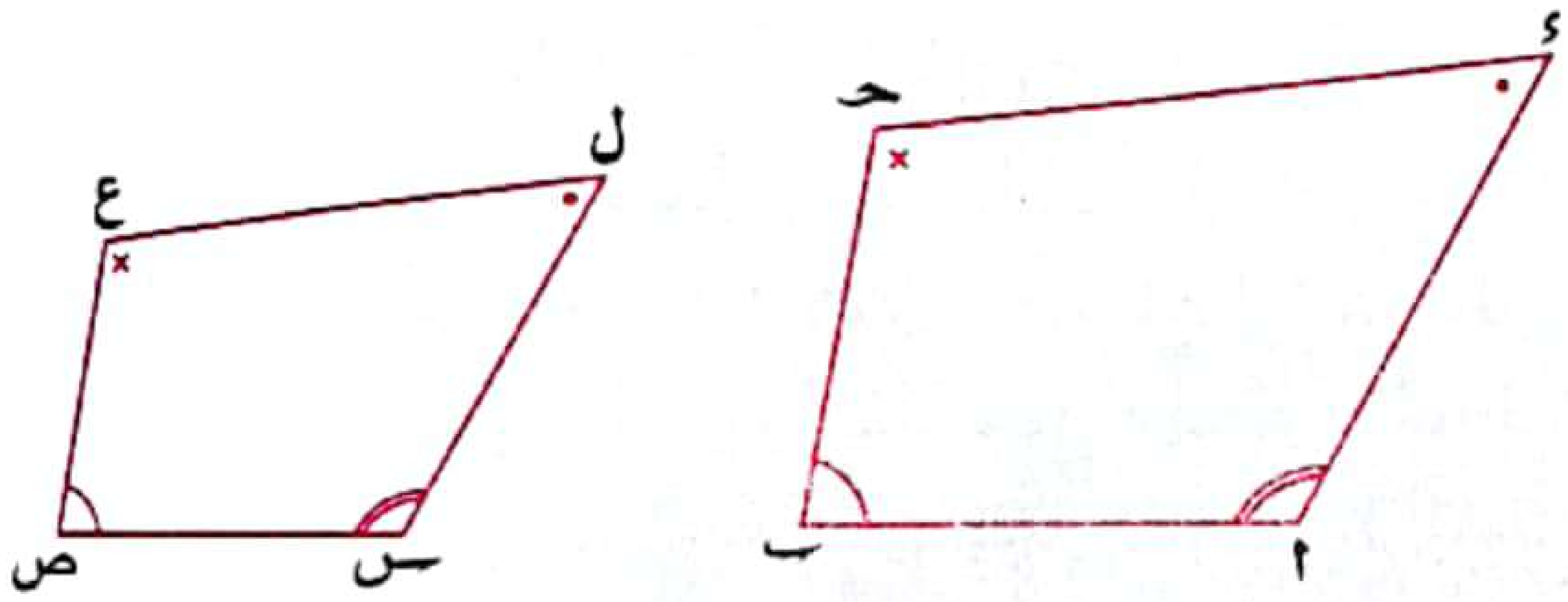
# تشابه المضلعات

## تعريف

يُقال لمضلعين م$_1$ ، م$_2$ (لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق **الشرطان الآتيان معًا** :

(١) تساوى قياسات الزوايا المتناظرة.　　　(٢) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

**وفى هذه الحالة نكتب :** المضلع م$_1$ ~ المضلع م$_2$ **لتعنى أن :** المضلع م$_1$ **يشابه** المضلع م$_2$




**ففى الشكل المقابل إذا كان :**

(١) ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)

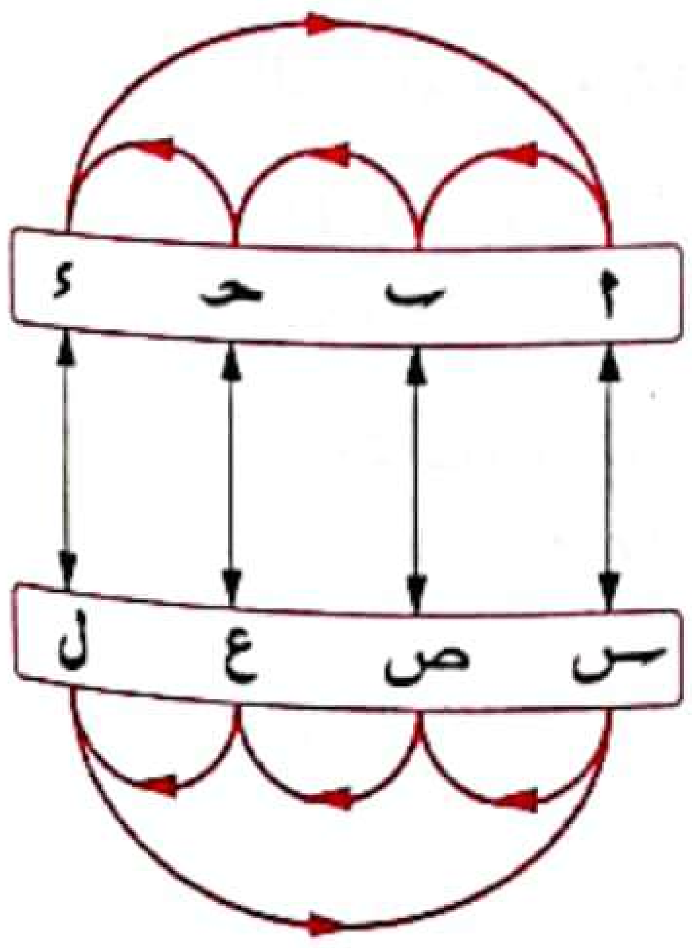
، ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

(٢) $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$　　فإن : المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

### ملاحظة ١

يُفضل عند كتابة المضلعين المتشابهين أن نكتبهما بنفس ترتيب رءوسهما المتناظرة حتى يسهل استنتاج الزوايا المتساوية فى القياس وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع.

**فمثلًا** إذا كتبنا أن المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل




فإننا نستنتج مباشرة أن :

(١) ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)

، ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

(٢) $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$

### ملاحظة ٢

إذا كان المضلع أ ب ح ء ~ المضلع س ص ع ل فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}} = \text{ك}$ (نسبة التشابه أو معامل التشابه) حيث : ك > صفر

فإذا كان معامل تشابه المضلع أ ب ح ء للمضلع س ص ع ل = ك

فإن معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب ح ء = $\frac{1}{\text{ك}}$

### ملاحظة ٣

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_1$ للمضلع $م_2$

إذا كان : ك > ١ فإن : المضلع $م_1$ هو تكبير للمضلع $م_2$ وتسمى ك نسبة التكبير

إذا كان : ٠ < ك < ١ فإن : المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$ وتسمى ك نسبة التصغير

إذا كان : ك = ١ فإن : المضلع $م_1$ يطابق المضلع $م_2$

وبصفة عامة : يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

### ملاحظة ٤

لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتحقق شرطا التشابه معًا ولا يكفى تحقق أحدهما دون الآخر.

**فمثلًا**

- ليس جميع المستطيلات متشابهة فبرغم تساوى قياسات زواياها المتناظرة (كل = ٩٠°)
  إلا أن أطوال أضلاعها المتناظرة يمكن أن تكون غير متناسبة.
- كذلك ليس جميع المعينات متشابهة فبرغم أن أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة
  إلا أن زواياها المتناظرة يمكن أن تكون غير متساوية القياس.

### ملاحظة ٥

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين ، بينما ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين.

### ملاحظة ٦

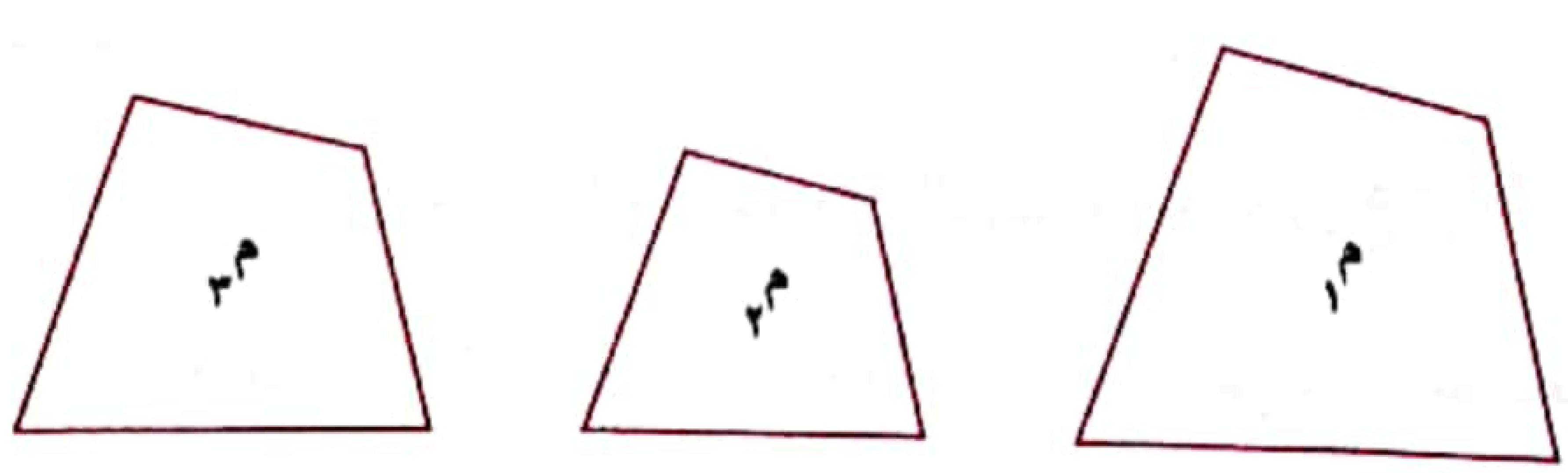
المضلعان المشابهان لمضلع ثالث متشابهان.

**أى أنه**

إذا كان المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$

، المضلع $م_2$ ~ المضلع $م_3$

فإن : المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_3$



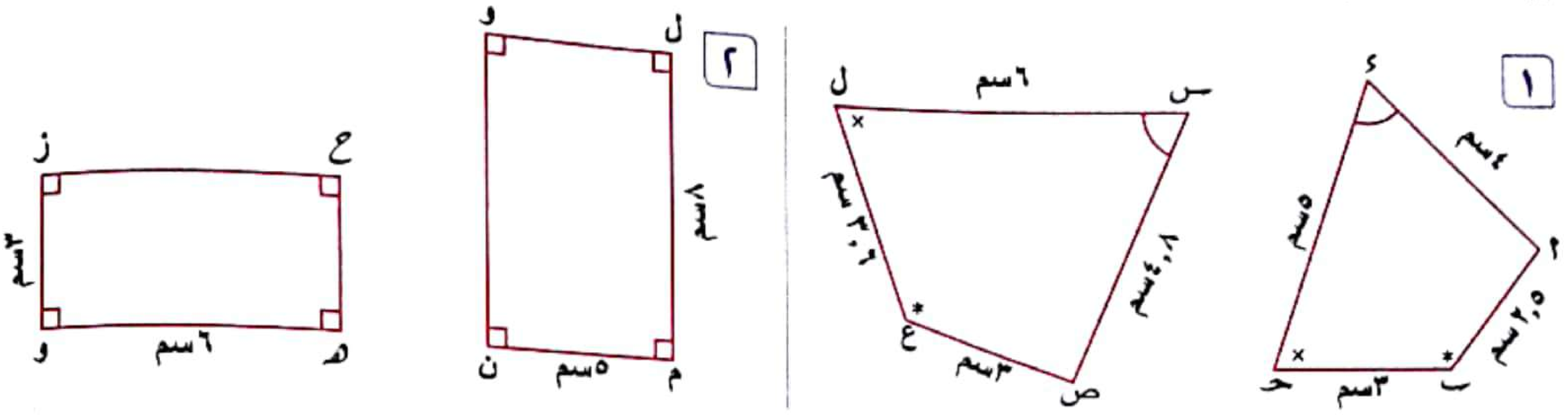
**ملاحظة ٧**

**كل المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة.**

- جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة.
- جميع المربعات متشابهة.
- جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة ، وهكذا.

## مثال ١

**بيِّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة مع ذكر السبب وإذا كانت متشابهة أوجد نسبة التشابه :**




### الحل

١ المضلعان أ ب حـ ء ، ص ع ل س متشابهان

**لأن** ق (∠ب) = ق (∠ع) ، ق (∠حـ) = ق (∠ل) ، ق (∠ء) = ق (∠س) ∴ ق (∠أ) = ق (∠ص)

، $\frac{أب}{صع} = \frac{بحـ}{عل} = \frac{حـء}{لس} = \frac{ءأ}{صس}$ ، $\frac{٢,٥}{٣} = \frac{٣}{٣,٦} = \frac{٥}{٦} = \frac{٤}{٤,٨}$ ∴ نسبة التشابه = $\frac{٥}{٦}$

٢ المضلعان ل م ن و ، هـ و ز ح غير متشابهين

**فبرغم أن** ق (∠ل) = ق (∠هـ) ، ق (∠م) = ق (∠و) ، ق (∠ن) = ق (∠ز)

، ق (∠و) = ق (∠ح) (الزوايا المتناظرة متساوية فى القياس)

**ولكن** $\frac{ل م}{هـ و} \neq \frac{م ن}{و ز}$ **لأن** $\frac{٨}{٦} \neq \frac{٥}{٣}$

## مثال ٢

فى الشكل المقابل :

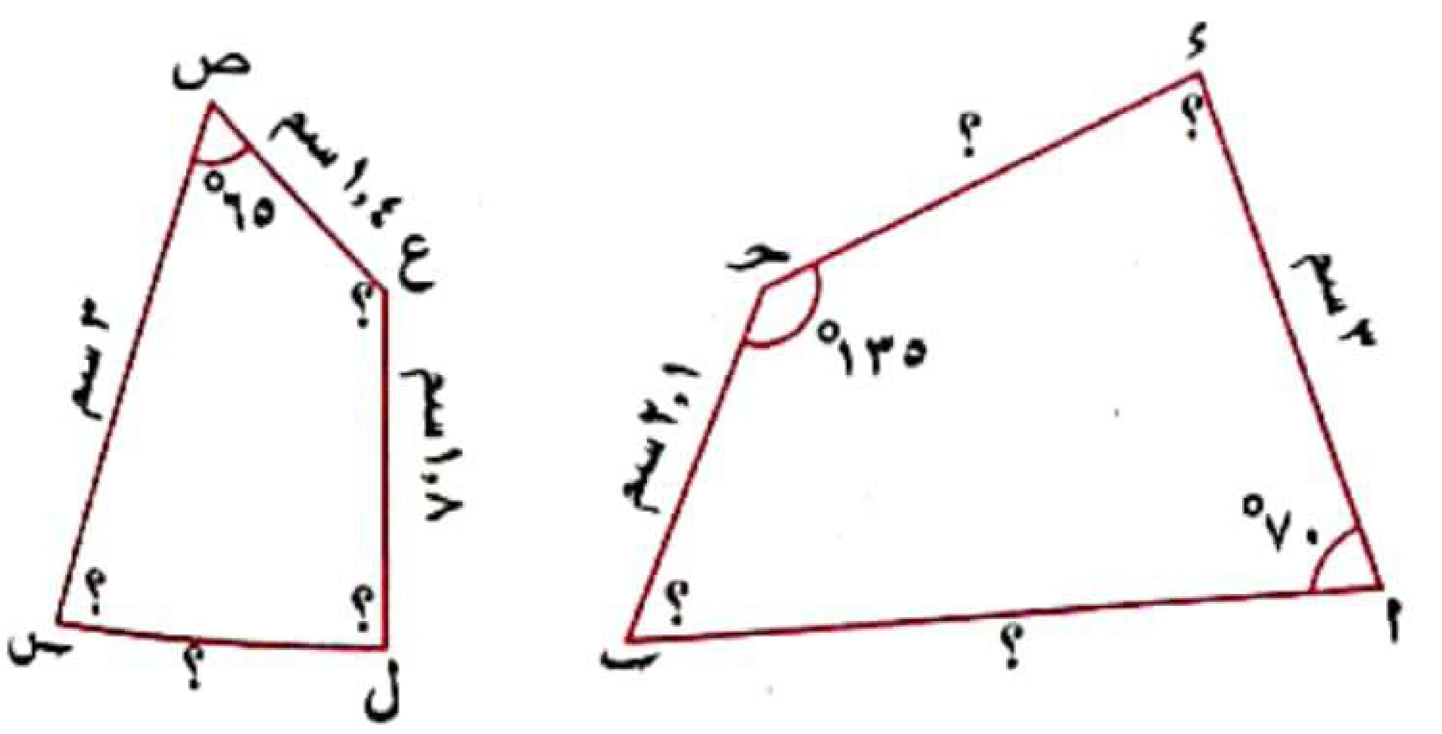
إذا كان المضلعان أ ب حـ ء

، س ص ع ل متشابهين

**فأوجد :**

١ معامل تشابه المضلع أ ب حـ ء للمضلع س ص ع ل

٢ أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة فى كلا المضلعين.



**الحـــل**

∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$ = معامل التشابه.

∴ $\frac{\text{أ ب}}{٣} = \frac{٢,١}{١,٤} = \frac{\text{حـ ء}}{١,٨} = \frac{٣}{\text{ل س}}$ ∴ معامل التشابه = $\frac{٢,١}{١,٤} = \frac{٣}{٢}$ **(المطلوب أولًا)**

، أ ب = $\frac{٢,١ \times ٣}{١,٤}$ = ٤,٥ سم ، حـ ء = $\frac{٢,١ \times ١,٨}{١,٤}$ = ٢,٧ سم ، ل س = $\frac{٣ \times ١,٤}{٢,١}$ = ٢ سم

، ∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص) ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

∴ ق (∠ س) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٦٥° ، ق (∠ ع) = ١٣٥°

، ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق (∠ ء) = ق (∠ ل) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٦٥° + ١٣٥°) = ٩٠° **(المطلوب ثانيًا)**

**ملاحظة**

في المثال السابق نلاحظ أن :

∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}$ = معامل التشابه

$= \frac{\text{أ ب + ب حـ + حـ ء + ء أ}}{\text{س ص + ص ع + ع ل + س ل}}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{١٢,٣}{٨,٢} = \frac{٣}{٢}$ = معامل التشابه.

**أى أن**

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين = النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما.

## مثال ٣

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتيمترات والآخر محيطه ٤٨ سم أوجد أطوال أضلاع المضلع الآخر.

**الحـــل**

بفرض أن المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ ~ المضلع أ ب حـ ء هـ

∴ $\frac{\text{محيط المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ}}{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء هـ}} = \frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{حَ ءَ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ءَ هَ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{هَ أَ}}{\text{هـ أ}}$

، ∵ $\frac{\text{محيط المضلع أَبَحَءَهَ}}{\text{محيط المضلع أبحءه}} = \frac{٤٨}{٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠} = \frac{٤٨}{٣٢} = \frac{٣}{٢}$

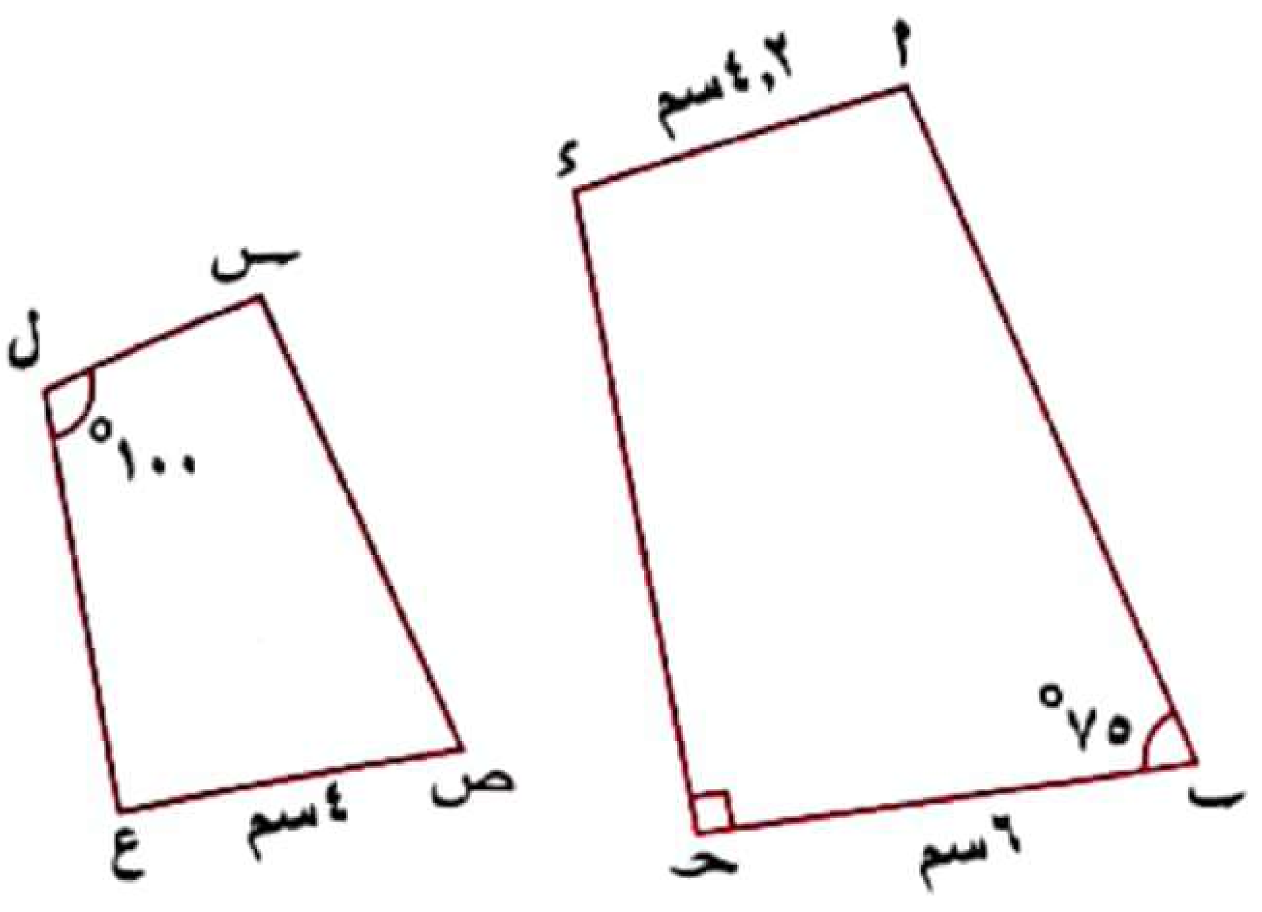
∴ $\frac{\text{أَبَ}}{\text{أب}} = \frac{\text{بَحَ}}{\text{بح}} = \frac{\text{حَءَ}}{\text{حء}} = \frac{\text{ءَهَ}}{\text{ءه}} = \frac{\text{هَأَ}}{\text{هأ}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أَبَ}}{٣} = \frac{\text{بَحَ}}{٥} = \frac{\text{حَءَ}}{٦} = \frac{\text{ءَهَ}}{٨} = \frac{\text{هَأَ}}{١٠} = \frac{٣}{٢}$

∴ أَبَ = ٤,٥ سم ، بَحَ = ٧,٥ سم ، حَءَ = ٩ سم

، ءَهَ = ١٢ سم ، هَأَ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

## حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :




المضلع أبحء ~ المضلع س ص ع ل

[١] احسب : ق (∠ س) ، طول $\overline{\text{س ل}}$

[٢] إذا كان محيط المضلع أبحء يساوى ٢٥,٨ سم

احسب محيط المضلع : س ص ع ل

## مثال ٤

أبحـ مثلث فيه : أب = ٤ سم ، بحـ = ٥ سم ، أحـ = ٨ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له إذا كان :

[١] معامل التشابه = ٢,٤ [٢] معامل التشابه = ٠,٧

### الحل

[١] ∵ معامل التشابه ك = ٢,٤ > ١ ∴ المثلث المطلوب تكبير للمثلث أبحـ

وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أبحـ ∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أحـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{س ص}}{٤} = \frac{\text{ص ع}}{٥} = \frac{\text{س ع}}{٨} = ٢,٤$

∴ س ص = ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم ، ص ع = ٥ × ٢,٤ = ١٢ سم

، س ع = ٨ × ٢,٤ = ١٩,٢ سم (وهو المطلوب)

[٢] ∵ معامل التشابه ك = ٠,٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث أبحـ وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أبحـ :

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أحـ}}$ = معامل التشابه. ∴ $\frac{\text{س ص}}{٤} = \frac{\text{ص ع}}{٥} = \frac{\text{س ع}}{٨} = ٠,٧$

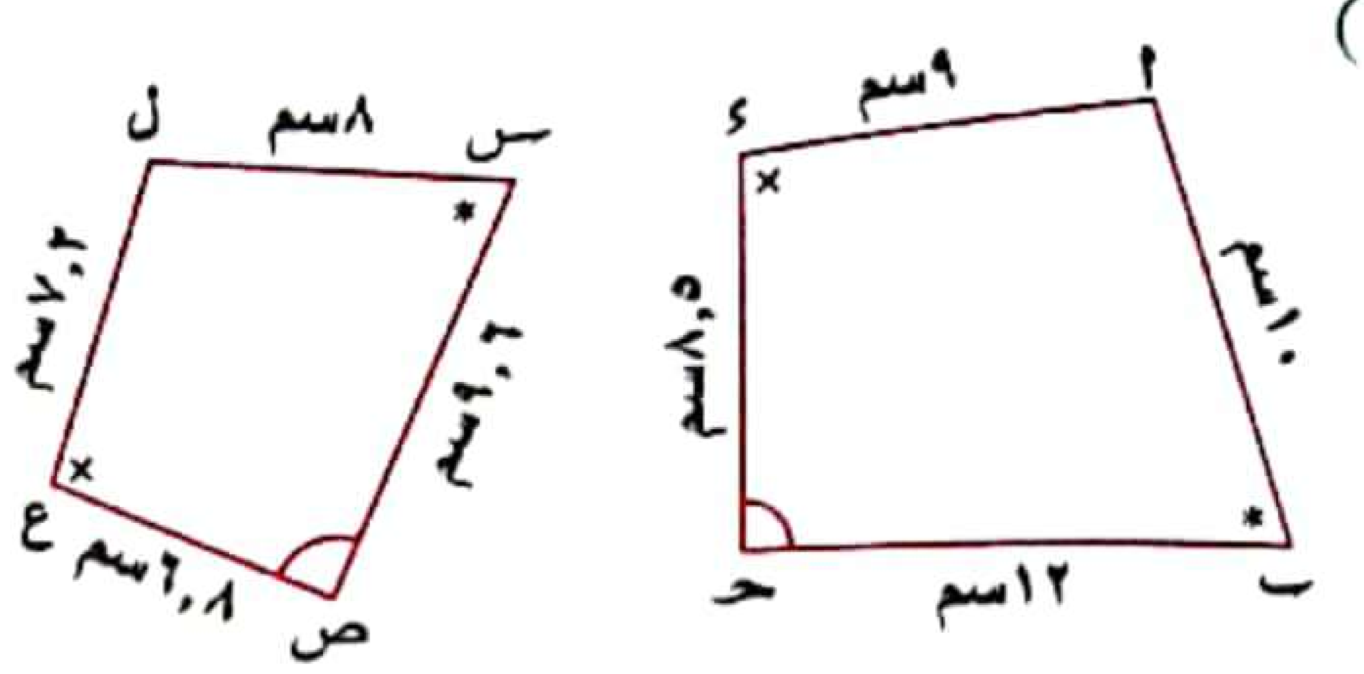
∴ س ص = ٤ × ٠,٧ = ٢,٨ سم ، ص ع = ٥ × ٠,٧ = ٣,٥ سم

، س ع = ٨ × ٠,٧ = ٥,٦ سم (وهو المطلوب)

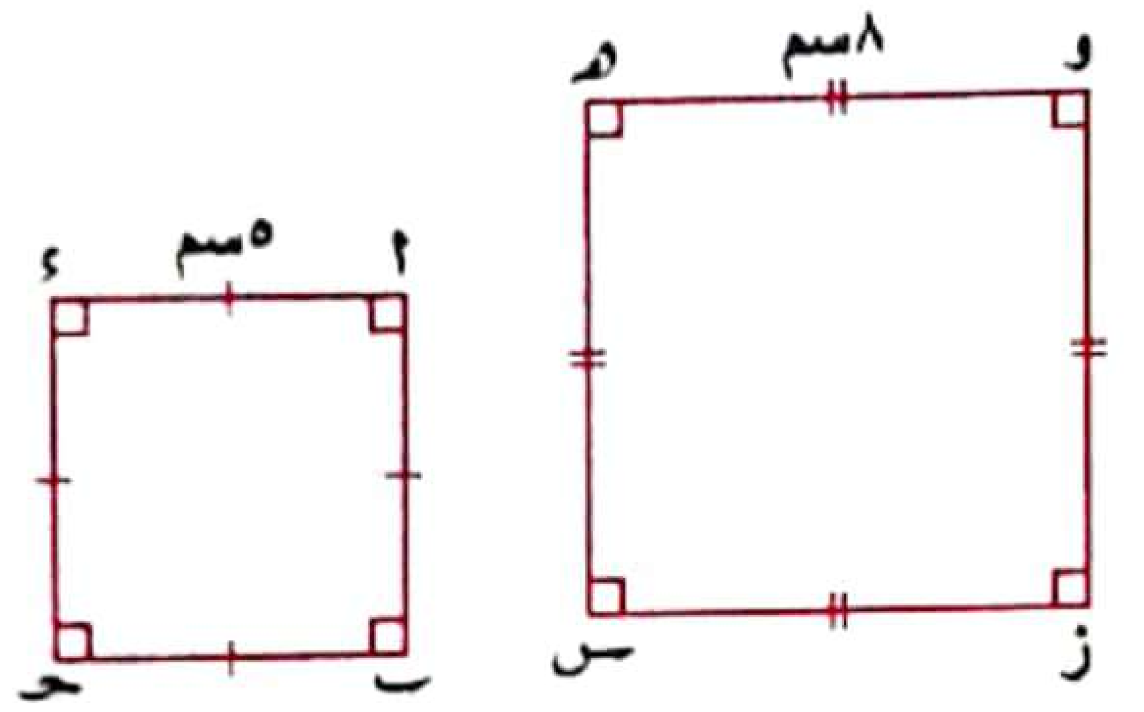
📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

**١** 📖 بيِّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة ، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة ، وحدد معامل التشابه.

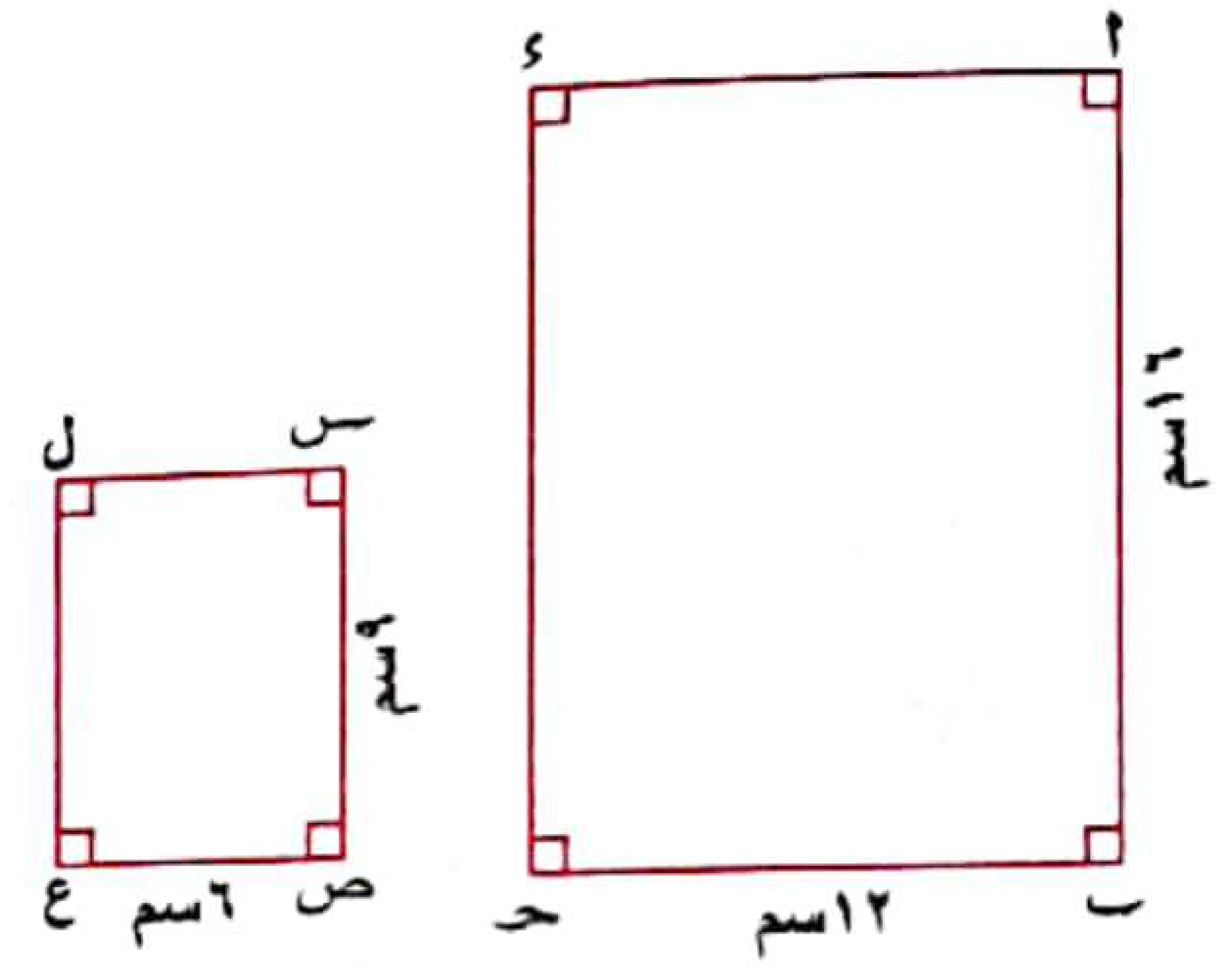
(١)



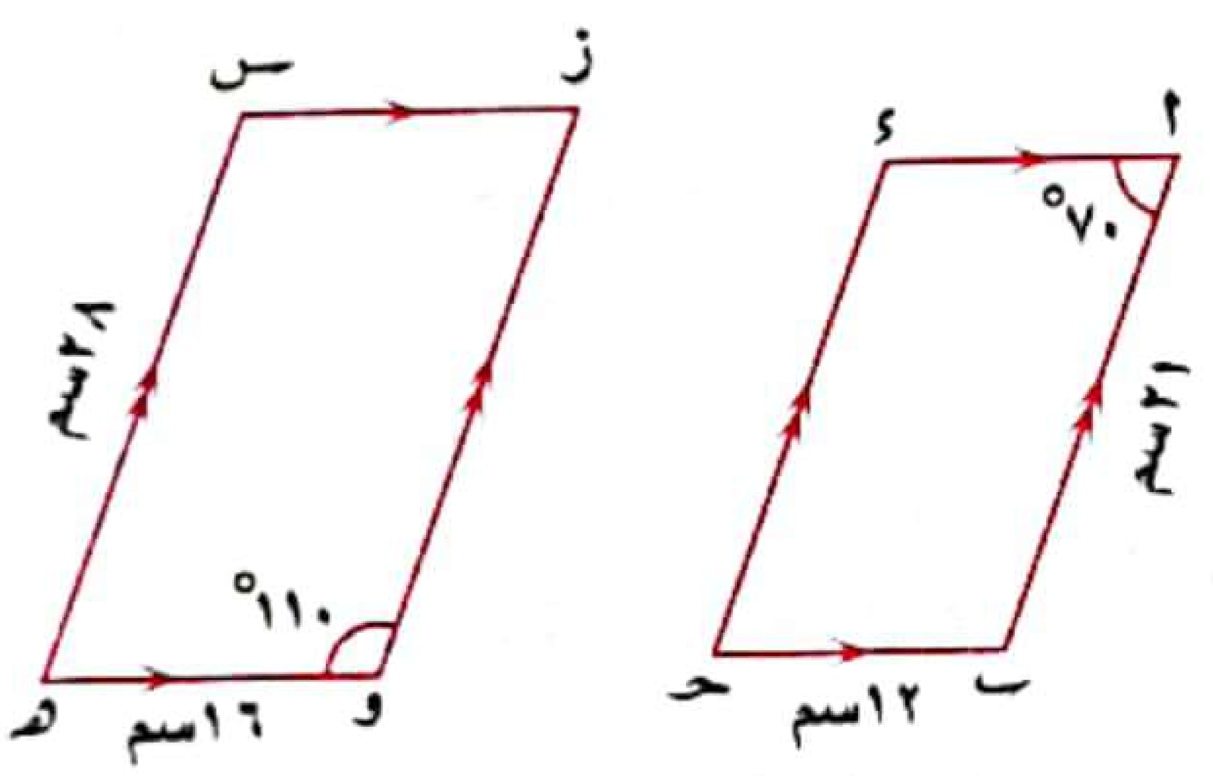

(٢)



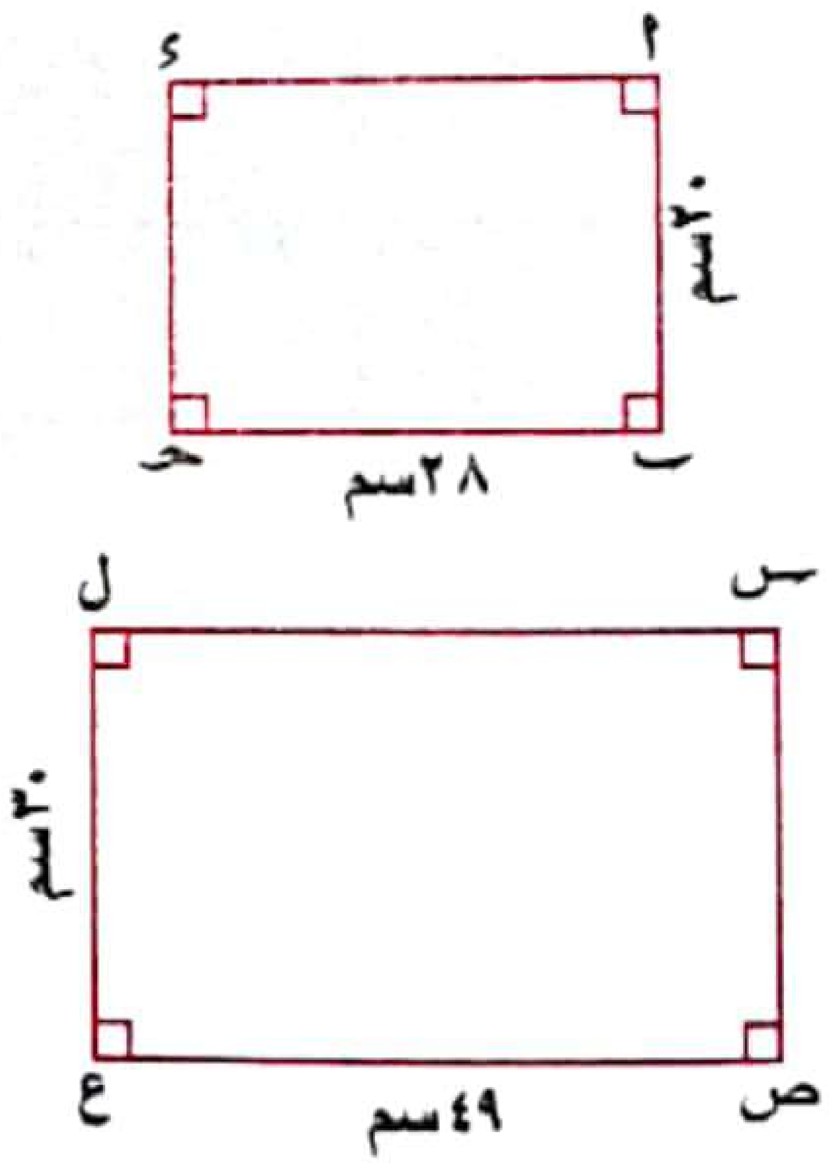

(٣)



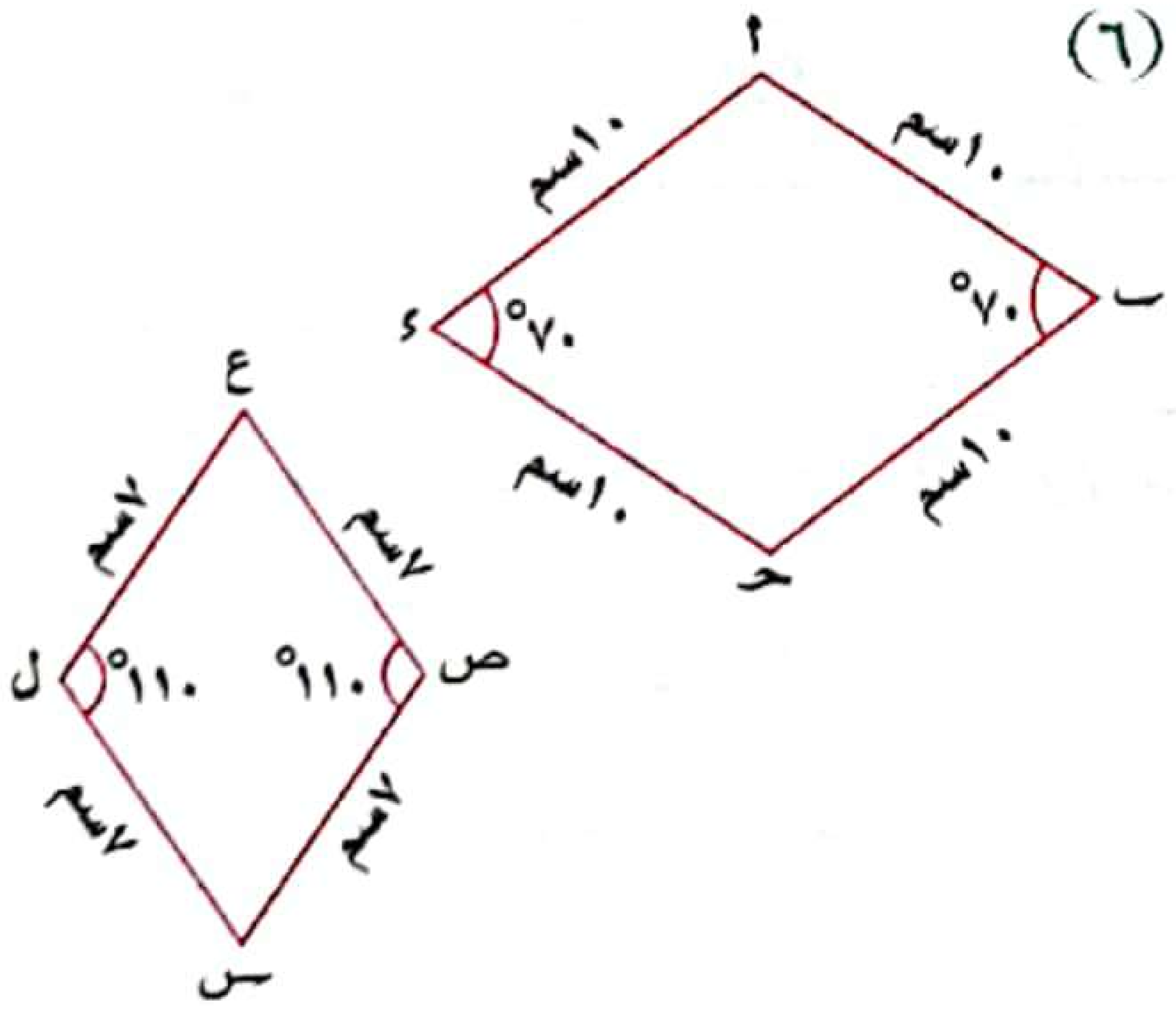

(٤)



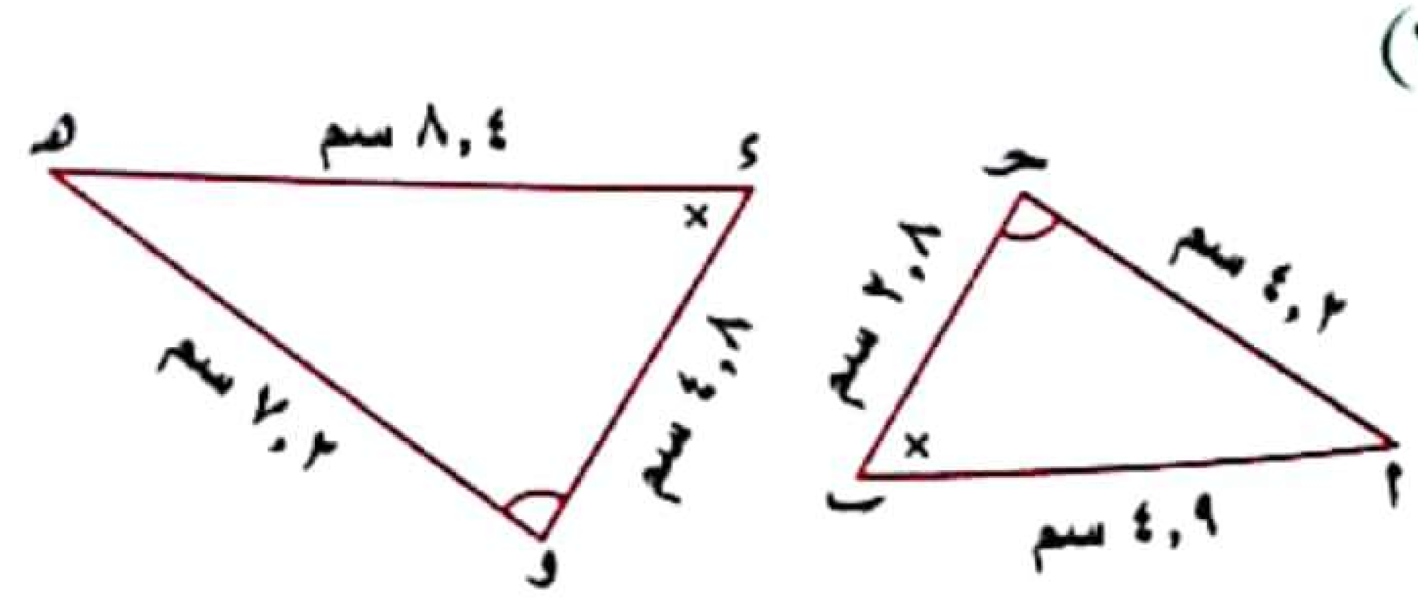

(٥)



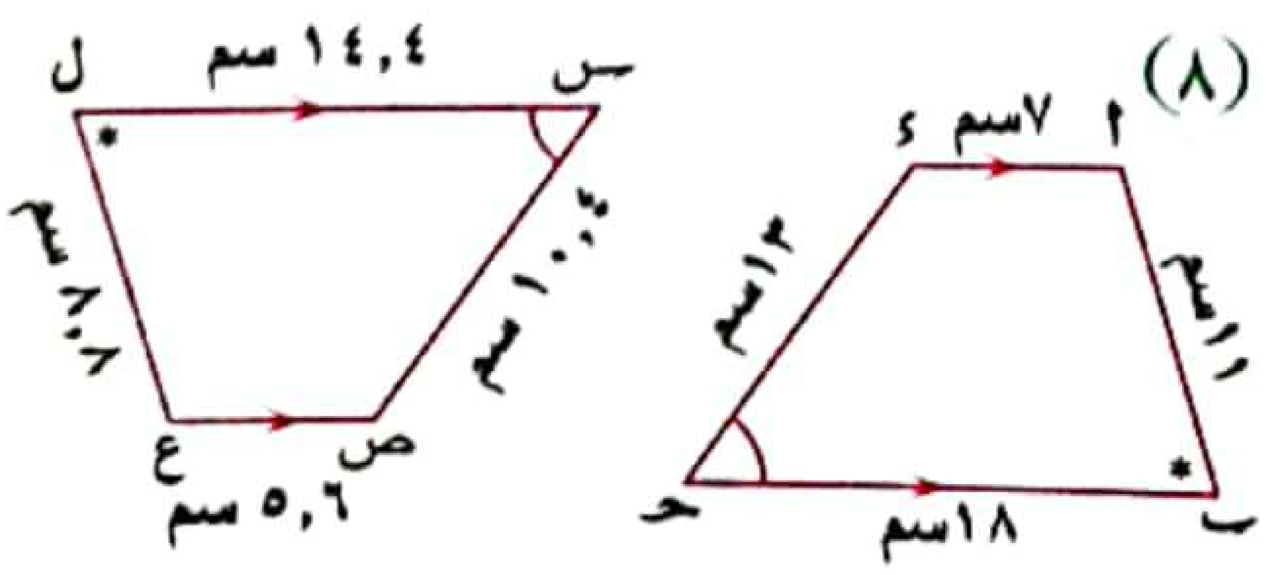

(٦)




(٧)




(٨)



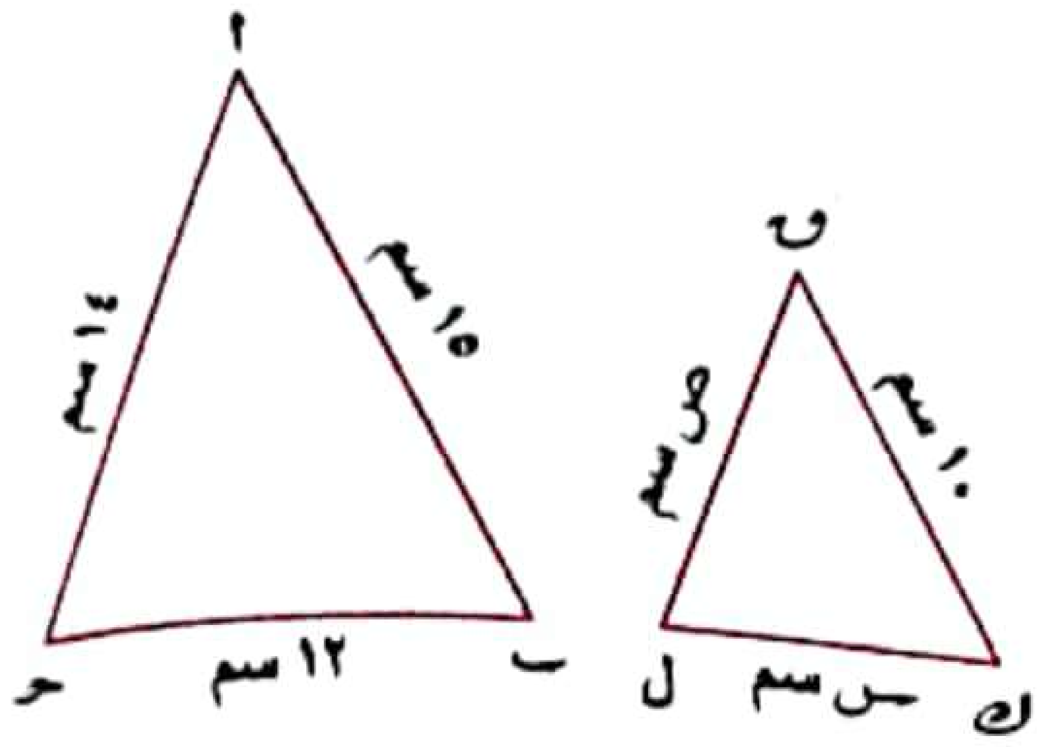
**٢ في الشكل المقابل :**

إذا كان : Δ ا ب حـ ~ Δ ن ك ل وأطوال الأضلاع مبينة على الشكل

**فأوجد :**

(١) معامل تشابه المثلث ا ب حـ للمثلث ن ك ل

(٢) قيمة كل من س ، ص




« $\frac{٣}{٢}$ »

«٨ سم ، ٩ $\frac{١}{٢}$ سم»

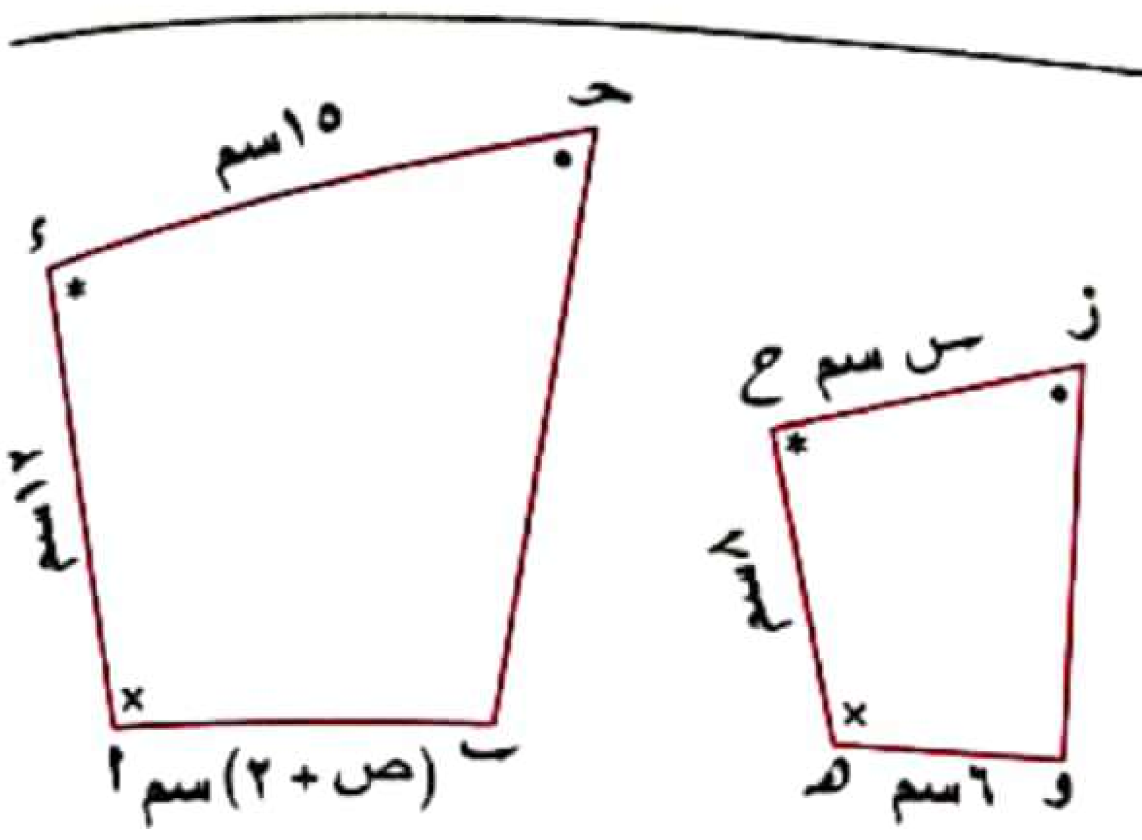
**٣ في الشكل المقابل :**

المضلع ا ب حـ ء ~ المضلع هـ و ز ح

**أوجد :**

(١) معامل تشابه المضلع ا ب حـ ء للمضلع هـ و ز ح

(٢) قيمة كل من س ، ص




« $\frac{٣}{٢}$ »

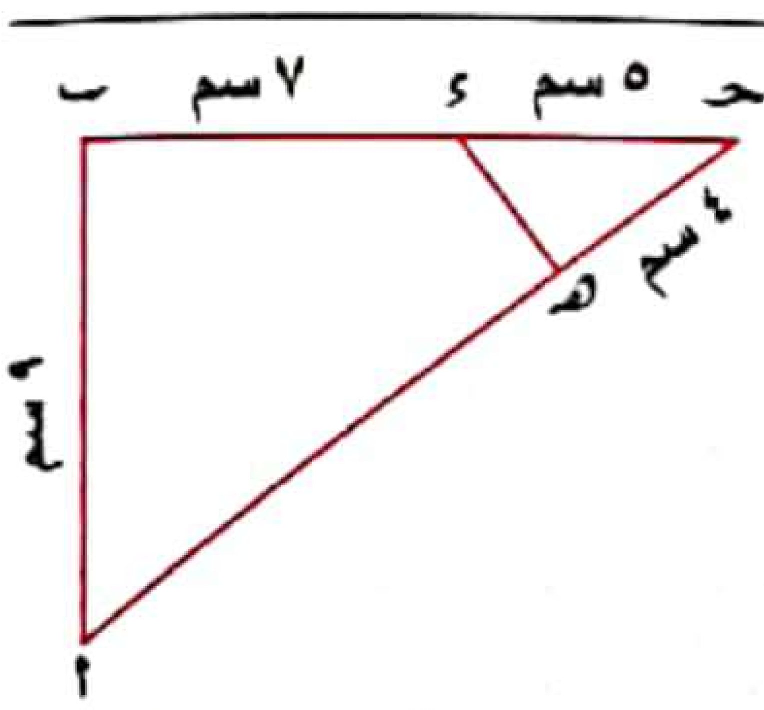
«١٠ سم ، ٧ سم»

**٤ في الشكل المقابل :**

إذا كان : Δ حـ ب ا ~ Δ حـ هـ ء

، وباستخدام الأطوال المبينة على الرسم.

**أوجد :** طول كل من $\overline{\text{هـ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ ا}}$



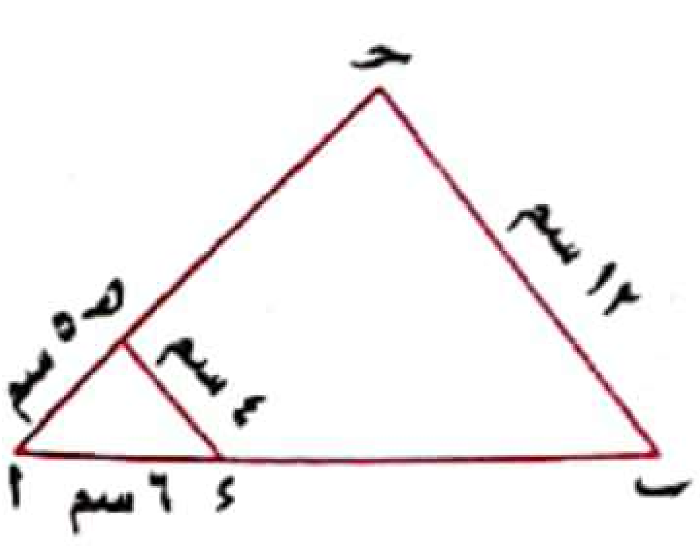

«٣ سم ، ١١ سم»

**٥ في الشكل المقابل :**

Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب حـ أثبت أن : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، ومن الأطوال المبينة على الشكل

**أوجد :** طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$



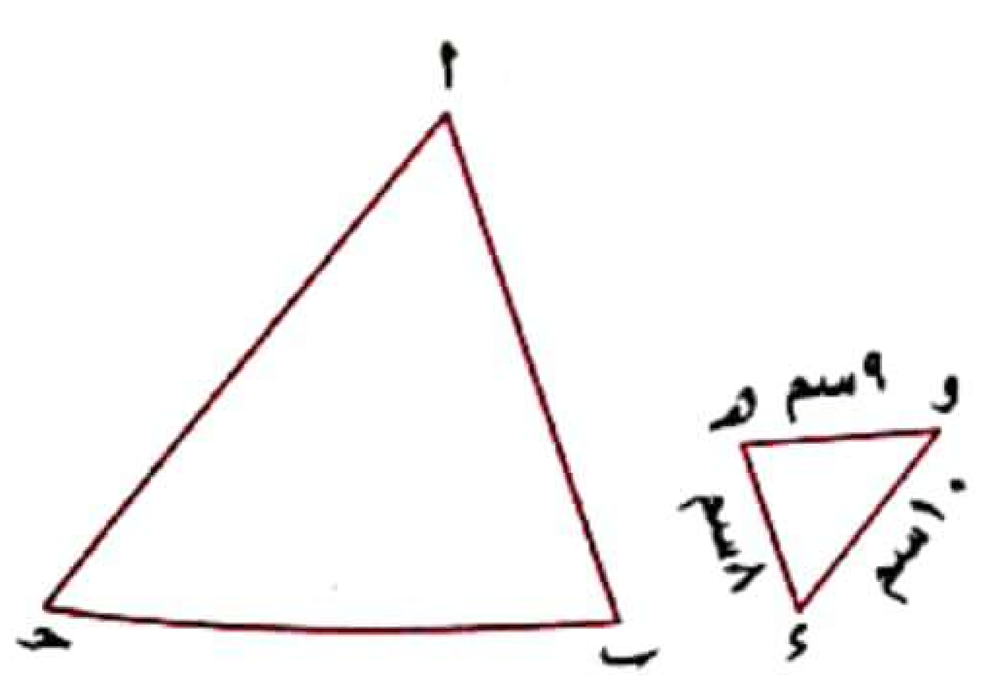

«١٢ سم ، ١٠ سم»

**٦ في الشكل المقابل :**

Δ ا ب حـ ~ Δ ء هـ و ، ء هـ = ٨ سم ، هـ و = ٩ سم

، و ء = ١٠ سم إذا كان محيط Δ ا ب حـ = ٨١ سم

**أوجد :** أطوال أضلاع Δ ا ب حـ




«٢٤ سم ، ٢٧ سم ، ٣٠ سم»

**٧** مثلثان متشابهان محيط أحدهما ٧٤ سم وأطوال أضلاع الآخر ٤,٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث الأول.

«٣٢ سم»

---

**٨** مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثانى ٢٠٠ سم.
أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته.

«٦٠ سم ، ٢٤٠٠ سم٢»

---

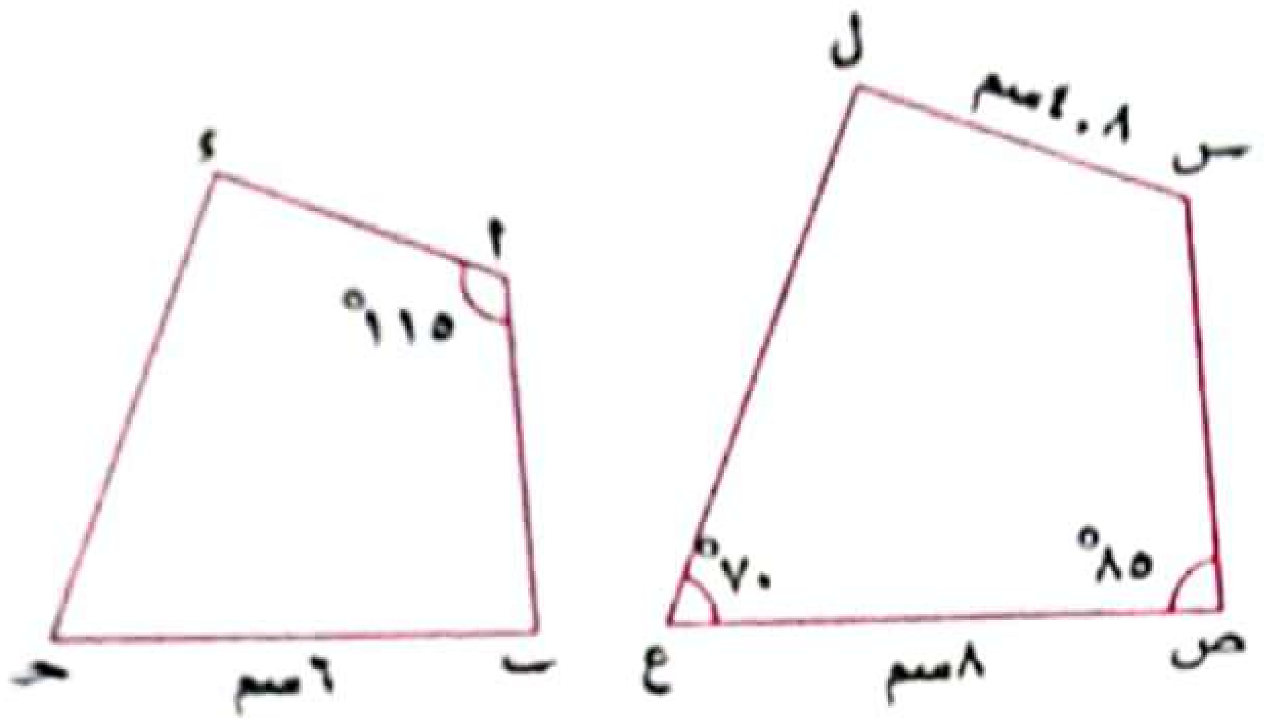
**٩** فى الشكل المقابل :

المضلع ﺃ ﺏ ﺣ ﺀ ~ المضلع س ص ع ل

(١) احسب : ق (∠ س ل ع) ، طول $\overline{أ ء}$

(٢) إذا كان محيط المضلع ﺃ ﺏ ﺣ ﺀ = ١٩,٥ سم

أوجد : محيط المضلع س ص ع ل




«٩٠° ، ٣,٦ سم ، ٢٦ سم»

---

**١٠** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢ وكان ٠ < ك < ١
فإن المضلع م١ هو .......... للمضلع م٢

(أ) مطابق (ب) تكبير (ﺟ) تصغير (د) ضعف المساحة

(٢) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم
فإن محيط الأكبر .......... سم

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (ﺟ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(٣) لكى يتشابه المضلعان م١ ، م٢ يكون كافيًا الحصول على ..........

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(ﺟ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(٤) لكى يتشابه المعينان ﺃ ﺏ ﺣ ﺀ ، س ص ع ل يكون كافيًا الحصول على ..........

(أ) ق (∠ ﺃ) = ٦٠° ، ق (∠ ص) = ١٢٠° فقط.

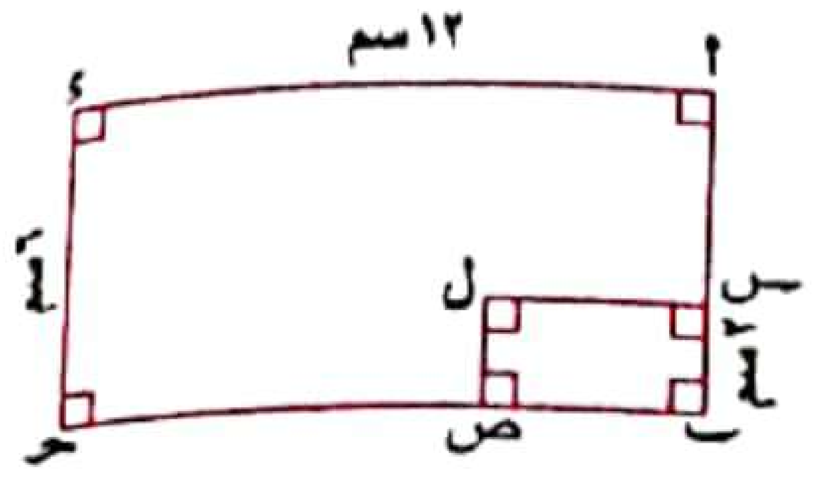
(ب) محيط المعين ﺃ ﺏ ﺣ ﺀ = ٢ محيط المعين س ص ع ل فقط.

(ﺟ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شىء مما سبق.

(٥) إذا كان ك١ هو معامل تشابه المضلع م١ إلى المضلع م٢ ، ك٢ هو معامل تشابه المضلع م٢ إلى المضلع م٣
فإن معامل تشابه المضلع م١ إلى المضلع م٣ هو ..........

(أ) ك١ + ك٢ (ب) ك١ ك٢ (ﺟ) $\frac{ك_١}{ك_٢}$ (د) $\frac{ك_٢}{ك_١}$

(٦) فى الشكل المقابل :

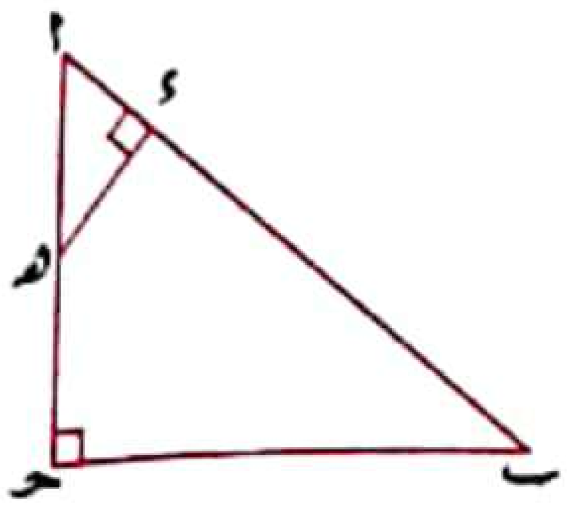



المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ب ص ل

فإن : طول ص حـ = ............ سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٧) فى الشكل المقابل :

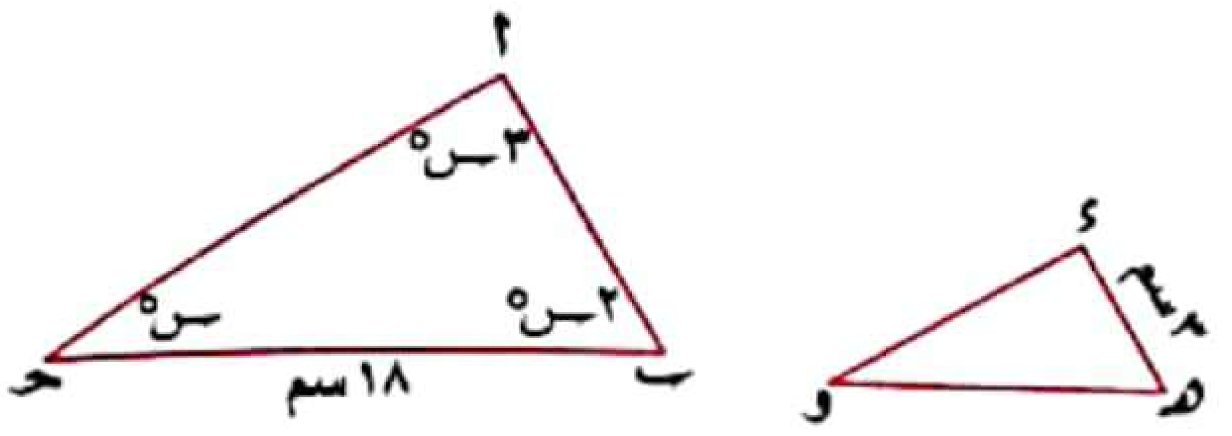



Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء فإذا كان : ق (∠ ب) = ٣ س + ١٠°

، ق (∠ أ هـ ء) = س + ٣٠° فإن : ق (∠ أ) = ............

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٨) فى الشكل المقابل :

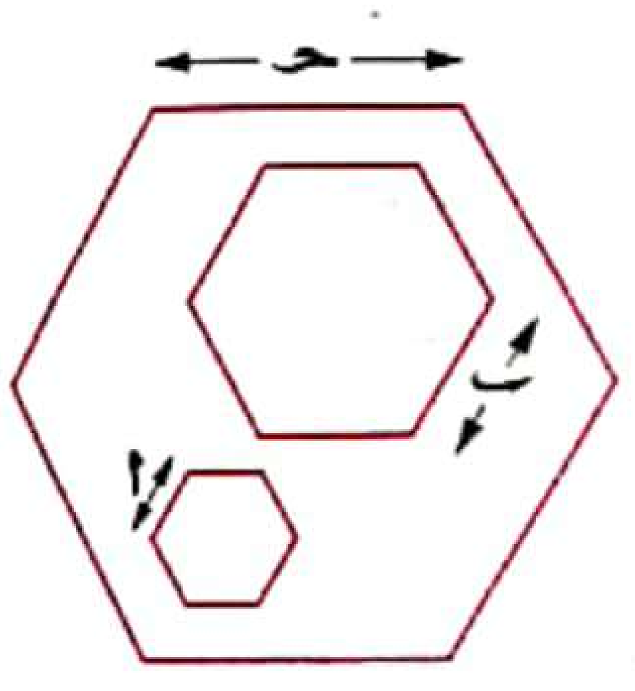



إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

فإن : طول و هـ = ............ سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٩) الشكل المقابل يوضح ثلاثة أشكال سداسية منتظمة




النسبة بين أطوال أضلاعهم كما يلى :

أ : ب = ١ : ٢ ، ب : حـ = ٣ : ٨

فإذا كان طول ضلع المسدس الأكبر = ٣٢ سم

فإن محيط المسدس الأصغر = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

---

**١١** إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل ، أكمل :

(١) أ ب / ب حـ = ........ / ص ع

(٢) أ ب × ع ل = س ص × ............

(٣) (ب حـ + ص ع) / ص ع = (........ + ل س) / ل س

(٤) محيط المضلع ........ / محيط المضلع ........ = س ص / أ ب

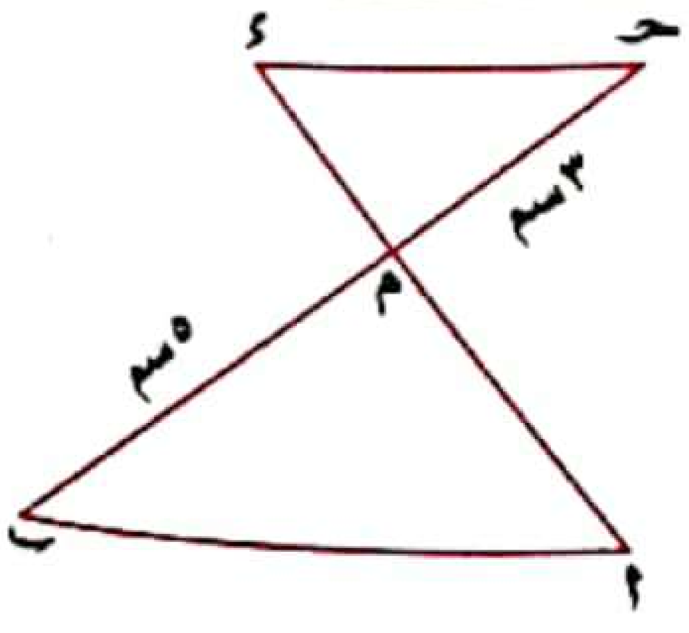
---

**١٢** المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإذا كان : أ ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم

، س ص = ٣ م − ١ ، ص ع = ٣ م + ١ أوجد قيمة م العددية. «٢»

---

**١٣** فى الشكل المقابل :



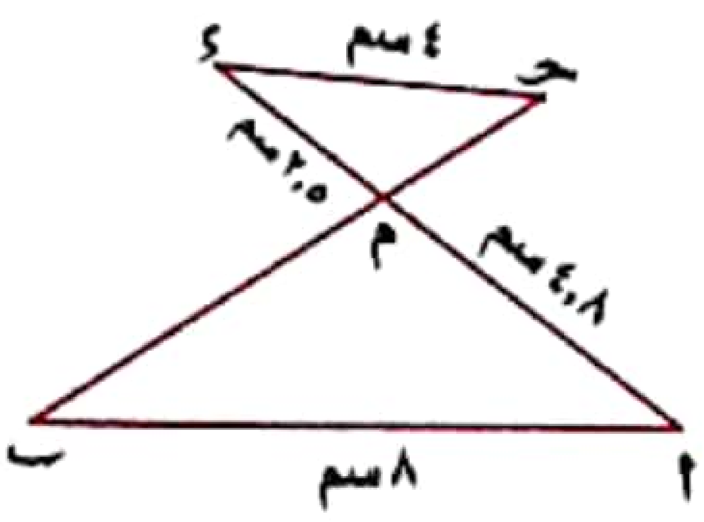

Δ م أ ب ~ Δ م ء حـ أثبت أن : أ ب // حـ ء

وإذا كان : م حـ = ٣ سم ، م ب = ٥ سم ، أ ء = ٦ سم

فأوجد : طول أ م

«٣ $\frac{٣}{٤}$ سم»

**١٤** في الشكل المقابل :




Δ م أ ب ~ Δ م حـ ء

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائرى

وإذا كان : أ ب = ٨ سم ، حـ ء = ٤ سم ، م أ = ٤,٨ سم

، م ء = ٢,٥ سم فأوجد : طول ب حـ

«٧,٤ سم»

---

**١٥** مثلث أ ب حـ فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٢,٥ (٢) معامل التشابه = ٠,٦

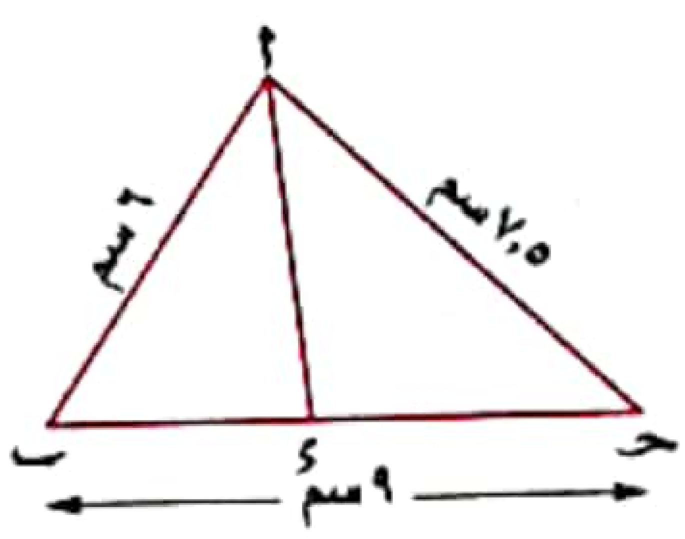
---

**١٦** مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٣ (٢) معامل التشابه = ٠,٤

---

**١٧** في الشكل المقابل :




Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

أثبت أن : أ ب مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ

وأن : أ ب وسط متناسب بين ب ء ، ب حـ

وإذا كان : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، أ حـ = ٧,٥ سم

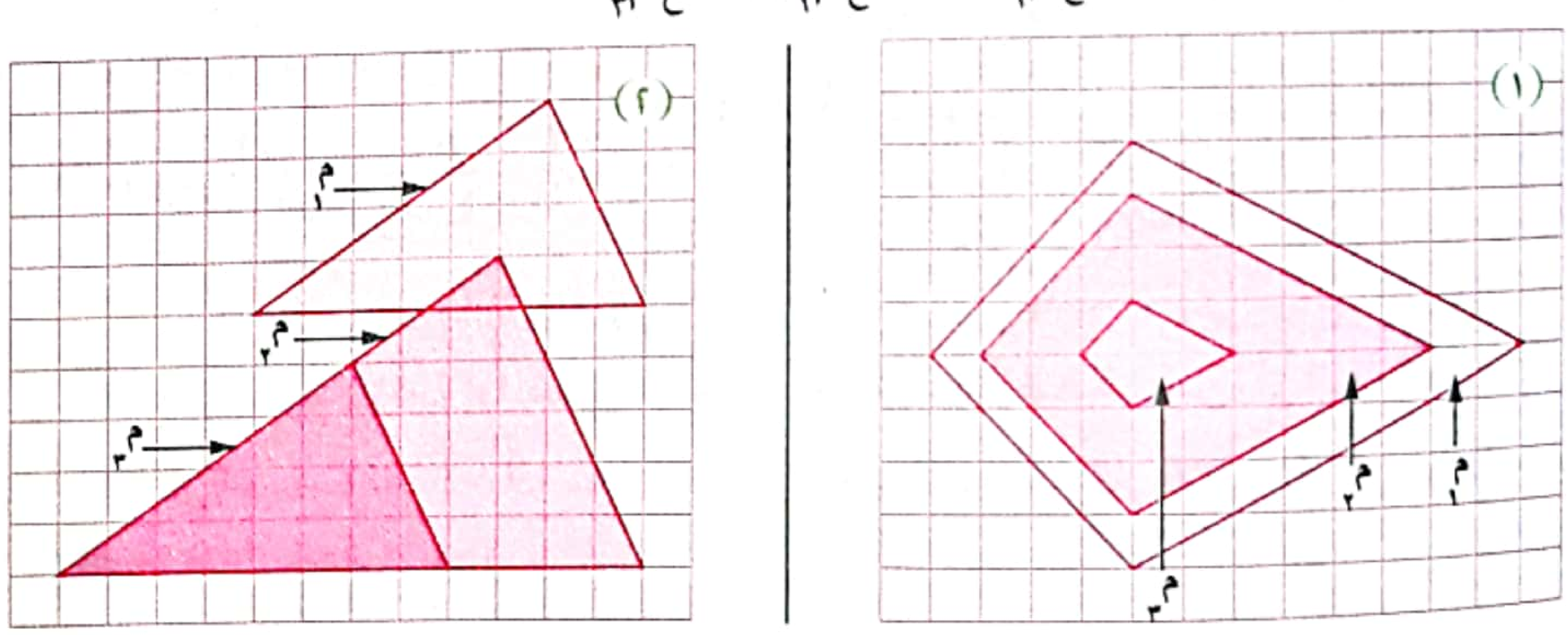
فأوجد : طول كل من أ ء ، حـ ء

«٥ سم ، ٥ سم»

---

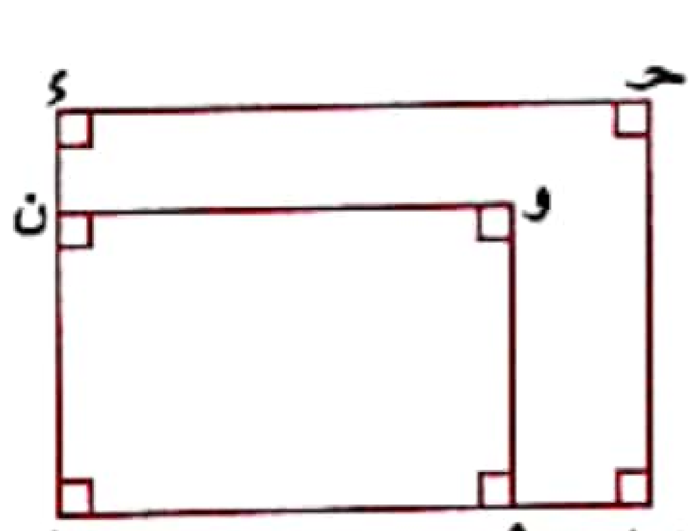
**١٨** في كل من الشكلين التاليين : المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$ ~ المضلع $م_3$

أوجد معامل تشابه كل من المضلع $م_1$ ، المضلع $م_2$ للمضلع $م_3$




## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

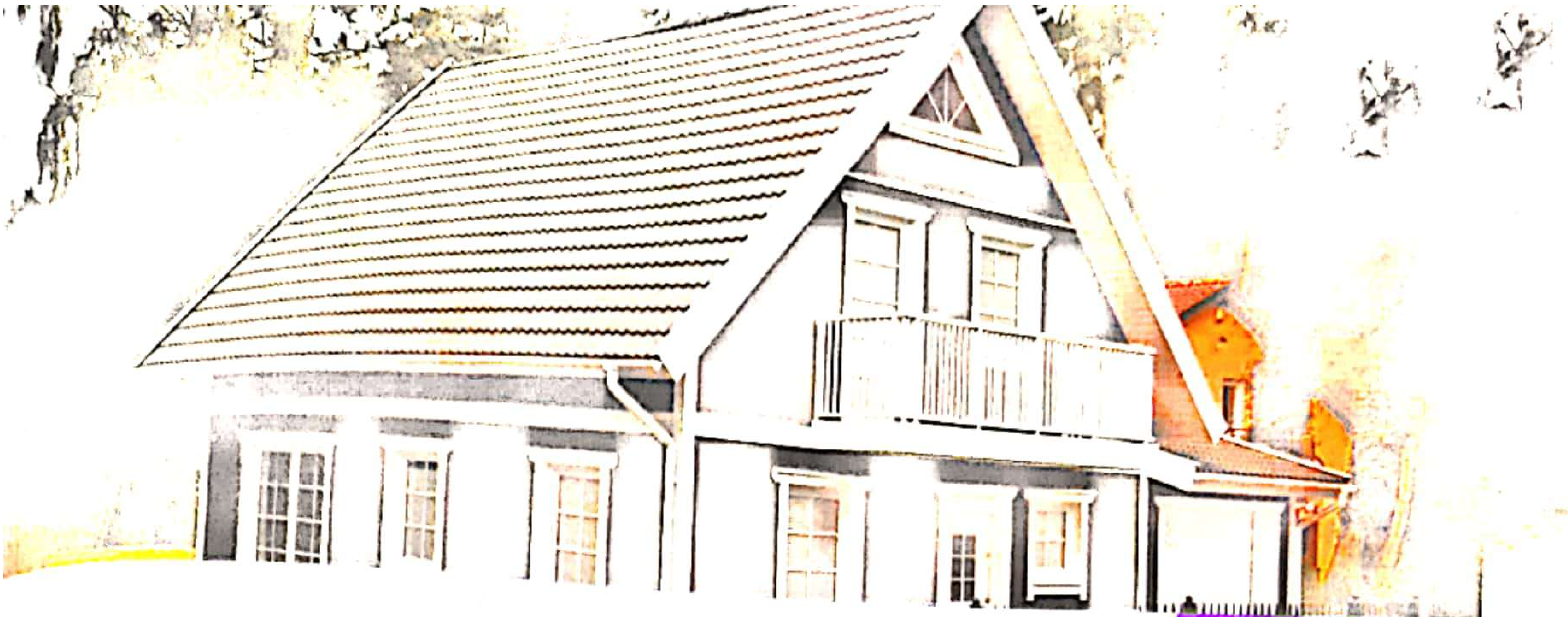
**١٩** في الشكل المقابل :




المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ هـ و ن أثبت أن :

محيط المستطيل أ ب حـ ء : محيط المستطيل أ هـ و ن

= (أ ب – أ ء) : (أ هـ – أ ن)



الدرس 2

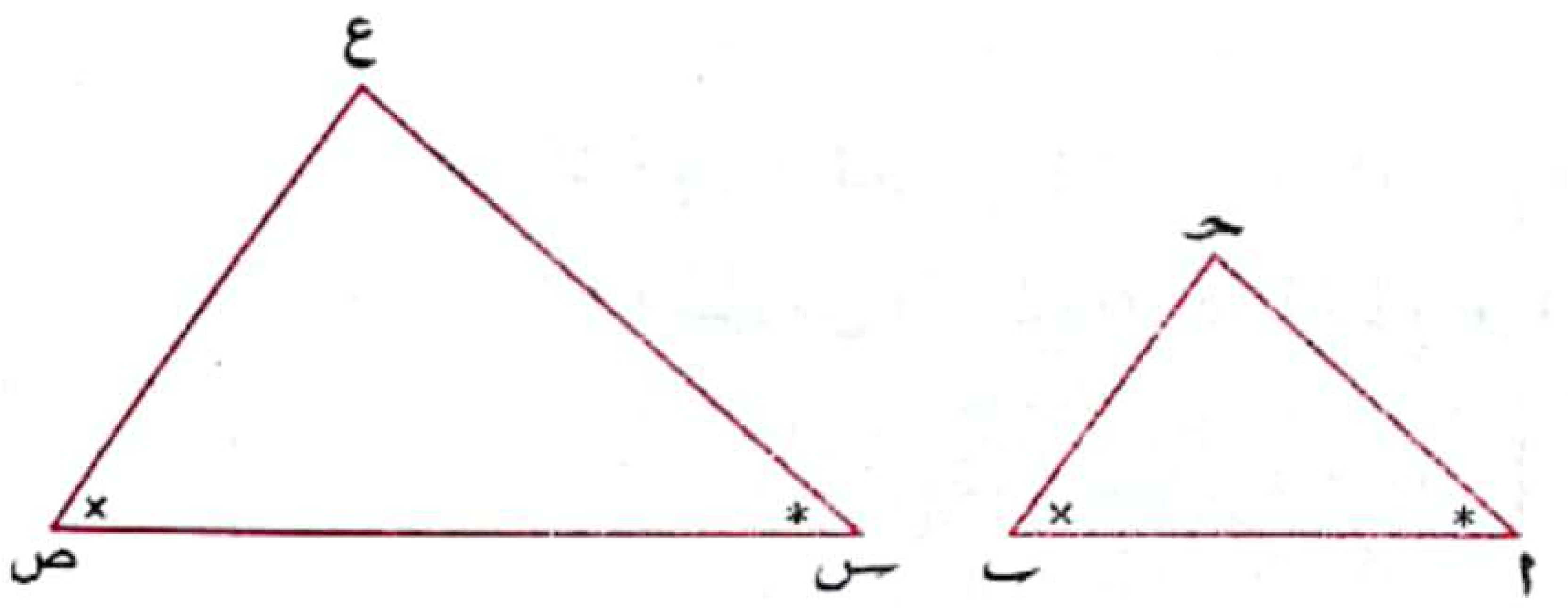
# تشابه المثلثات

## حالات تشابه المثلثات

### الحالة الأولى

**مسلمة**

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.




**أى أنه فى الشكل المقابل :**

إذا كانت : ∠ أ ≡ ∠ س ، ∠ ب ≡ ∠ ص

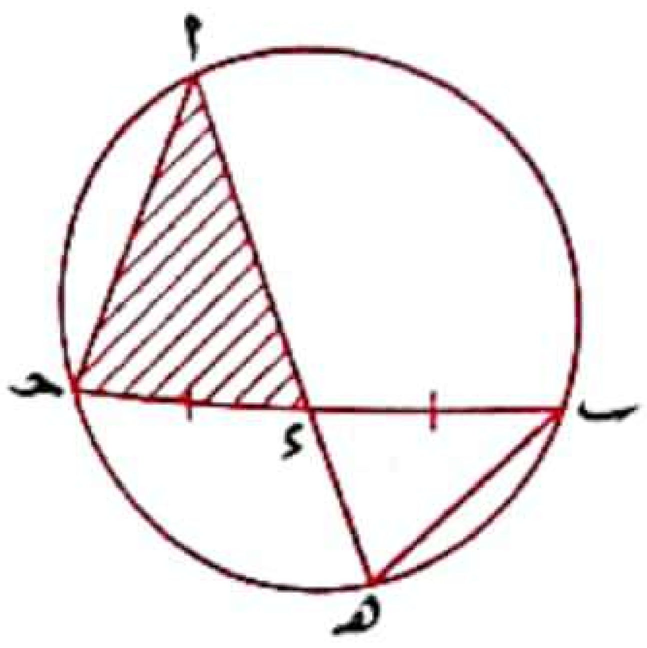
فإن : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع

**وينتج من ذلك أن :** $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{س ع}}$

**ملاحظات**

1. يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة فى أحدهما قياس زاوية حادة فى الآخر.
2. يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس زاوية فى أحدهما قياس الزاوية المناظرة لها فى الآخر.
3. المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.

**مثال 1**




فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أهـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى ء حيث ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن :

1. Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء هـ
2. $(\text{ب ء})^2 = \text{أ ء} \times \text{ء هـ}$

**الحـل**

∵ ΔΔ أ ء حـ ، ب ء هـ فيهما :

∠ أ ، ∠ ب محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{حـ هـ}$ ∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب)

، ∵ ق(∠ أ ء حـ) = ق(∠ ب ء هـ) (بالتقابل بالرأس) ∴ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء هـ (المطلوب أولًا)

∴ $\frac{أ ء}{ب ء} = \frac{ء حـ}{ء هـ}$ ∴ ب ء × ء حـ = أ ء × ء هـ لكن ء حـ = ب ء (معطى)

∴ $(ب ء)^2$ = أ ء × ء هـ (المطلوب ثانيًا)

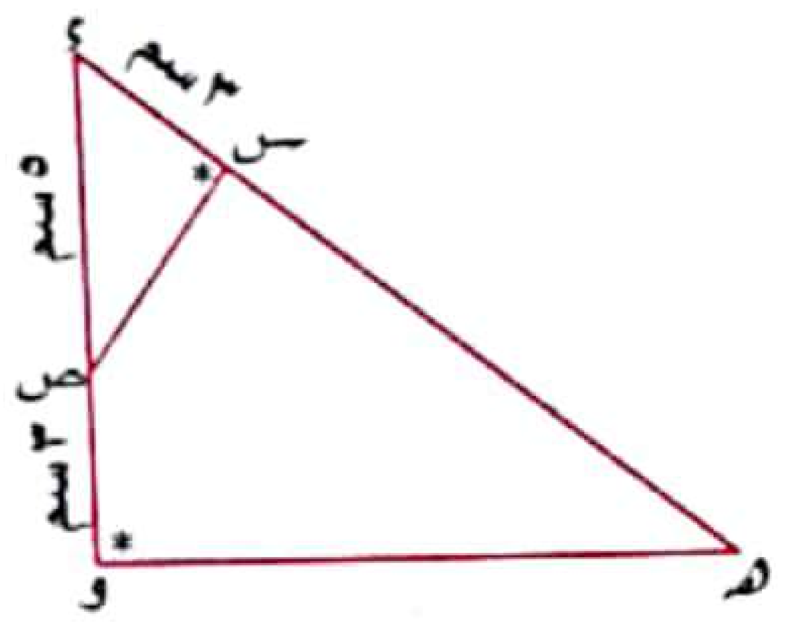
## حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

ء هـ و مثلث ، ق(∠ و) = ق(∠ ء س ص)

، ء س = ص و = ٣ سم ، ء ص = ٥ سم

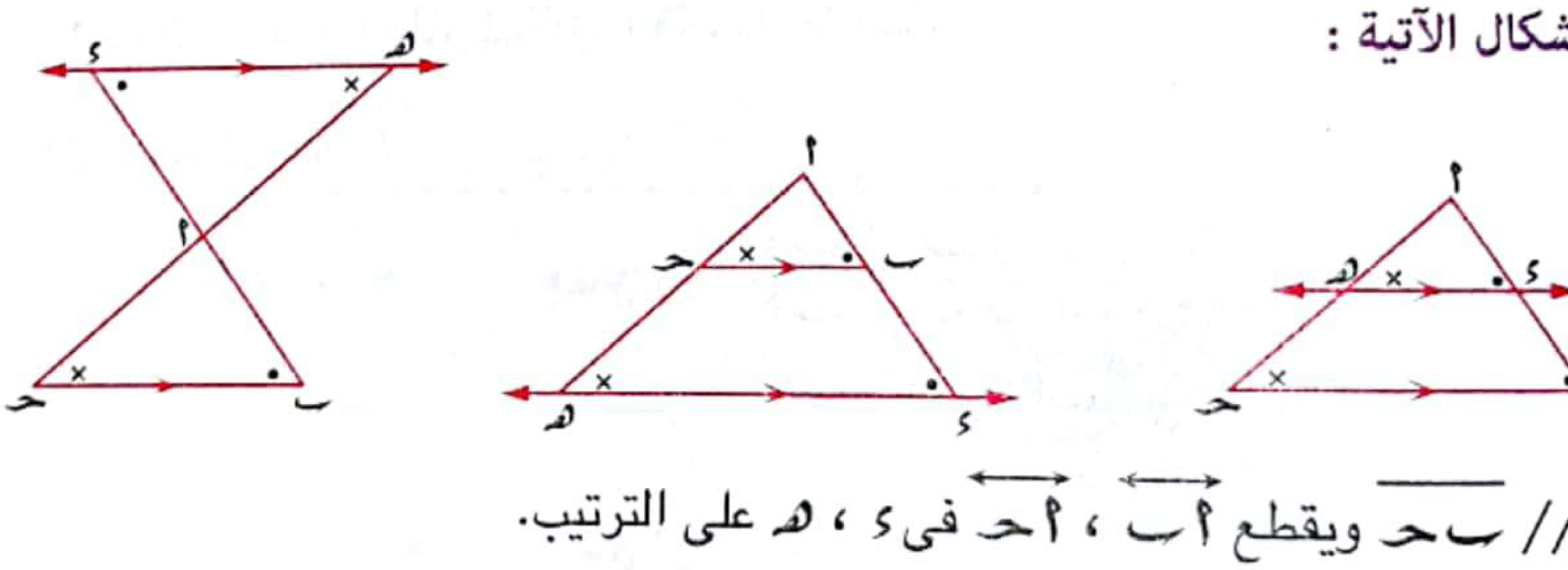
أوجد : طول $\overline{س هـ}$




## نتيجة ١

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

ففي كل من الأشكال الآتية :




إذا كان : $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ في ء ، هـ على الترتيب.

فإن : Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

## مثال ٢

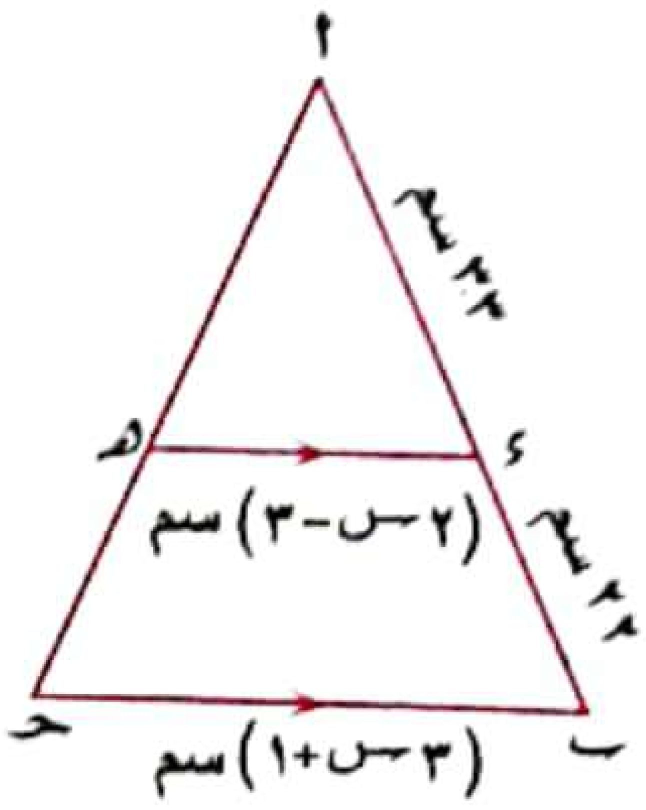
في الشكل المقابل :

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٣٣ سم ، ء ب = ٢٢ سم

، ء هـ = (٢ س − ٣) سم ، ب حـ = (٣ س + ١) سم

١ أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

٢ أوجد : قيمة س



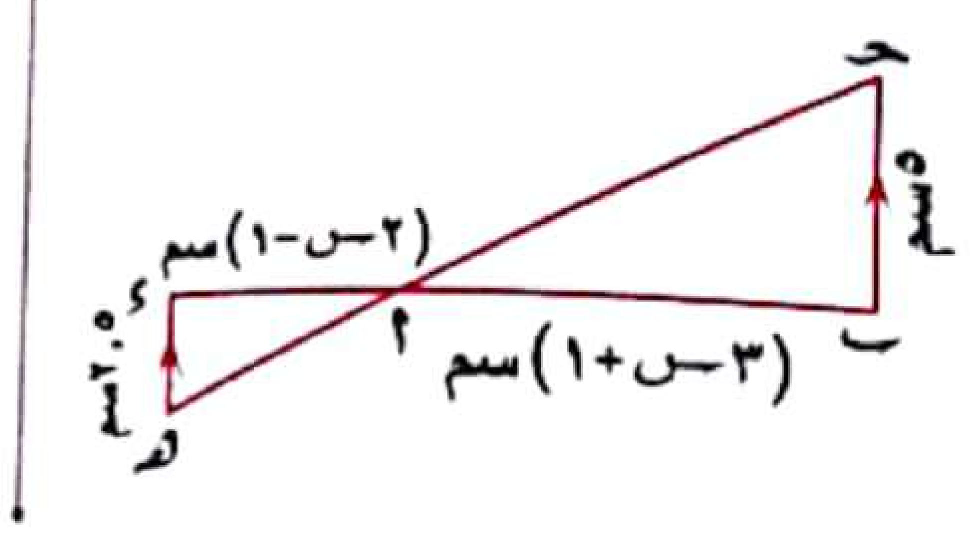
**الحــل**

$\because$ ءهـ $\overline{}$ // بـحـ $\overline{}$ ؛ $\therefore$ $\Delta$ أءهـ $\sim$ $\Delta$ أبـحـ (المطلوب أولًا)

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بـحـ}}$ ؛ $\therefore \frac{٣٣}{٥٥} = \frac{٢س - ٣}{٣س + ١}$

$\therefore \frac{٣}{٥} = \frac{٢س - ٣}{٣س + ١}$ ؛ $\therefore$ ٩س + ٣ = ١٠س − ١٥ ؛ $\therefore$ س = ١٨ (المطلوب ثانيًا)

## حاول بنفسك



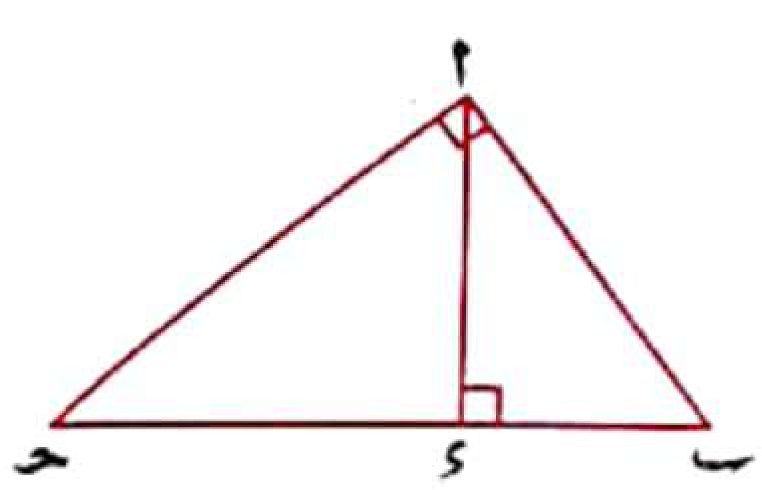

فى الشكل المقابل :

حـهـ $\cap$ بـء = {أ} ، بـحـ // ءهـ ، بـحـ = ٥ سم ، ءهـ = ٢,٥ سم

[١] أثبت أن : $\Delta$ أبـحـ $\sim$ $\Delta$ أءهـ [٢] أوجد قيمة : س

## نتيجة [٢]

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.




ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\Delta$ أبـحـ قائم الزاوية فى أ ، أء $\perp$ بـحـ

فإن : $\Delta$ ءبـأ $\sim$ $\Delta$ ءأحـ $\sim$ $\Delta$ أبـحـ

ويترك للطالب إثبات ذلك باستخدام المسلمة السابقة وملاحظاتها.

### ملاحظات على الشكل السابق

[١] من تشابه $\Delta\Delta$ ءبـأ ، أبـحـ **ينتج أن :** $\frac{\text{ءب}}{\text{أب}} = \frac{\text{بأ}}{\text{بـحـ}}$

$\therefore$ (أب)$^{٢}$ = ءب × بـحـ **أى أن :** أب وسط متناسب بين ءب ، بـحـ

[٢] من تشابه $\Delta\Delta$ ءأحـ ، أبـحـ **ينتج أن :** $\frac{\text{ءحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{بـحـ}}$

$\therefore$ (أحـ)$^{٢}$ = ءحـ × بـحـ **أى أن :** أحـ وسط متناسب بين ءحـ ، بـحـ

[٣] من تشابه $\Delta\Delta$ ءبـأ ، ءأحـ **ينتج أن :** $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{أء}}$

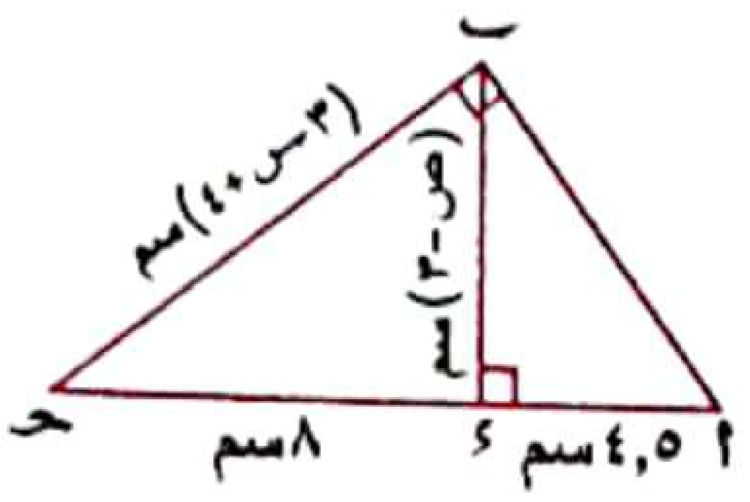
$\therefore$ (ءأ)$^{٢}$ = ءب × ءحـ **أى أن :** أء وسط متناسب بين ءب ، ءحـ

[٤] من تشابه $\Delta\Delta$ ءبـأ ، أبـحـ **ينتج أن :** $\frac{\text{أب}}{\text{حـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$

$\therefore$ أء × حـب = أب × أحـ

**وتعد النتائج التى تم الحصول عليها من النتيجة السابقة برهانًا لنظرية إقليدس التى تم دراستها فى المرحلة الإعدادية.**

## مثال ٣




فى الشكل المقابل :

أب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ب ء ⊥ أ حـ

فإذا كان : أ ء = ٤,٥ سم ، ء حـ = ٨ سم

فأوجد قيمتى : س ، ص

## الحـــل

∵ Δ أب حـ قائم الزاوية فى ب ، ب ء ⊥ أ حـ

∴ Δ ء ب حـ ~ Δ ب أ حـ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ (ب حـ)$^2$ = أ حـ × ء حـ

∴ (٣س + ٤)$^2$ = ٨ × ١٢,٥ = ١٠٠ ∴ ٣س + ٤ = ١٠

∴ س = ٢

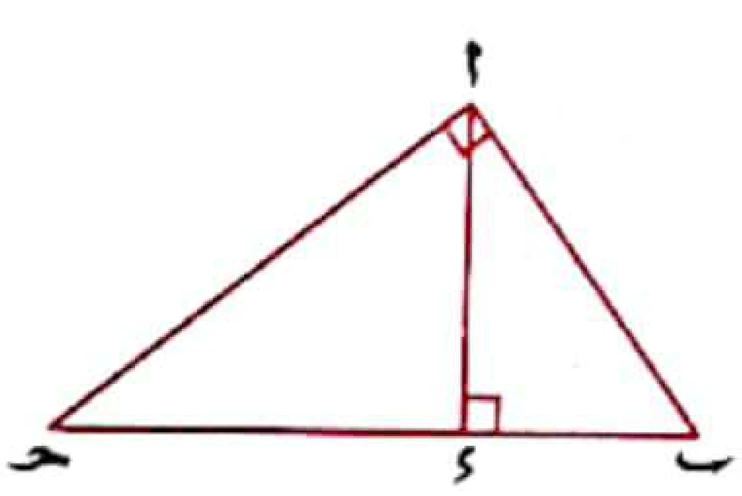
∵ Δ أب حـ قائم الزاوية فى ب ، ب ء ⊥ أ حـ

∴ Δ أ ب ء ~ Δ ب حـ ء ∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ (ء ب)$^2$ = ء حـ × ء أ ∴ (ص − ٣)$^2$ = ٨ × ٤,٥ = ٣٦

∴ ص − ٣ = ٦ ∴ ص = ٩ (وهو المطلوب)

## حاول بنفسك




فى الشكل المقابل :

Δ أب حـ قائم الزاوية فى أ ، أ ء ⊥ ب حـ

أكمل :

١ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٢ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٣ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{.........}}$

٤ $\frac{\text{.........}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$

٥ $\frac{\text{.........}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{.........}}$

٦ (ء أ)$^2$ = .............. × ..............

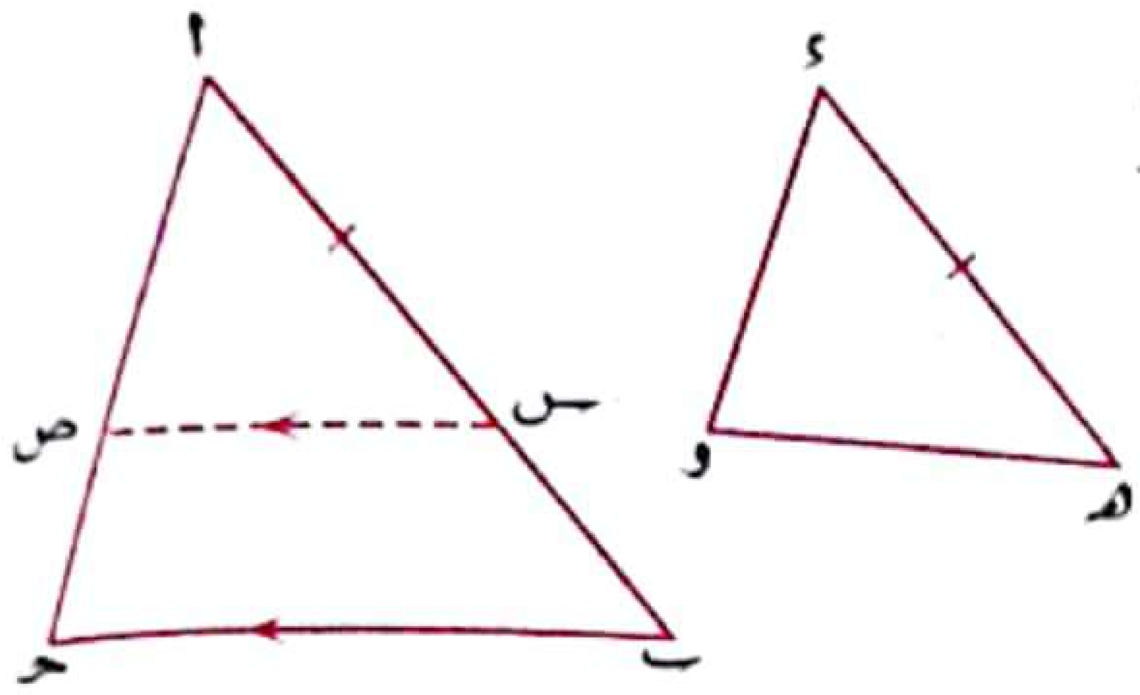
٧ (أ حـ)$^2$ = .............. × ..............

٨ أ ء = $\frac{\text{......... × أ حـ}}{\text{حـ ب}}$

## الحالة الثانية

### نظرية ١

**إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.**




- **المعطيات** المثلثان ا ب حـ ، ء هـ و فيهما : $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{حـ ا}}{\text{و ء}}$
- **المطلوب** إثبات أن : Δ ا ب حـ ~ Δ ء هـ و
- **العمل** عيِّن س ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا س = ء هـ
، ارسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ وتقطع $\overline{\text{ا حـ}}$ فى ص
- **البرهان** ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ ا ب حـ ~ Δ ا س ص (نتيجة «١»)

ويكون $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{حـ ا}}{\text{ص ا}}$ ، ∵ ا س = ء هـ (عملاً)

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{حـ ا}}{\text{ص ا}}$ (١)

∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{حـ ا}}{\text{و ء}}$ (معطيات) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : س ص = هـ و ، ص ا = و ء

ويكون Δ ا س ص ≡ Δ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

∴ Δ ء هـ و ~ Δ ا س ص

، ∵ Δ ا ب حـ ~ Δ ا س ص (برهانًا)

∴ Δ ا ب حـ ~ Δ ء هـ و (وهو المطلوب)

### ملاحظة

لكتابة المثلثين المتشابهين بترتيب رءوسهما المتناظرة من التناسب بين أطوال أضلاعهما نتبع الآتى :

بفرض أن رءوس أحد المثلثين هى ا ، ب ، حـ وأن رءوس المثلث الآخر هى ء ، هـ ، و

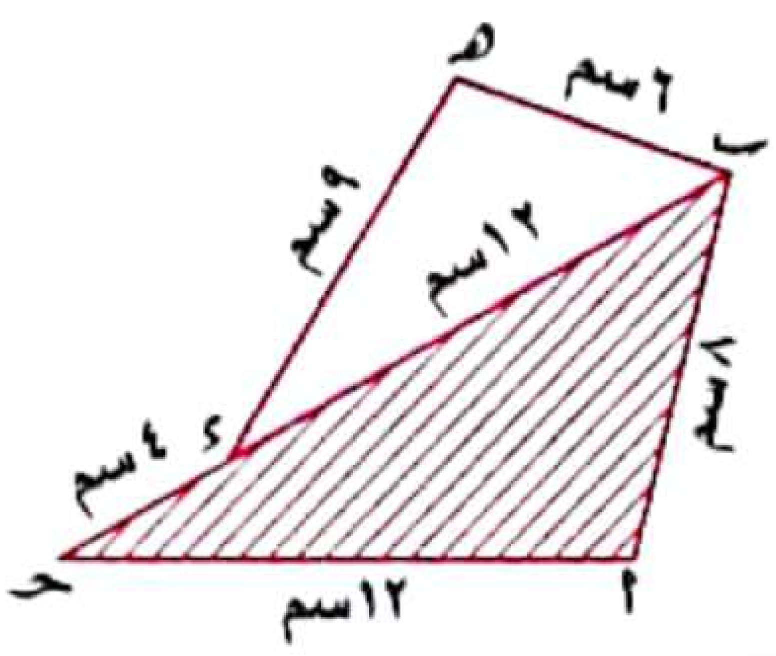
وأن لدينا التناسب الآتى : $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}}$

فنبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ بالترتيب فنجدها ب ، حـ ، ا

ونبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ بالترتيب فنجدها هـ ، ء ، و

فيكون : Δ ب حـ ا ~ Δ هـ ء و أ، Δ ا ب حـ ~ Δ و هـ ء أ، ... إلخ.

## مثال ٤




من الشكل المقابل أثبت أن :

[١] المثلثين المظللين متشابهان.

[٢] $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب هـ

### الحل

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ب هـ}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}} = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د هـ}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د هـ}}$

∴ Δ جـ أ ب ~ Δ د هـ ب (المطلوب أولاً)

**وينتج من التشابه أن :** ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ هـ ب د)

∴ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب هـ

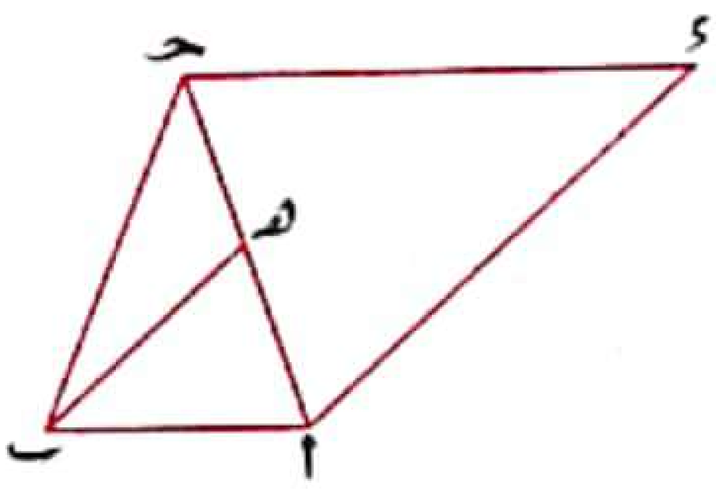
(المطلوب ثانيًا)

## مثال ٥

أ ب جـ د شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث : $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ جـ}}$

أثبت أن : [١] $\overline{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ [٢] $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

### الحل




∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب هـ}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ب أ}}$ (٢)

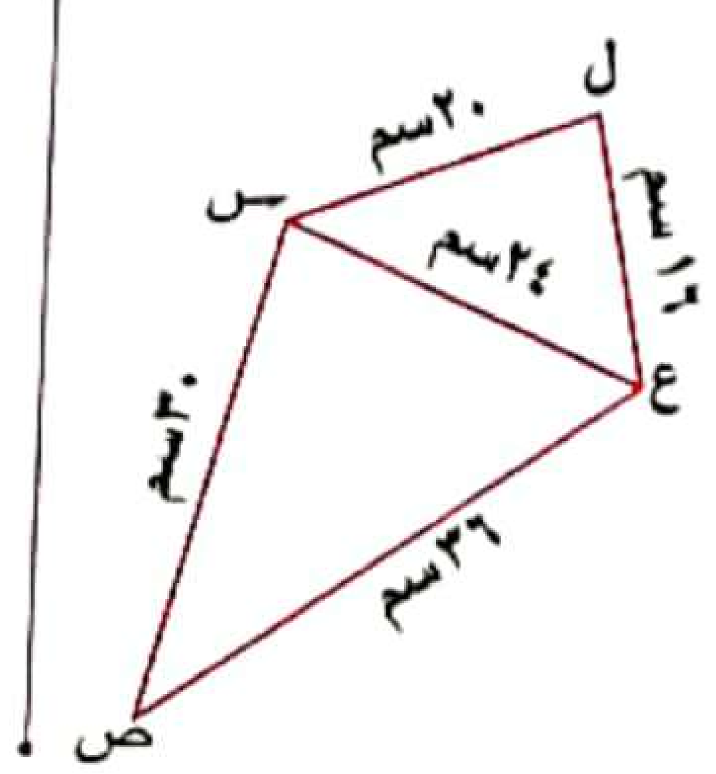
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ب أ}}$ ∴ Δ د جـ أ ~ Δ ب أ هـ

**وينتج من التشابه أن :** ق (∠ أ جـ د) = ق (∠ هـ أ ب) وهما متبادلتان

∴ $\overline{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ (المطلوب أولاً)

، ق (∠ جـ أ د) = ق (∠ أ هـ ب) وهما متبادلتان. ∴ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

## حاول بنفسك




فى الشكل المقابل :

س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ص = ٣٠ سم ، ص ع = ٣٦ سم ، ع ل = ١٦ سم

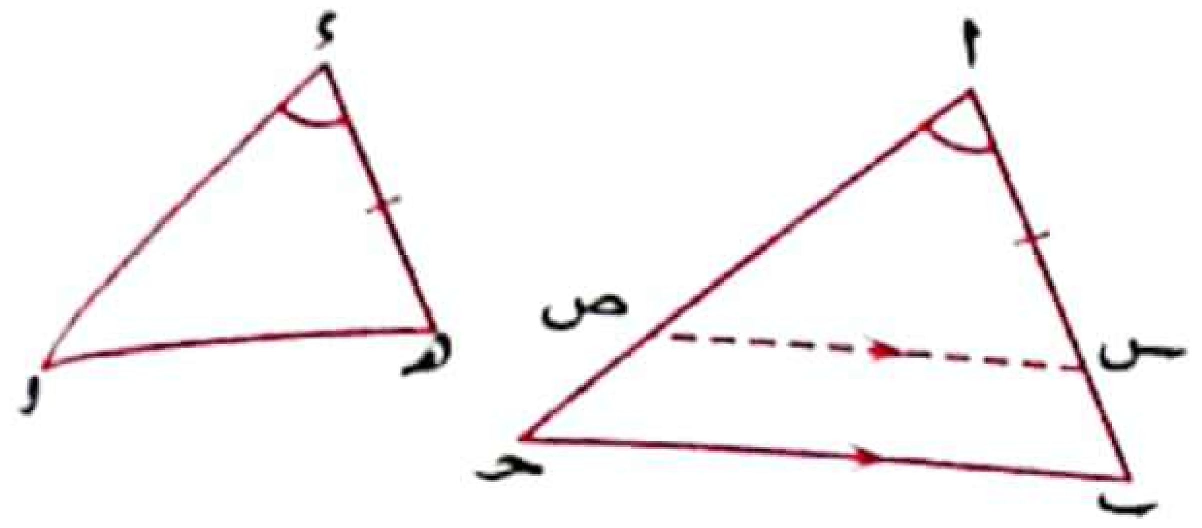
، ل س = ٢٠ سم ، س ع = ٢٤ سم

أثبت أن : Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

## الحالة الثالثة

### نظرية ٢

**إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين.**




**المعطيات** ∠ أ ≡ ∠ د ، $\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دو}}$

**المطلوب** إثبات أن : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

**العمل** خذ س ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ س = د هـ

، وارسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أجـ}}$ فى ص

**البرهان** ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ س ص (نتيجة) (١)

ويكون $\boxed{\frac{\text{أب}}{\text{أس}}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أص}}$

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دو}}$ (معطى) ، أ س = د هـ (عملاً)

∴ $\boxed{\frac{\text{أب}}{\text{أس}}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دو}}$ ويكون أ ص = د و

∴ Δ أ س ص ≡ Δ د هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون Δ أ س ص ~ Δ د هـ و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و (وهو المطلوب)

### مثال ٦

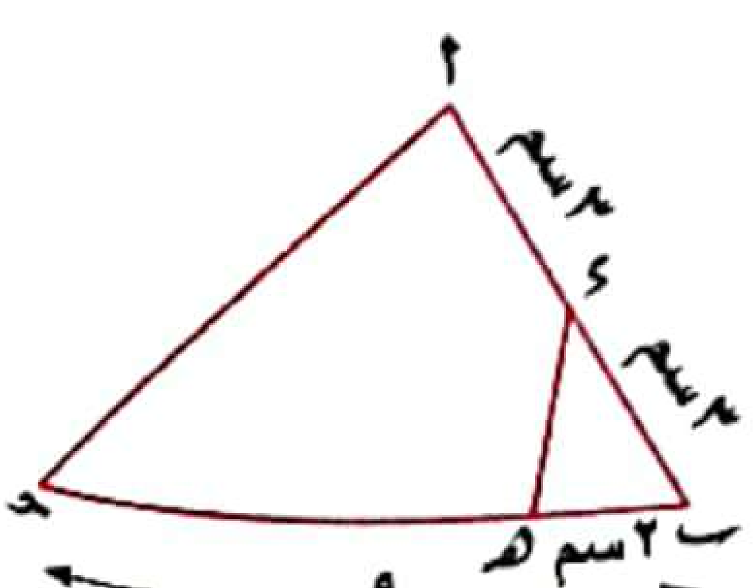
أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٢ سم

أثبت أن :

١ ΔΔ د ب هـ ، جـ ب أ متشابهان.

٢ الشكل أ د هـ جـ رباعى دائرى.

### الحل




∵ ΔΔ د ب هـ ، جـ ب أ فيهما :

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$

، ∵ ∠ ب مشتركة.

∴ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن :

ق (د ب هـ ء) = ق (د أ) ، ∵ د ب هـ ء خارجة عن الشكل الرباعى أ ء هـ حـ

∴ الشكل أ ء هـ حـ رباعى دائرى. (المطلوب ثانيًا)

## مثال ٧

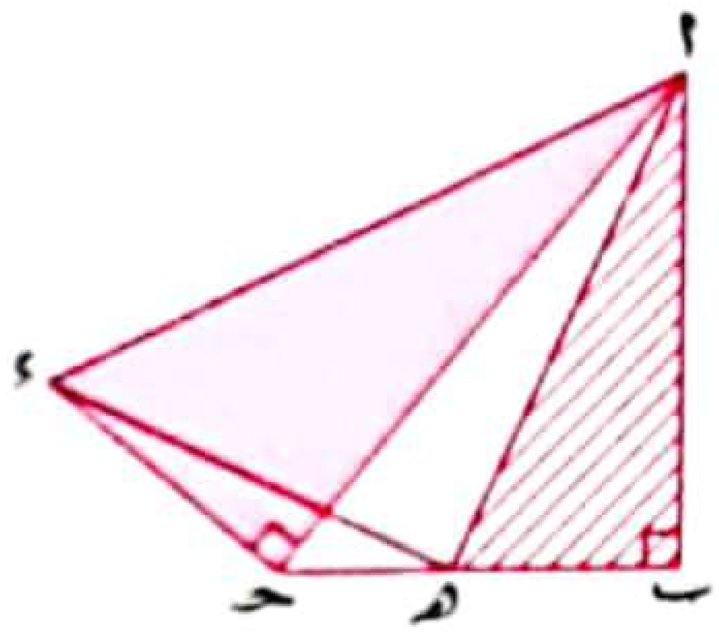
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (د ب) = ق (د أ حـ ء) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث $\frac{حـ ء}{حـ أ} = \frac{ب هـ}{ب أ}$

أثبت أن :

[١] Δ Δ أ ب هـ ، أ حـ ء متشابهان.

[٢] ق (د أ هـ ء) = ٩٠°

### الحل




∵ $\frac{حـ ء}{حـ أ} = \frac{ب هـ}{ب أ}$

∴ $\frac{حـ ء}{ب هـ} = \frac{حـ أ}{ب أ}$

، ∵ ق (د ب) = ق (د أ حـ ء)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ حـ ء (المطلوب أولاً)

وينتج أن :

ق (د أ هـ ب) = ق (د أ ء حـ)

، ∵ د أ هـ ب خارجة عن الشكل الرباعى أ هـ حـ ء

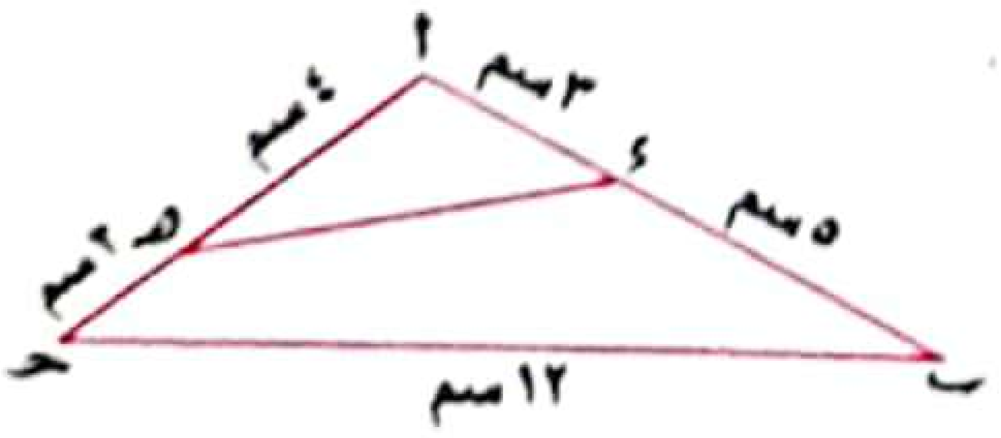
∴ الشكل أ هـ حـ ء رباعى دائرى.

∴ ق (د أ هـ ء) = ق (د أ حـ ء) (مرسومتان على $\overline{أ ء}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ ق (د أ هـ ء) = ٩٠° (المطلوب ثانيًا)

## حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :




إذا كان : أ ء = ٣ سم ، ء ب = ٥ سم

، أ هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٢ سم ، ب حـ = ١٢ سم

[١] أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

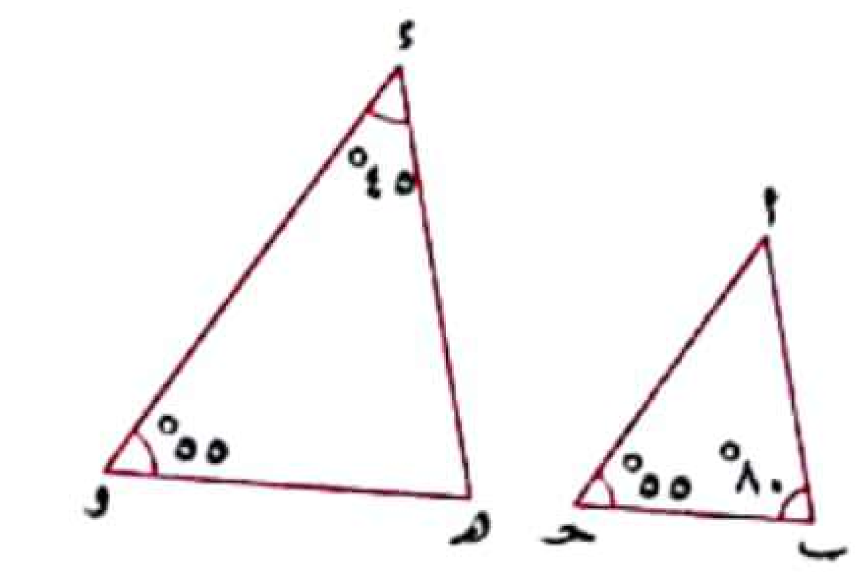
[٢] أوجد : طول $\overline{ء هـ}$

# على تشابه المثلثات

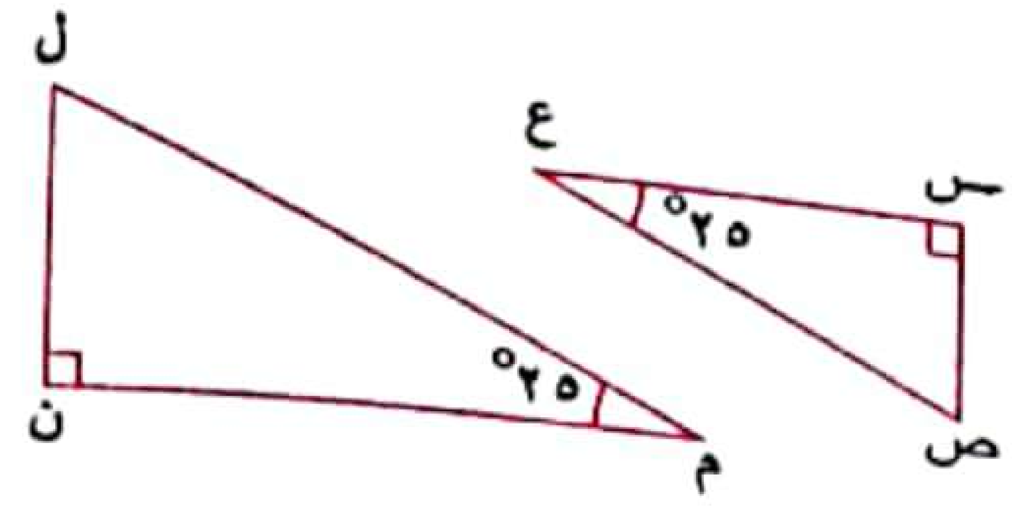
من أسئلة الكتاب المدرسي

**١** اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين ، وفى حالة التشابه اذكر سبب التشابه :

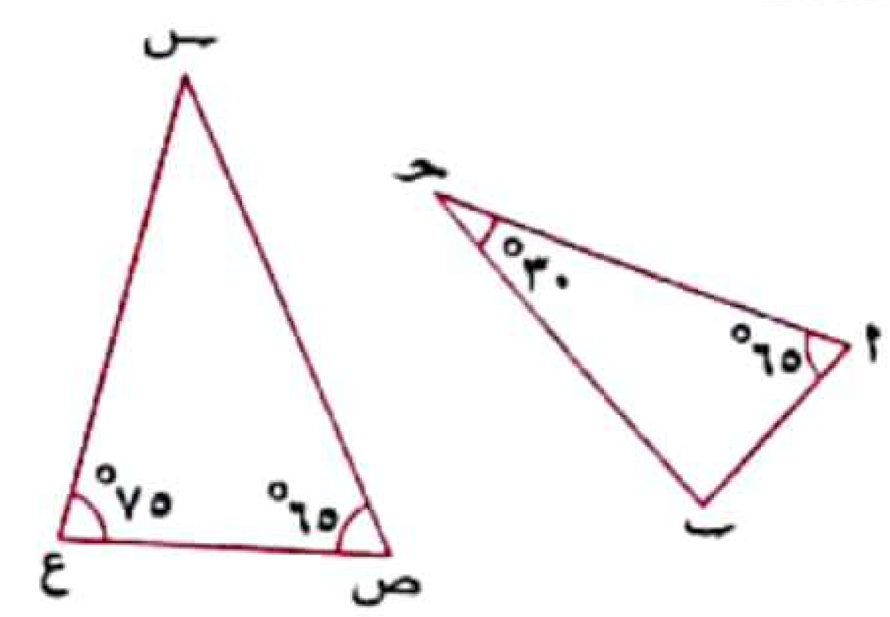
(١)



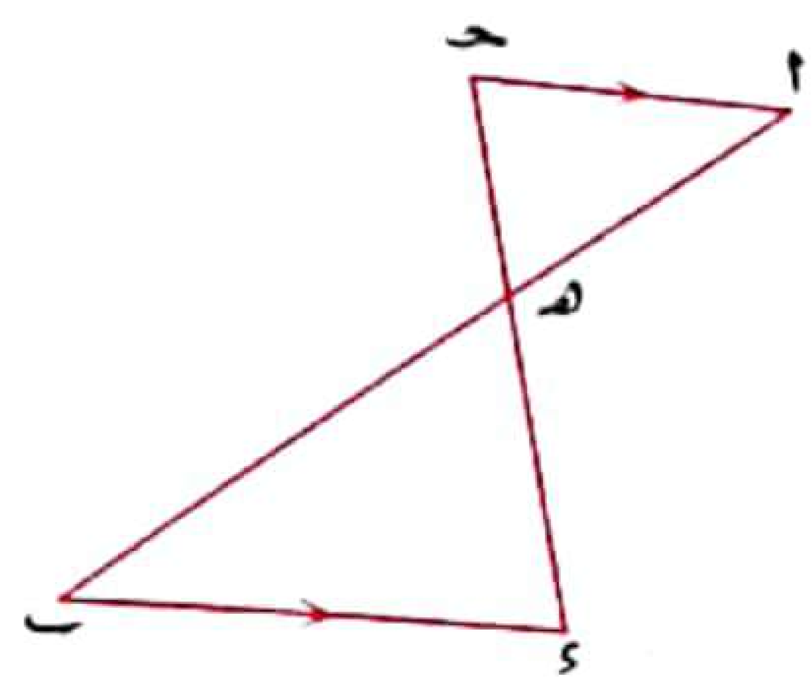

(٢)



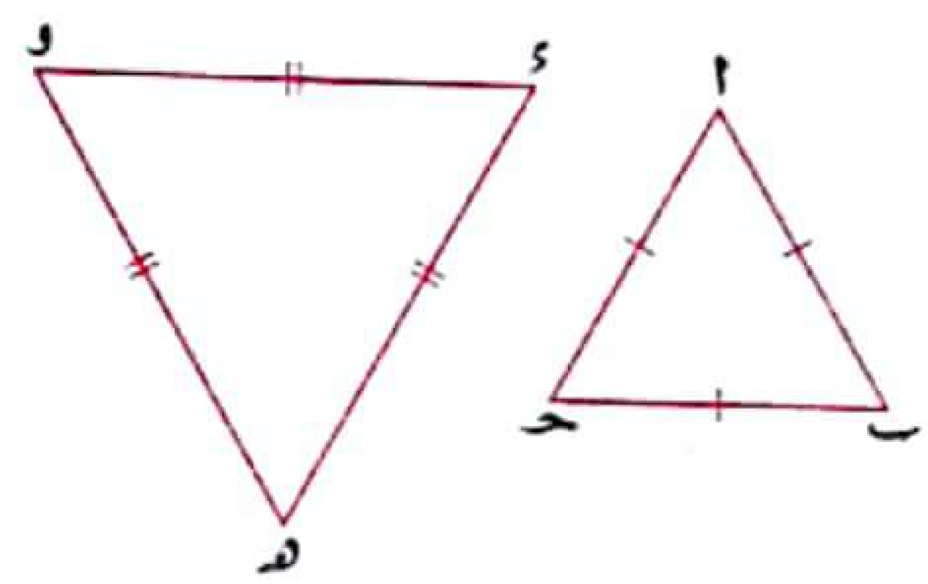

(٣)



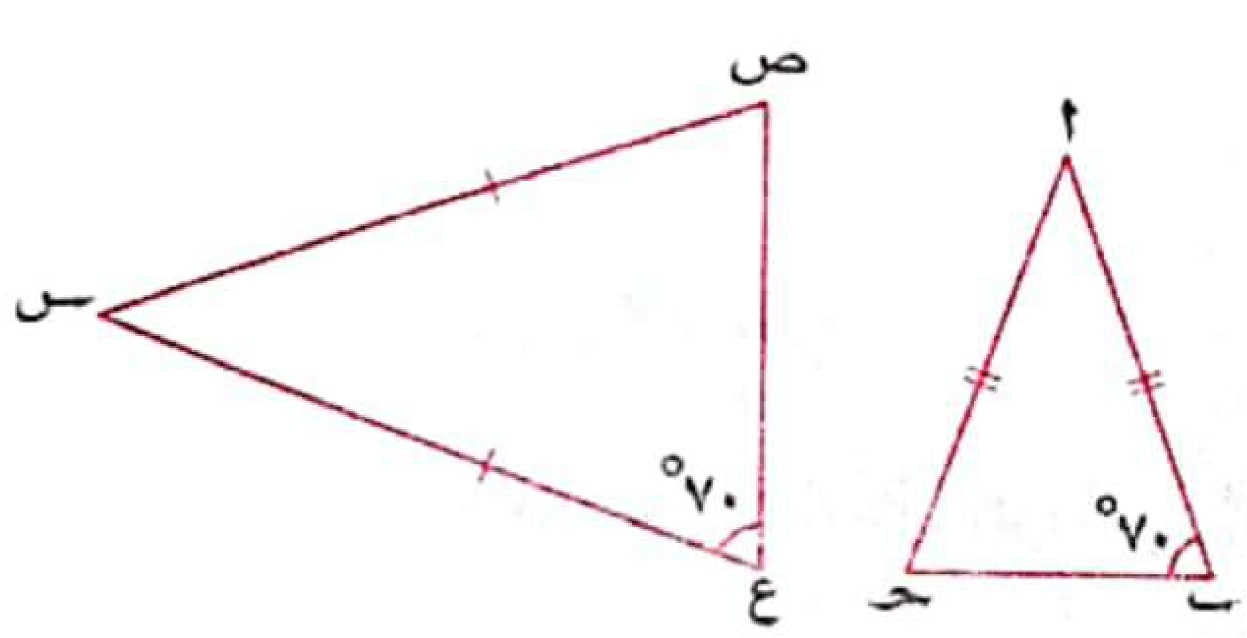

(٤)



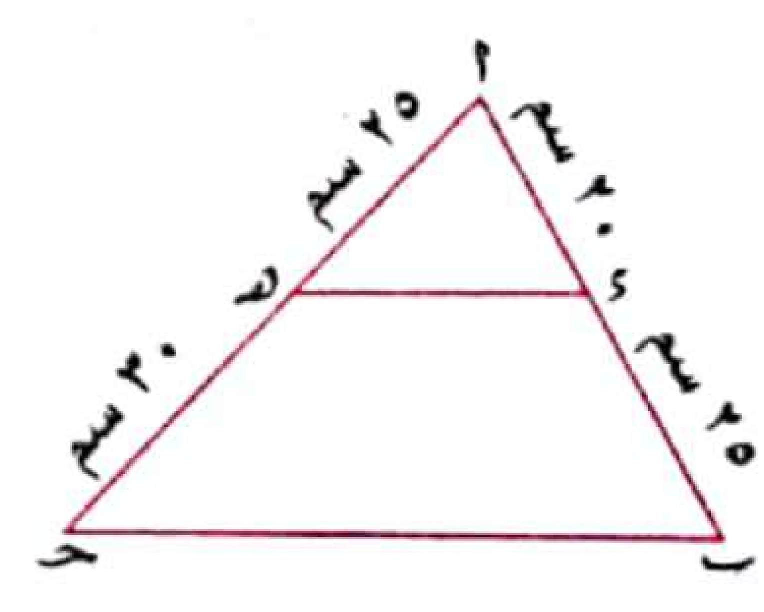

(٥)



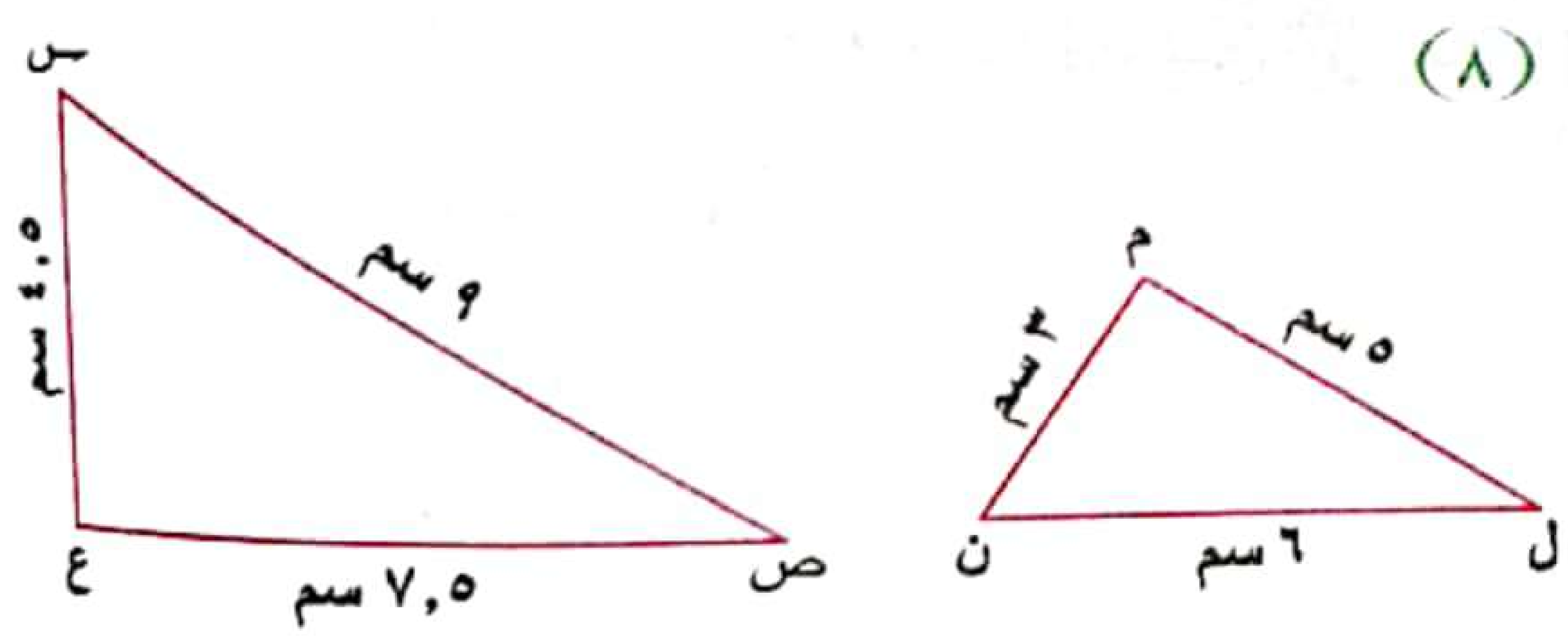

(٦)



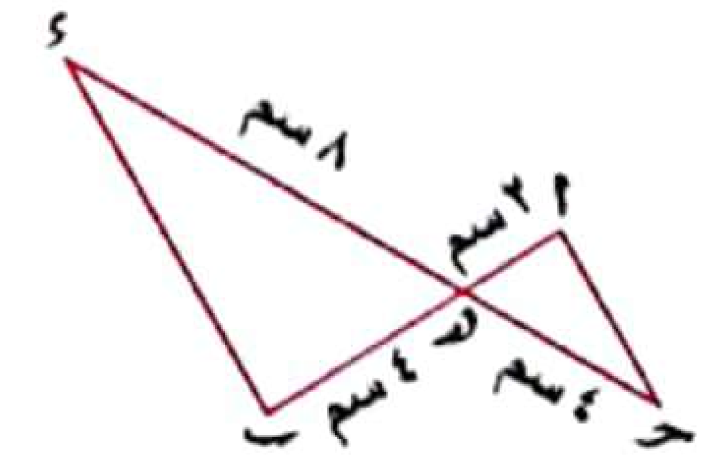

(٧)



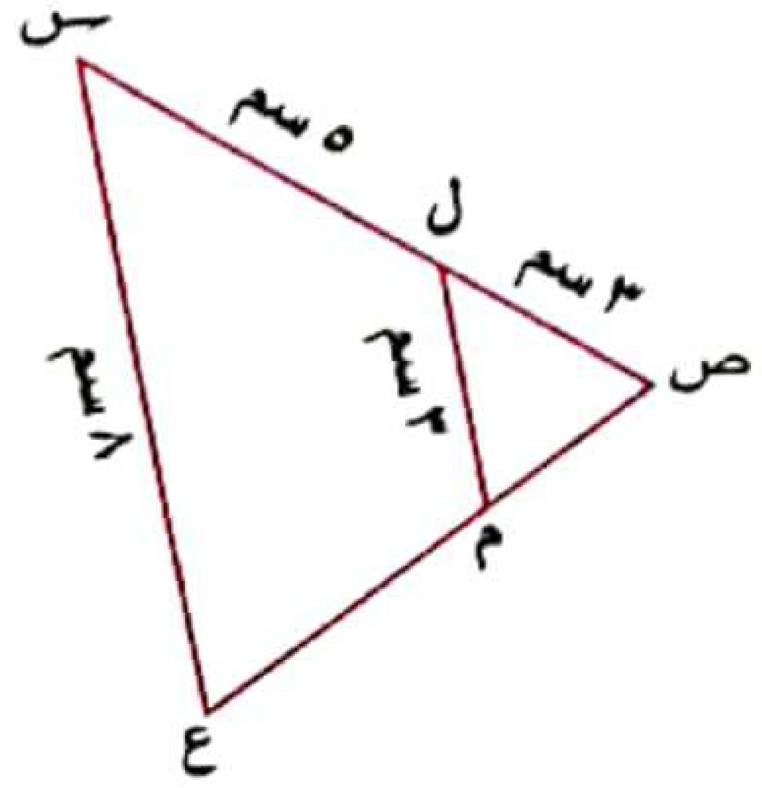

(٨)




(٩)

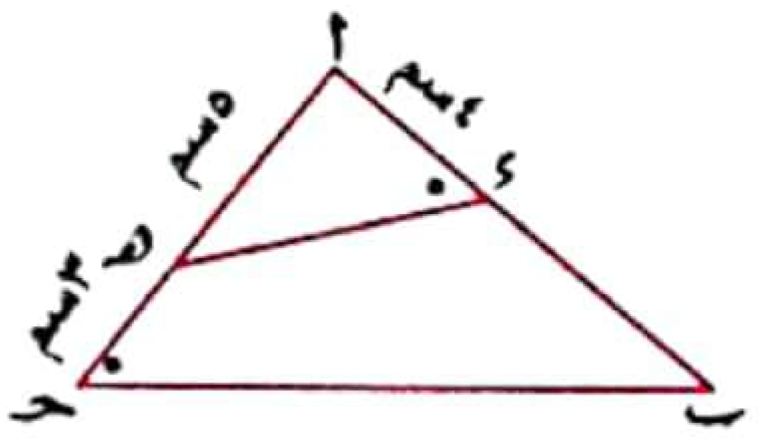



(١٠)



## ٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

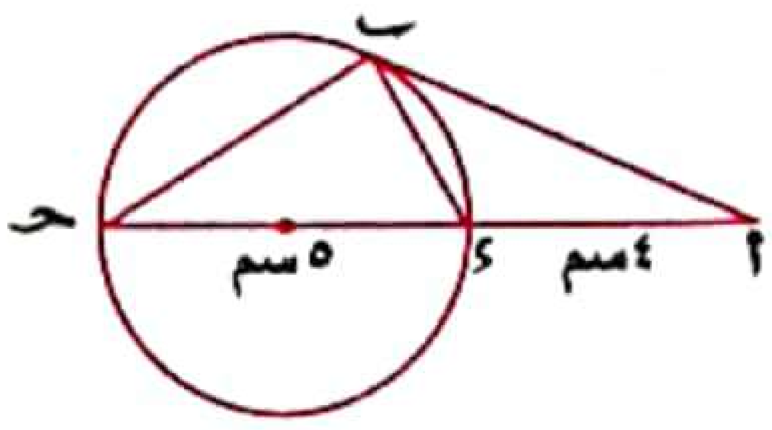
(١) فى الشكل المقابل :




ب ء = ............ سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٧

(٢) فى الشكل المقابل :

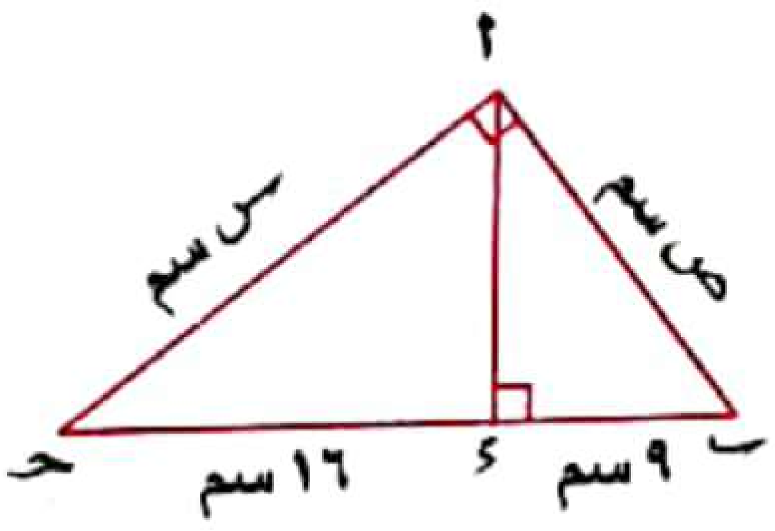



إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة

فإن : أ ب = ............ سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٣) فى الشكل المقابل :

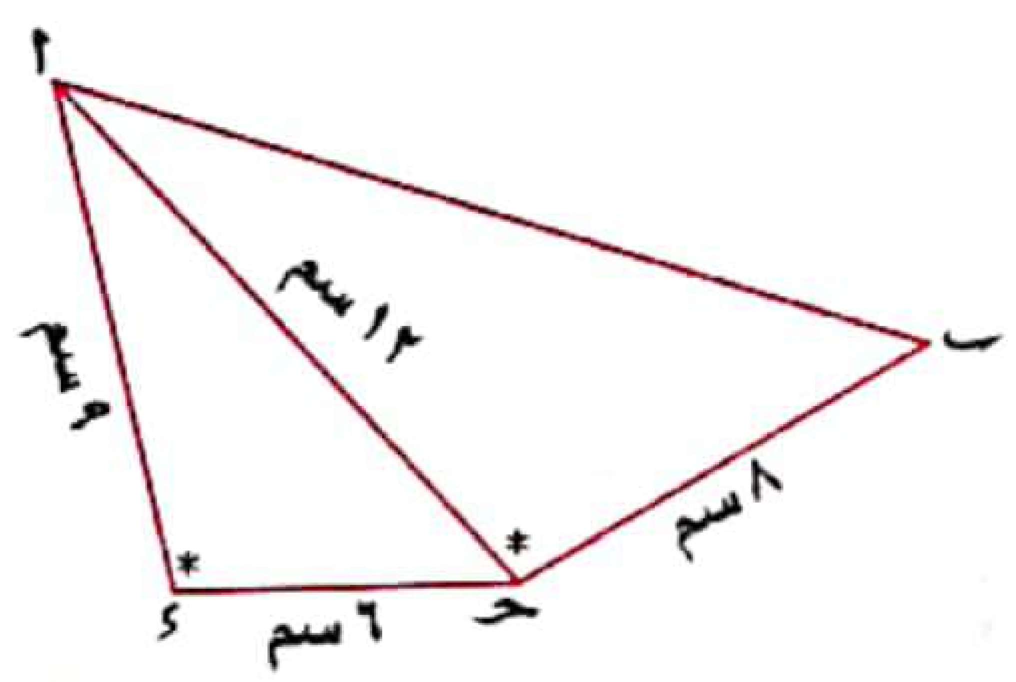



$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ............

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٢

(٤) فى الشكل المقابل :

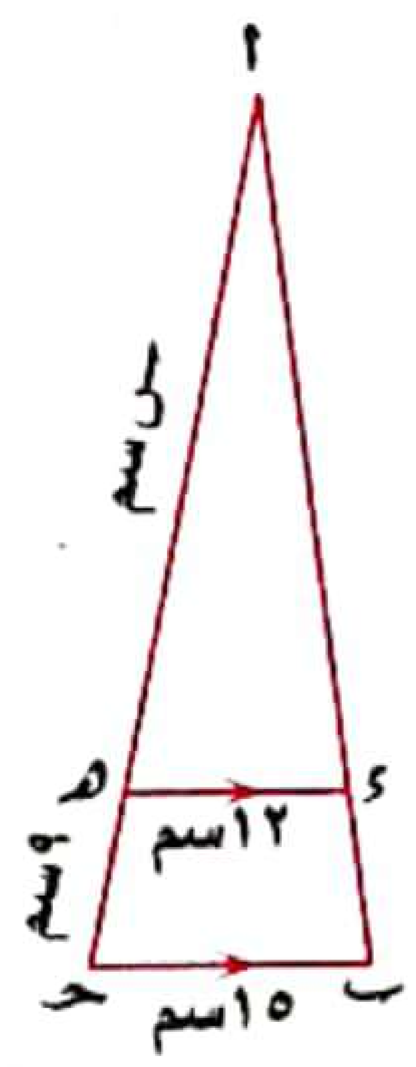



إذا كان : ق (∠ أ ء جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

فإن : أ ب = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٥) فى الشكل المقابل :

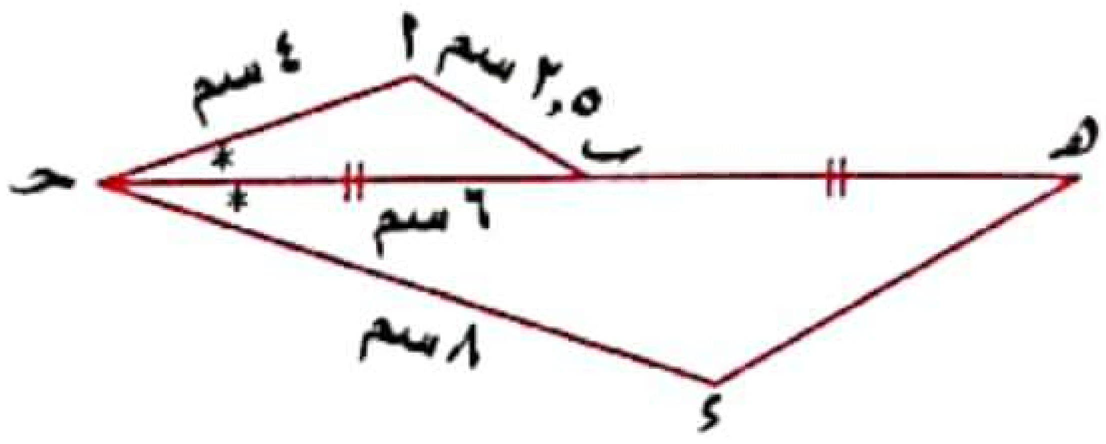



س = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٦) فى الشكل المقابل :

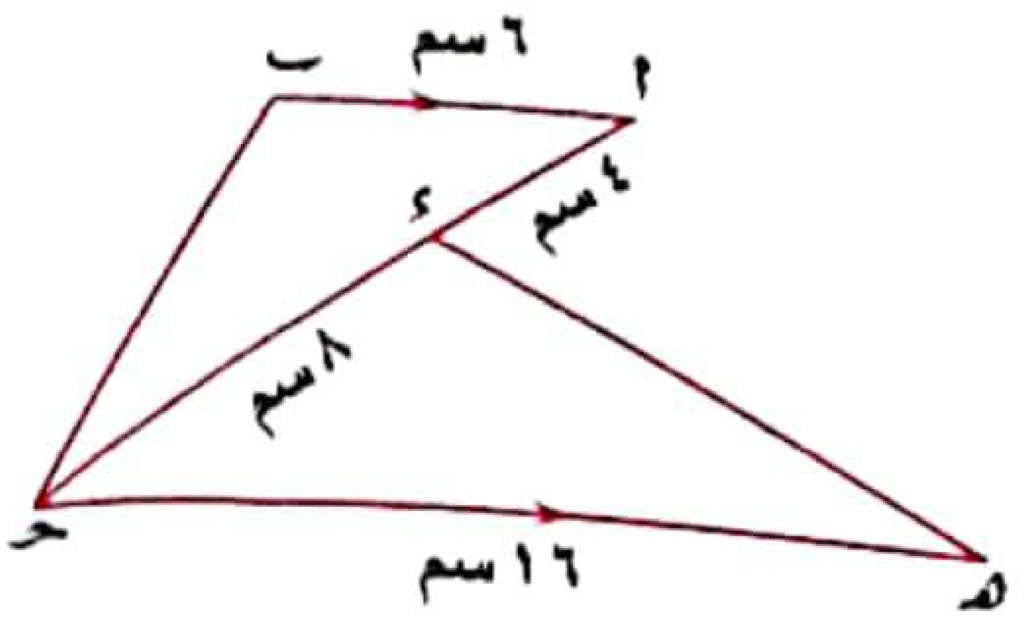



إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{جـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ............ سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٧) في الشكل المقابل :



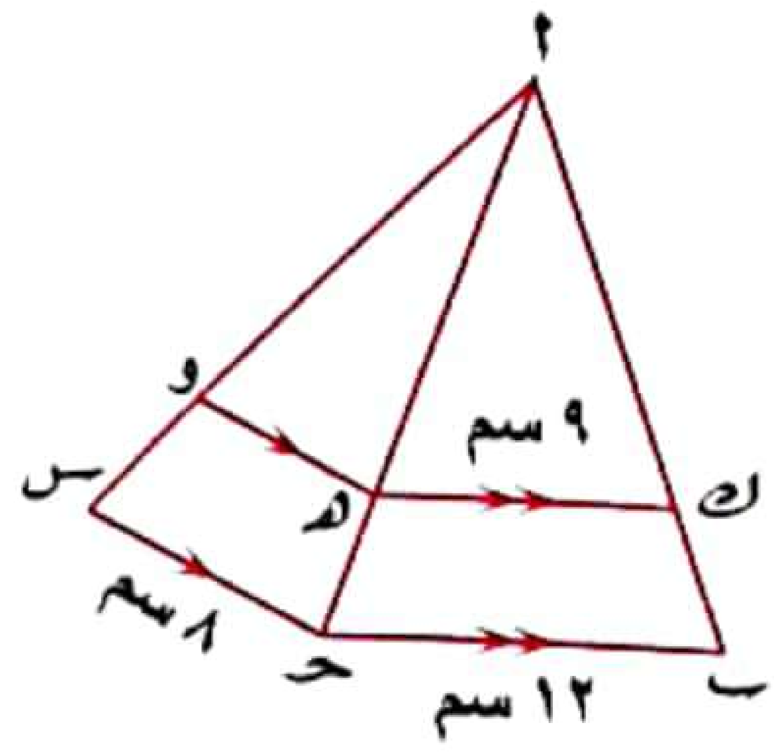

إذا كانت : $\overline{\text{أب}} \mathbin{//} \overline{\text{هـ حـ}}$

فإن : $\frac{\text{هـ ء}}{\text{ب حـ}}$ = ...............

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٨) في الشكل المقابل :

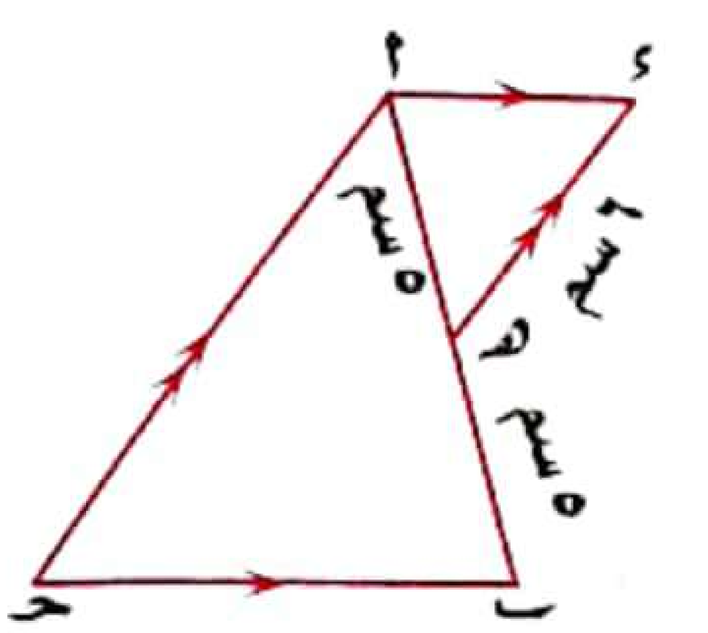



هـ و = ............... سم

(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٩) في الشكل المقابل :

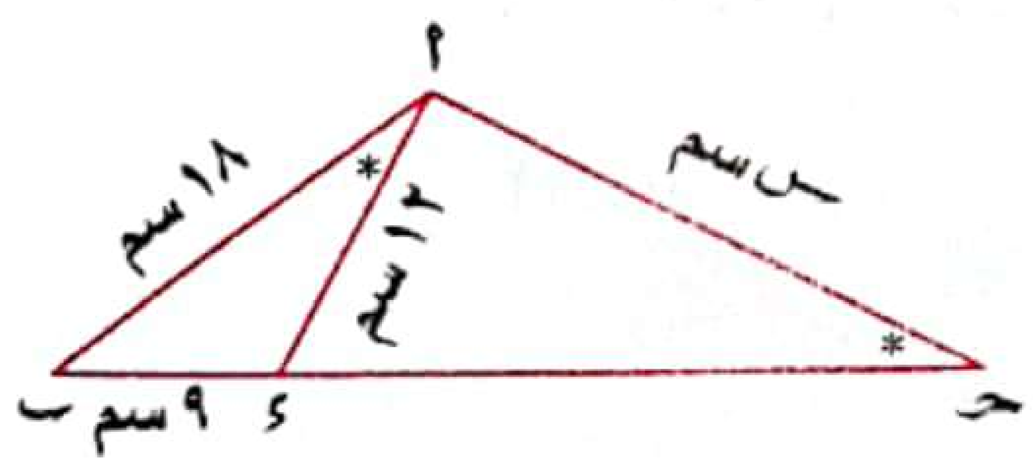



أ حـ = ............... سم

(أ) ٦ (ب) ٩

(جـ) ١٢ (د) ١٥

(١٠) في الشكل المقابل :



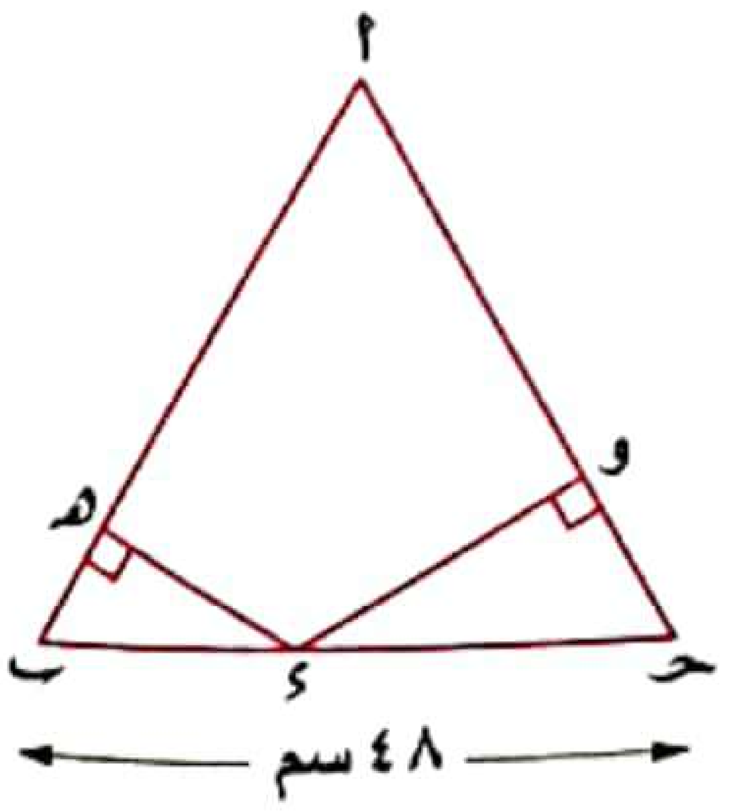

إذا كان : ق (∠ء أ ب) = ق (∠حـ)

فإن : س = ...............

(أ) ٦ (ب) ١٨

(جـ) ٢١ (د) ٢٤

(١١) في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث متساوي الساقين

حيث أ ب = أ حـ ، ب حـ = ٤٨ سم

، $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}} = \frac{٥}{٧}$

فإن : ء حـ = ............... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٠

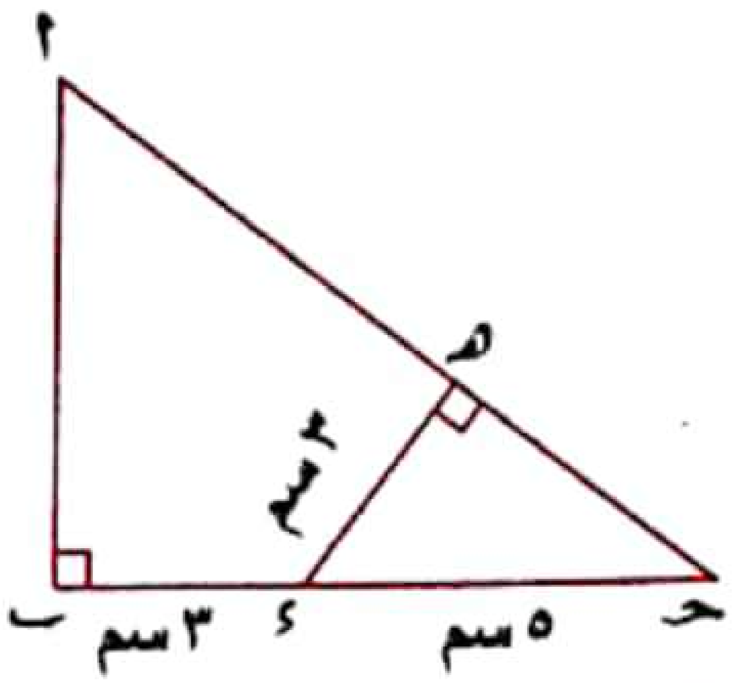
(جـ) ٢٤ (د) ٢٨

(١٢) في الشكل المقابل :

أهـ = ............ سم

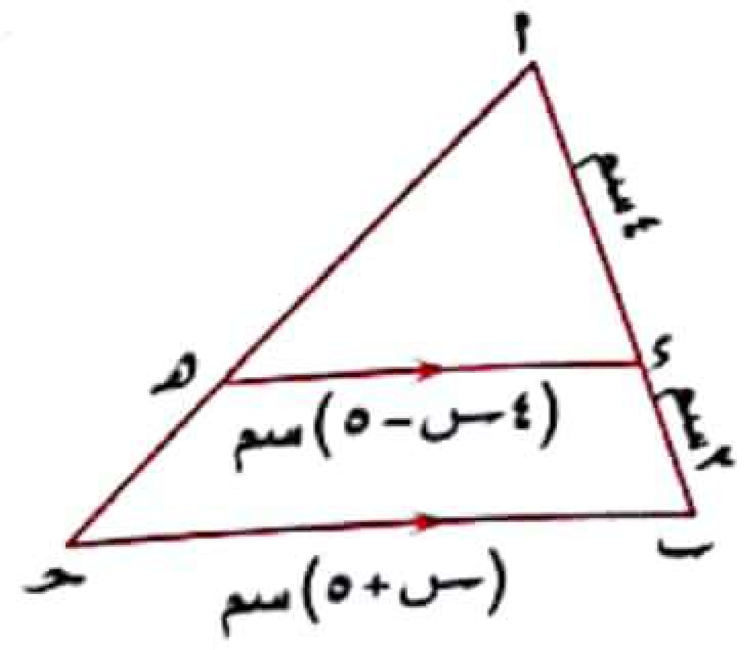
(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٨

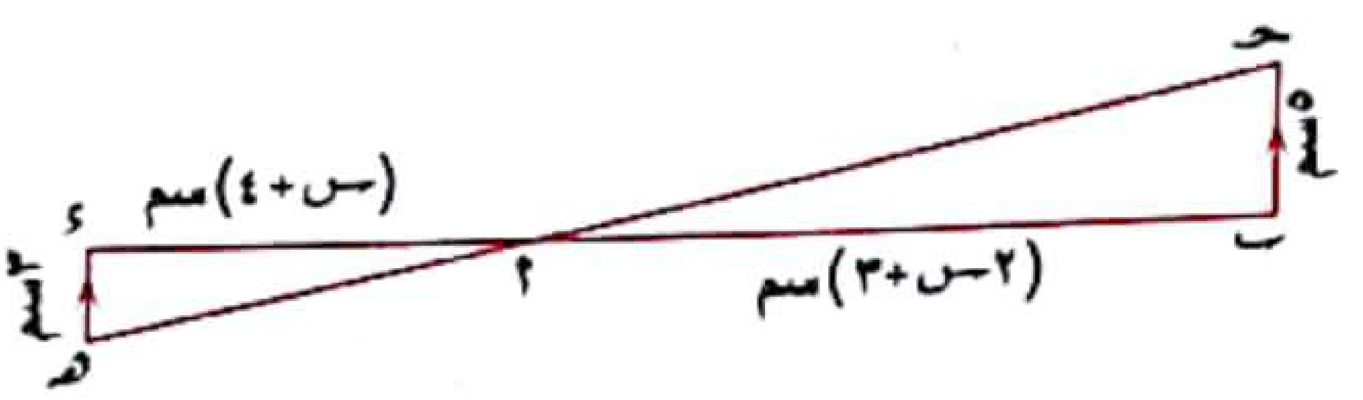



**٣** في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسرًا إجابتك :

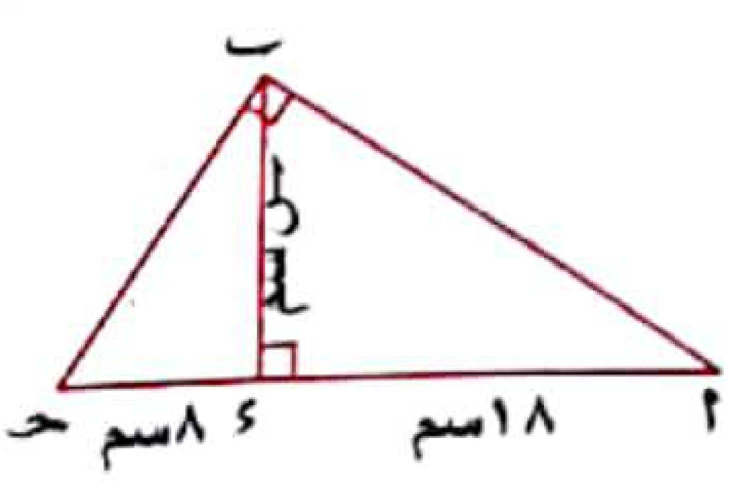
(١)



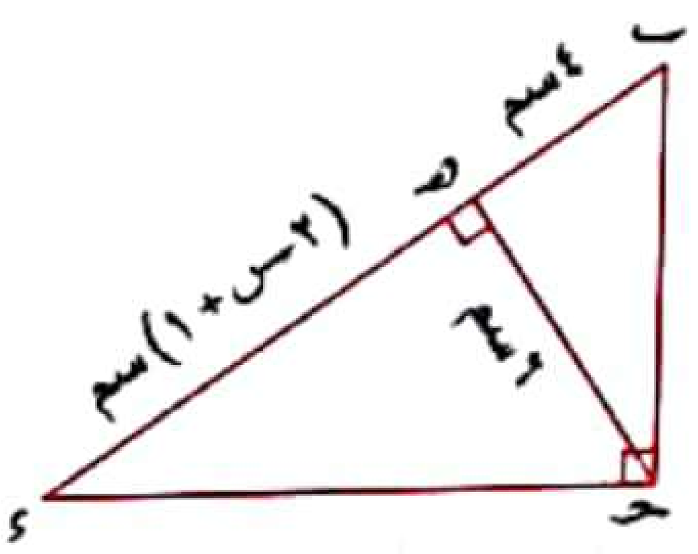

(٢)



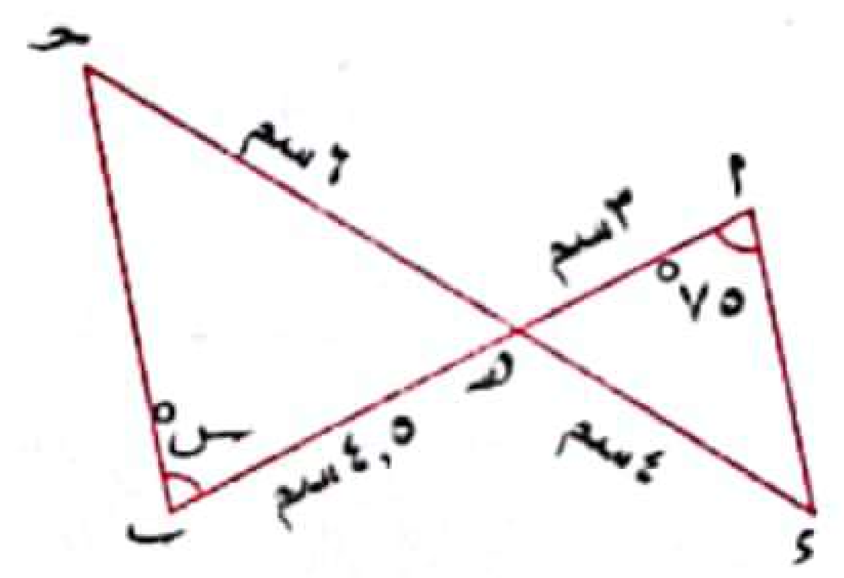

(٣)



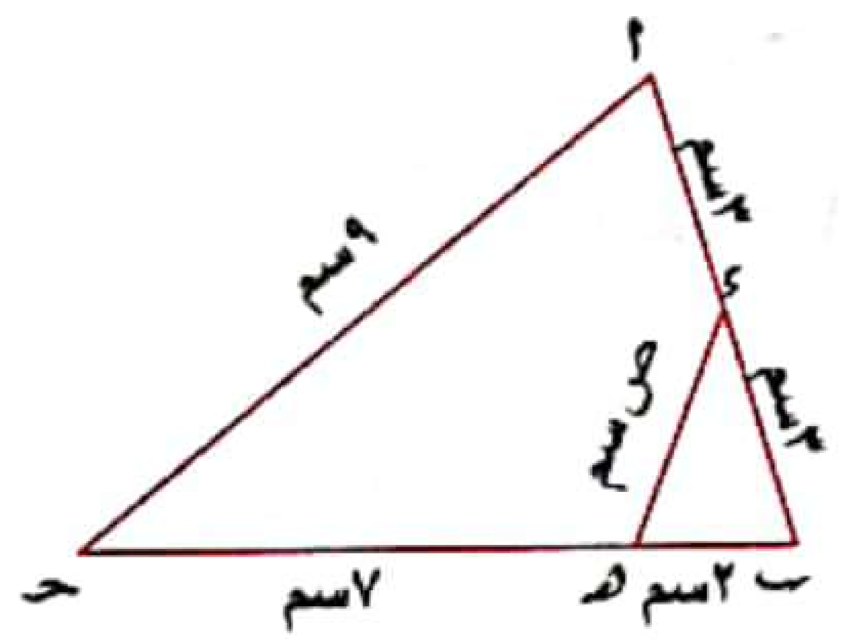

(٤)



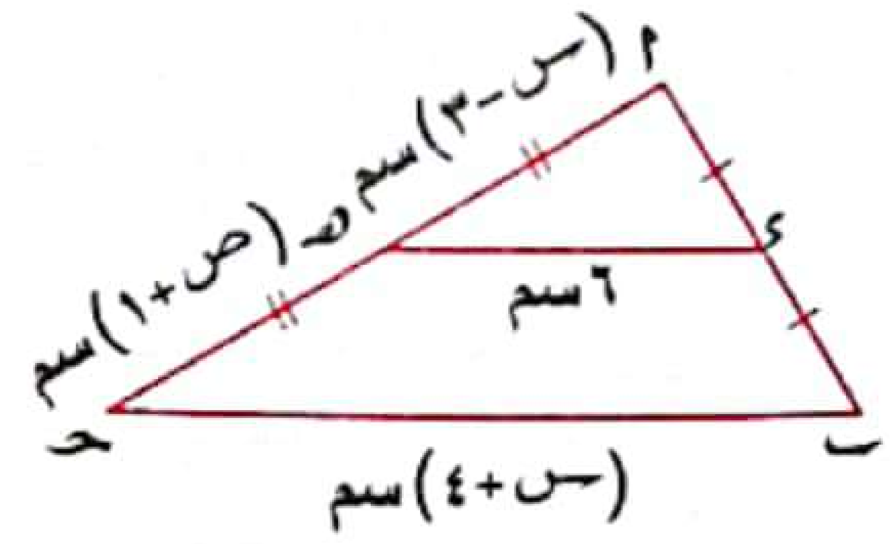

(٥)




(٦)




(٧)



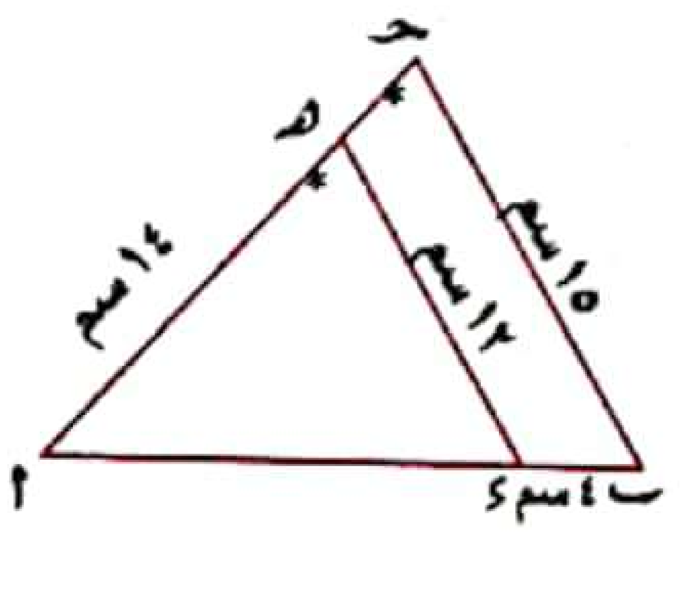

**٤** في الشكل المقابل :

ق(∠أهـ ء) = ق(∠حـ)

، أهـ = ١٤ سم ، هـ ء = ١٢ سم

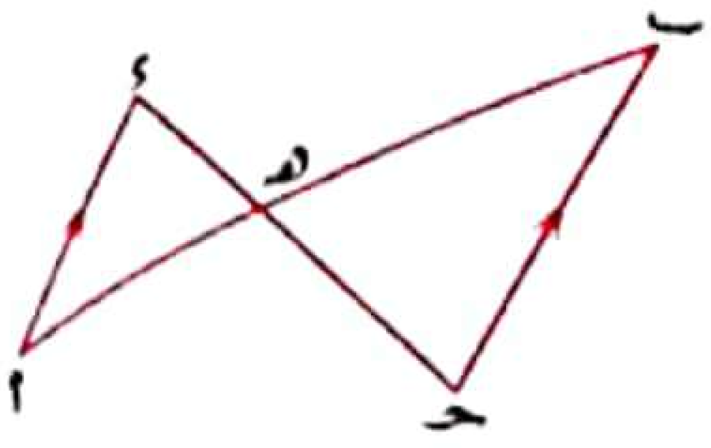
، حـ ب = ١٥ سم ، ء ب = ٤ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{أب}$




«١٧,٥ سم ، ١٦ سم ، ٢٠ سم»

**٥** في الشكل المقابل :

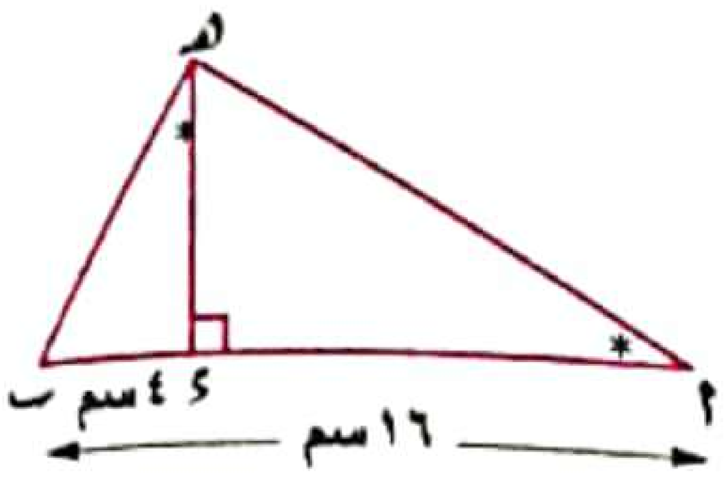



$\overline{أء} // \overline{جـ ب}$

أثبت أن : (١) Δ أ هـ ء ~ Δ ب هـ جـ

(٢) أ هـ × هـ جـ = ء هـ × هـ ب

**٦** في الشكل المقابل :




أ ب هـ مثلث ، $\overline{هـ ء} \perp \overline{أ ب}$ ، ق (∠ أ) = ق (∠ ب هـ ء)

فإذا كان : أ ب = ١٦ سم ، ب ء = ٤ سم

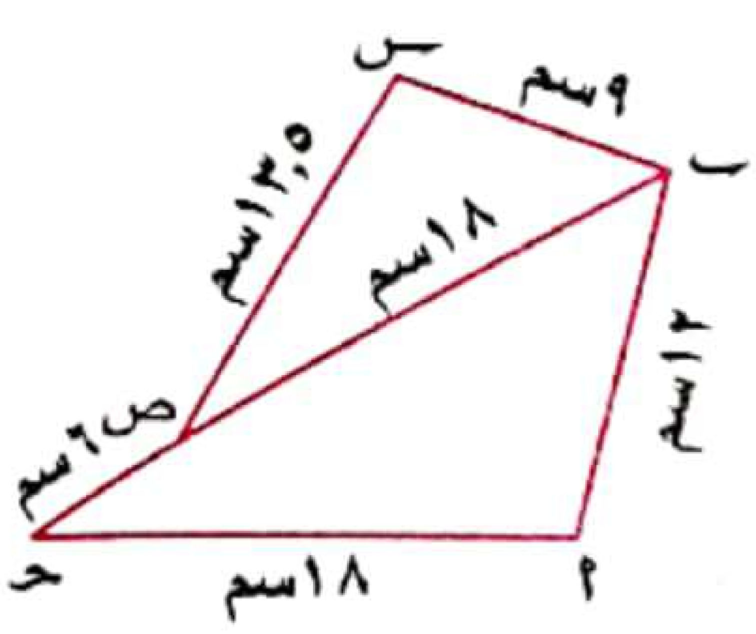
فاحسب : طول $\overline{ب هـ}$

«٨ سم»

**٧** أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ هي على الترتيب ٣ ، ٤,٥ ، ٦ من السنتيمترات ، ء هـ و مثلث آخر أطوال أضلاعه $\overline{ء هـ}$ ، $\overline{هـ و}$ ، $\overline{و ء}$ هي على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٨ من السنتيمترات

أثبت أن هذين المثلثين متشابهان واكتبهما بترتيب رءوسهما المتناظرة.

**٨** في الشكل المقابل :

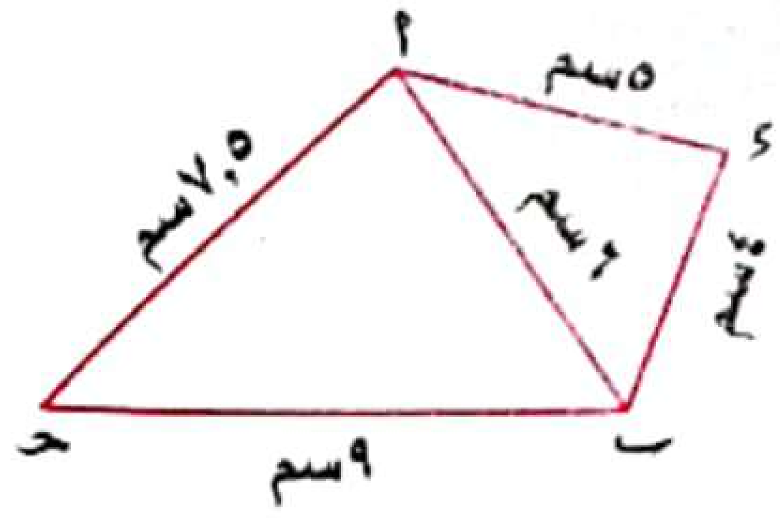



ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة.

أثبت أن : (١) Δ س ب ص ~ Δ أ ب جـ

(٢) $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ أ ب س

**٩** في الشكل المقابل :



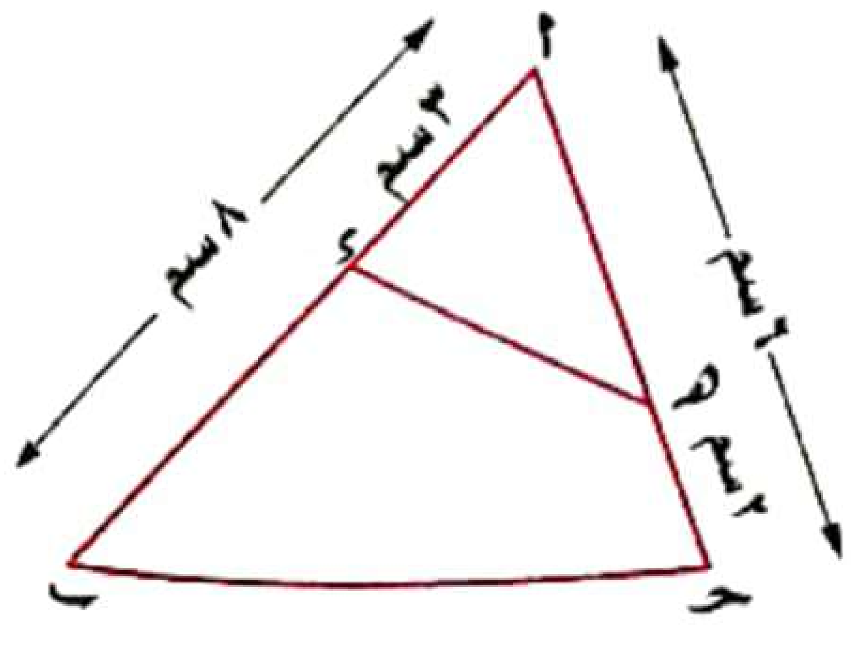

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم

، أ جـ = ٧,٥ سم ، ء نقطة خارجة عن المثلث أ ب جـ

حيث : ء ب = ٤ سم ، ء أ = ٥ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب أ (٢) $\overleftarrow{ب أ}$ ينصف ∠ ء ب جـ

**١٠** في الشكل المقابل :



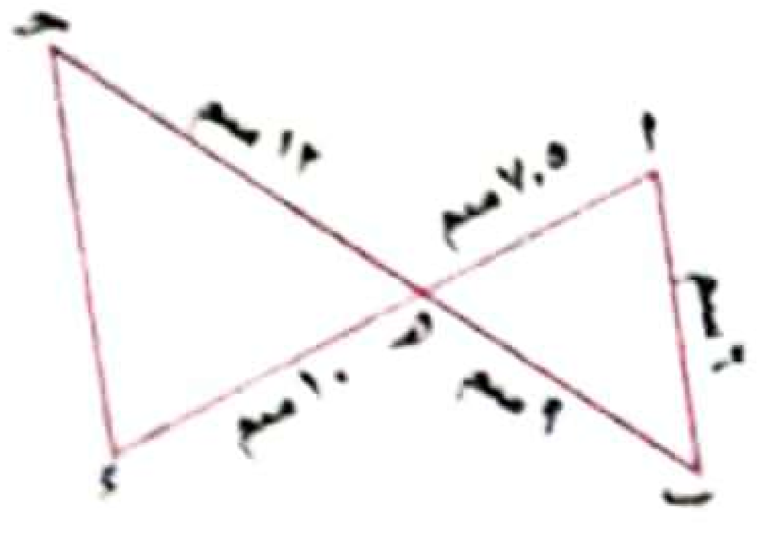

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم

، ء ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أ جـ}$

حيث هـ جـ = ٢ سم

أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

**١١** في الشكل المقابل :




$\overline{أد}$ ∩ $\overline{بجـ}$ = {هـ} ، أهـ = ٧,٥ سم ، هـ جـ = ١٢ سم

، ب هـ = ٩ سم ، هـ د = ١٠ سم ، أب = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ب هـ ~ Δ د جـ هـ ثم احسب : طول $\overline{جـ د}$

«٨ سم»

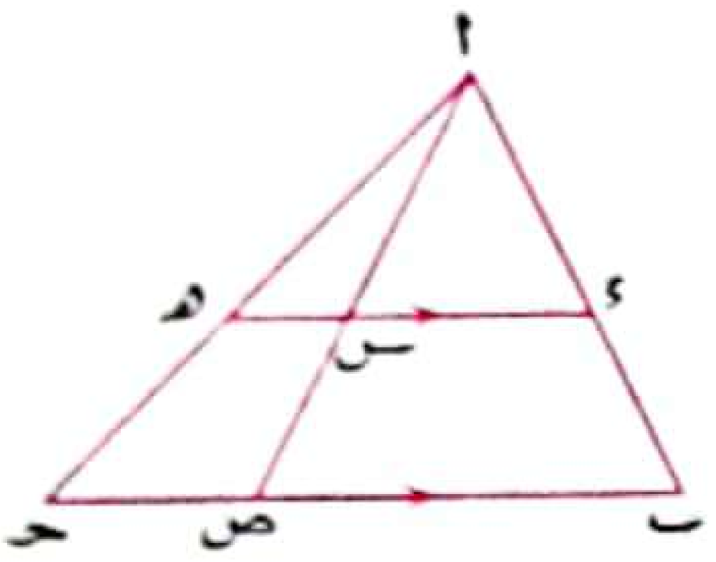
---

**١٢** في المثلث أ ب جـ : أجـ > أب ، م ∈ $\overline{أجـ}$ حيث : ق(∠ أ ب م) = ق(∠ جـ)

أثبت أن : $(أب)^2$ = أم × أجـ

---

**١٣** في الشكل المقابل :




أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$

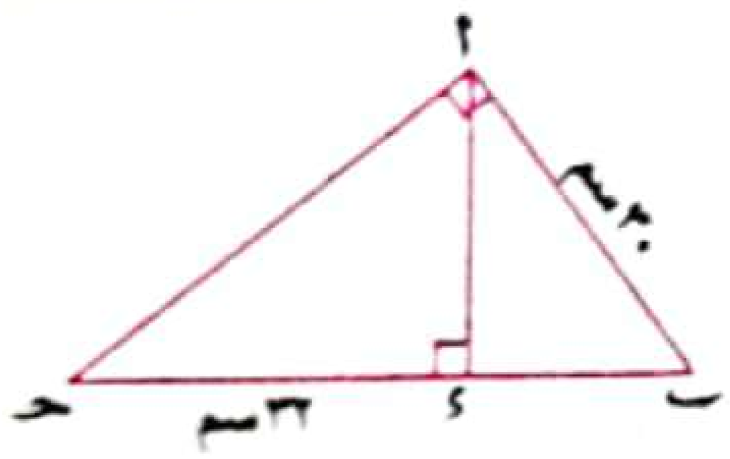
ويقطع $\overline{أجـ}$ في هـ ، رسم $\overleftrightarrow{أس}$ يقطع $\overline{دهـ}$ ، $\overline{بجـ}$

في س ، ص على الترتيب.

(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة. (٢) أثبت أن : $\frac{د س}{ب ص} = \frac{س هـ}{ص جـ} = \frac{د هـ}{ب جـ}$

---

**١٤** في الشكل المقابل :




أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

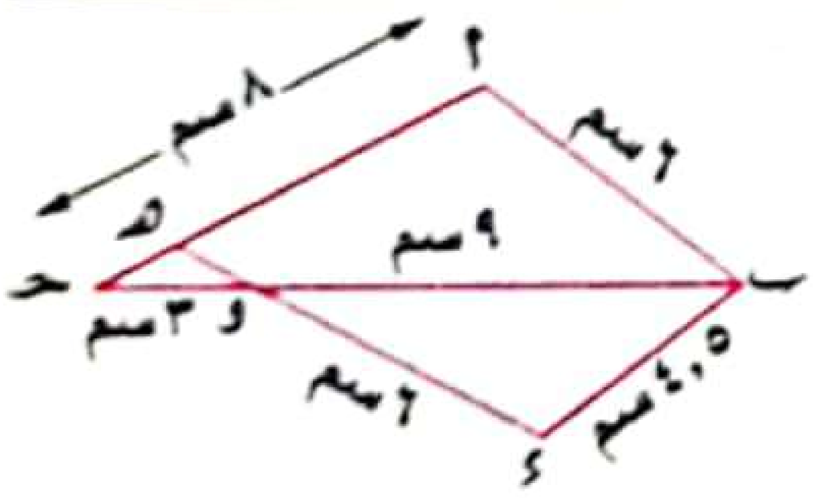
، أب = ٣٠ سم ، د جـ = ٣٢ سم

احسب : طول كل من $\overline{ب د}$ ، $\overline{أد}$

«١٨ سم ، ٢٤ سم»

---

**١٥** في الشكل المقابل :



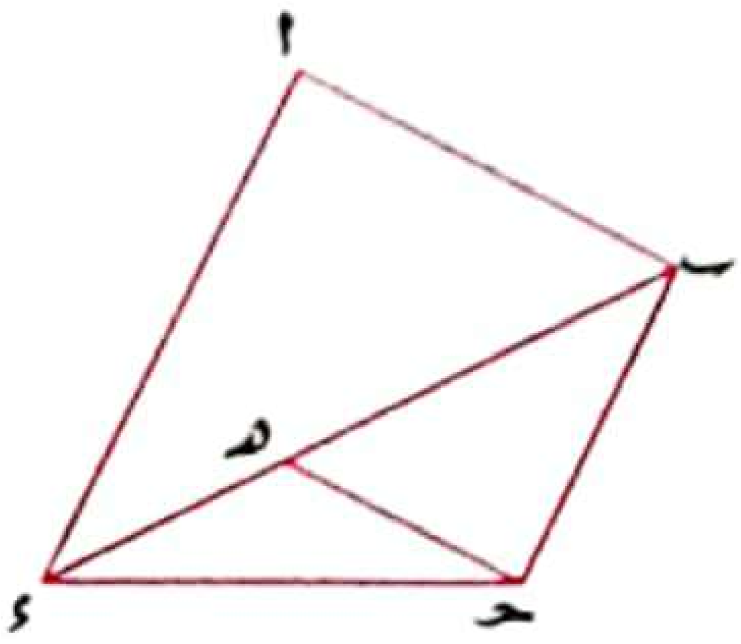

$\overline{بجـ}$ ∩ $\overline{دهـ}$ = {و} ، أب = ٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، أجـ = ٨ سم

، و جـ = ٣ سم ، ب د = ٤,٥ سم ، د و = ٦ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب جـ ~ Δ د ب و (٢) Δ هـ و جـ متساوي الساقين.

---

**١٦** في الشكل المقابل :




أ ب جـ د شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{ب د}$ حيث :

$\frac{أب}{أد} = \frac{جـ هـ}{ب جـ}$ ، $\frac{ب د}{أد} = \frac{هـ ب}{ب جـ}$

أثبت أن : (١) $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$

(٢) $\overline{أب}$ // $\overline{جـ هـ}$

**١٧** أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم ، ء ∈ ب أ⃖ بحيث أ ء = ٤٫٥ سم ، هـ ∈ جـ أ⃖ بحيث أ هـ = ٦ سم أثبت أن : الشكل ب جـ ء هـ رباعى دائرى.

---

**١٨** أ ب جـ مثلث ، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، هـ ∈ أ ب حيث : أ هـ = ٢ سم ، ء ∈ ب جـ حيث : ب ء = ٤ سم

(١) برهن أن : Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ جـ واستنتج : طول ء هـ «٥ سم»

(٢) برهن أن : الشكل أ جـ ء هـ رباعى دائرى.

---

**١٩** س ص ع مثلث قائم الزاوية فى س ، رسم س ل⃖ ⊥ ص ع ويقطعه فى ل

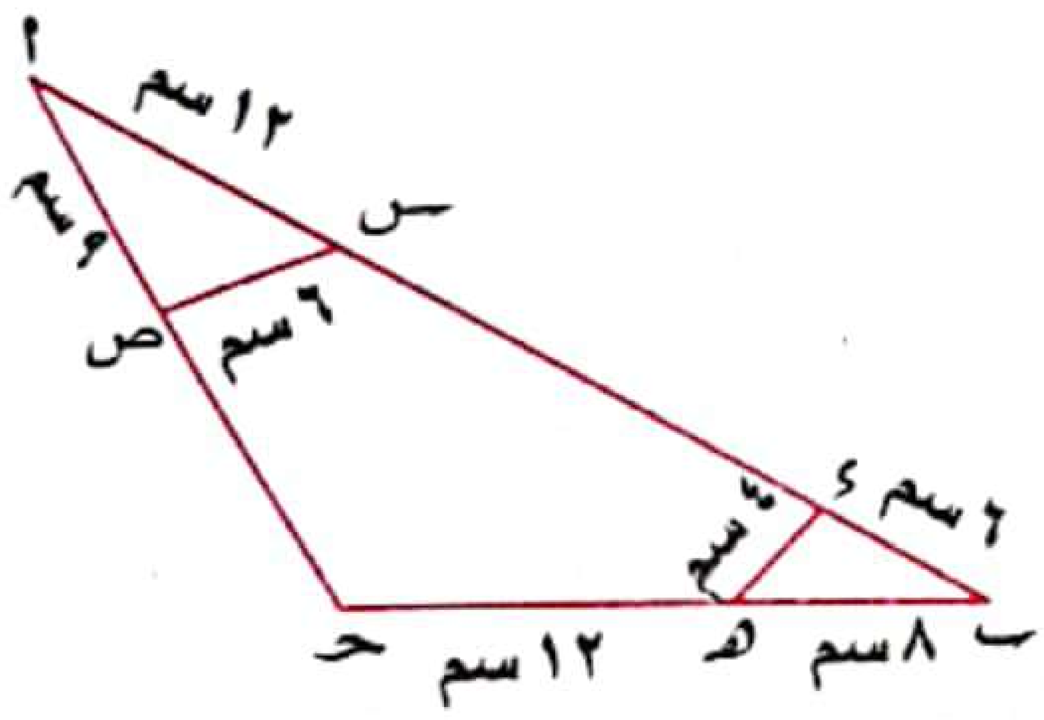
أثبت أن : $\frac{(\text{س ص})^2}{(\text{س ع})^2} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$ وإذا كان : س ص = ١٢ سم ، س ع = ١٦ سم

فاحسب : طول كل من ص ل ، س ل «٧٫٢ سم ، ٩٫٦ سم»

---

**٢٠** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

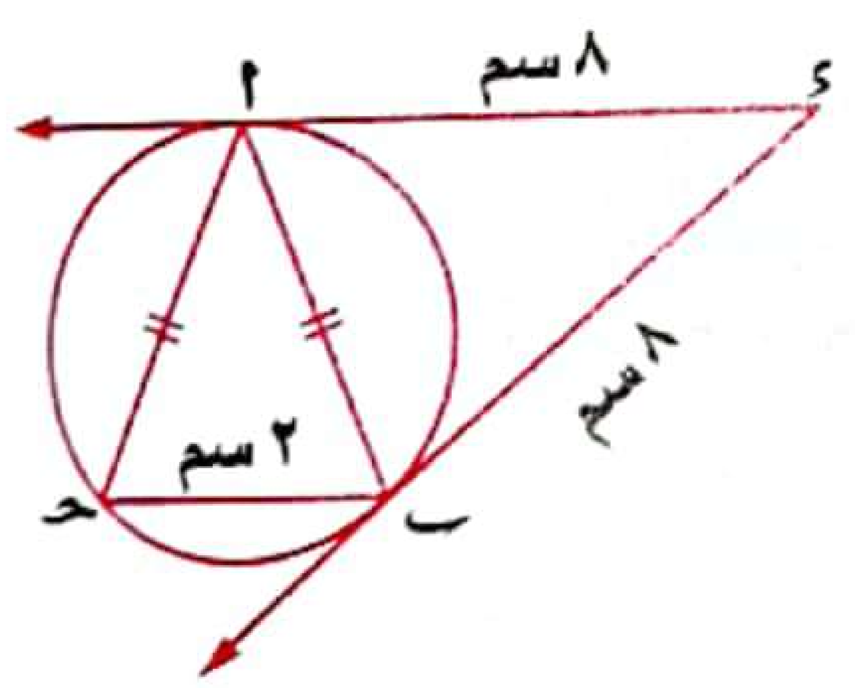
(١) فى الشكل المقابل :




ص جـ = .............. سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢) فى الشكل المقابل :

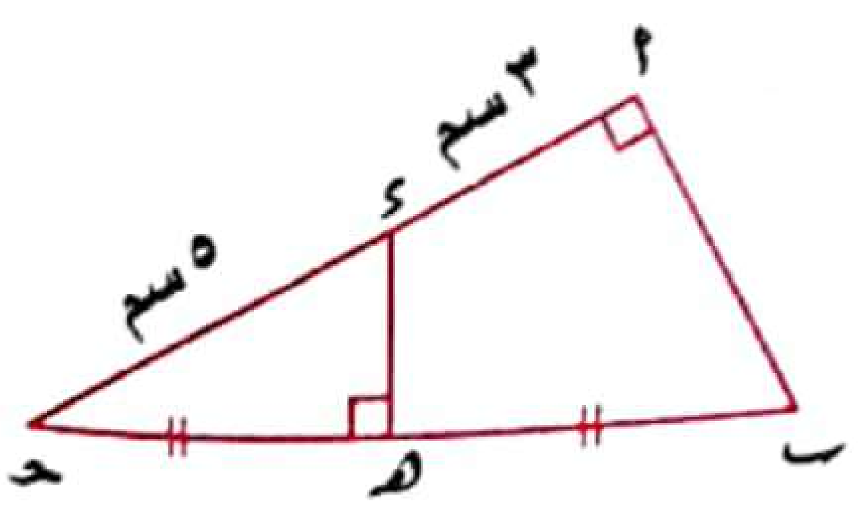



إذا كان : ء أ⃖ ، ء ب⃖ مماسين للدائرة عند أ ، ب على الترتيب ، ء أ = ء ب = ٨ سم ، ب جـ = ٢ سم

فإن : أ جـ = .............. سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

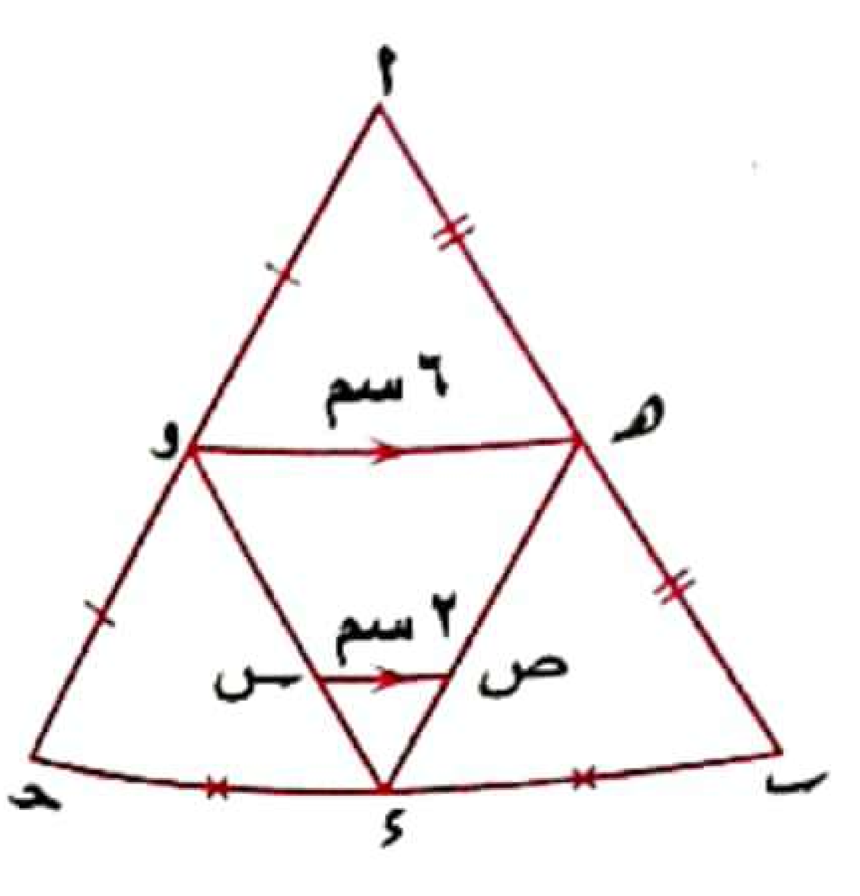
(٣) فى الشكل المقابل :




هـ جـ = .............. سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $2\sqrt{5}$ (د) ٥

(٤) فى الشكل المقابل :

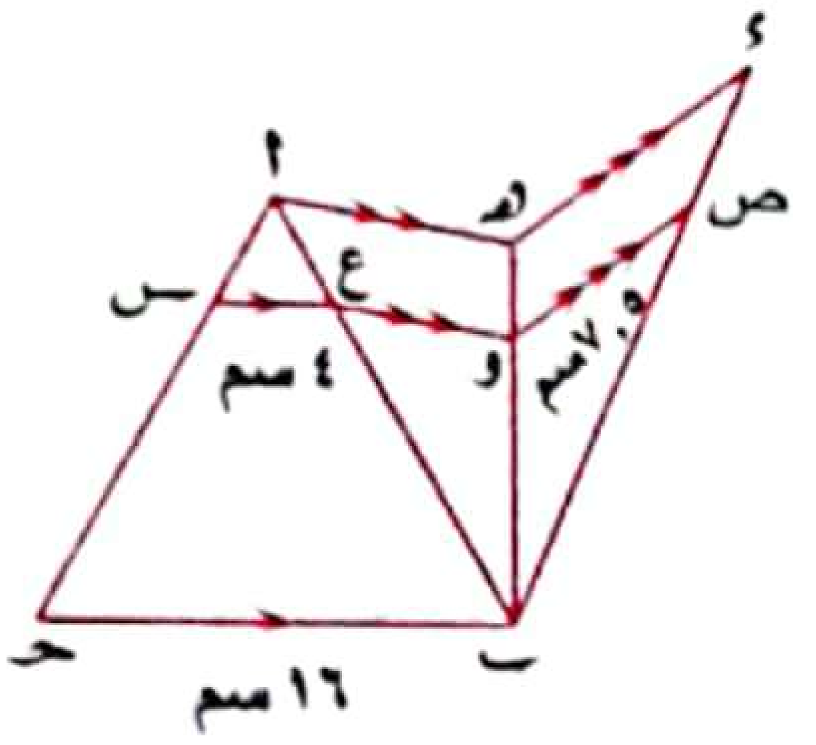



إذا كان محيط Δ ء س ص = ٨ سم

فإن محيط Δ أ ب جـ = .............. سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٥) في الشكل المقابل :

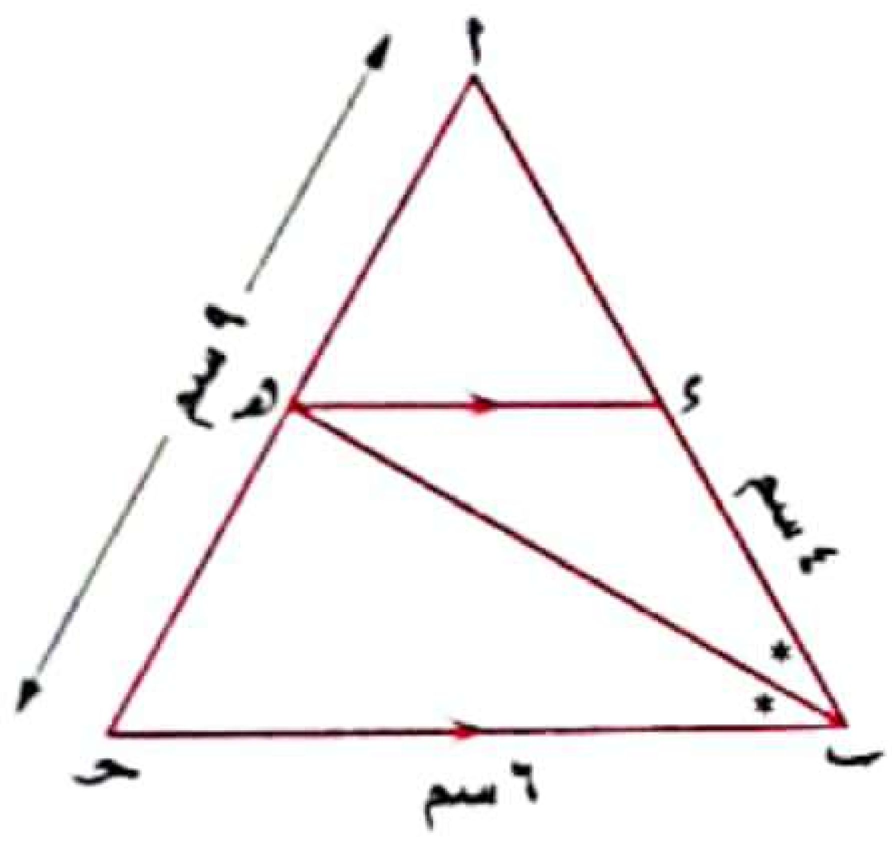



ءهـ = ............ سم

(أ) ٨ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٥

(٦) في الشكل المقابل :



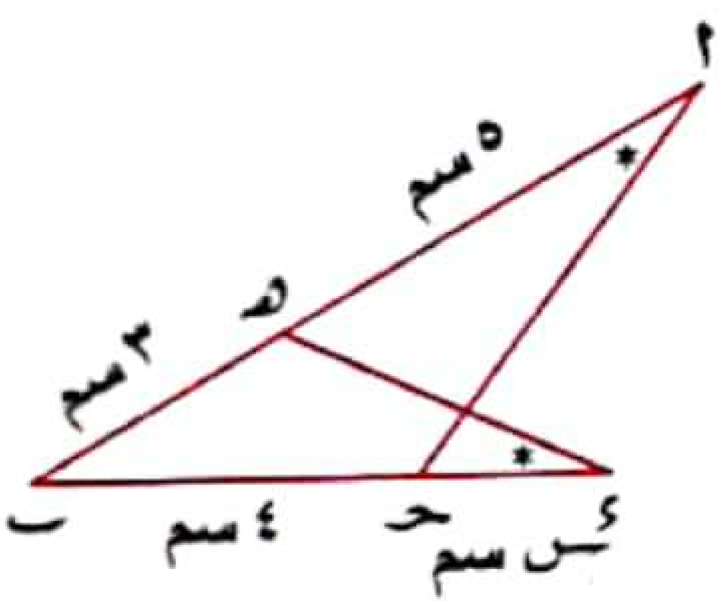

إذا كان : أحـ = ٩ سم ، ب ء = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

فإن محيط $\Delta$ أ ء هـ = ............ سم

(أ) ١٨ (ب) ١٦

(جـ) ١٤ (د) ١٢

(٧) في الشكل المقابل :



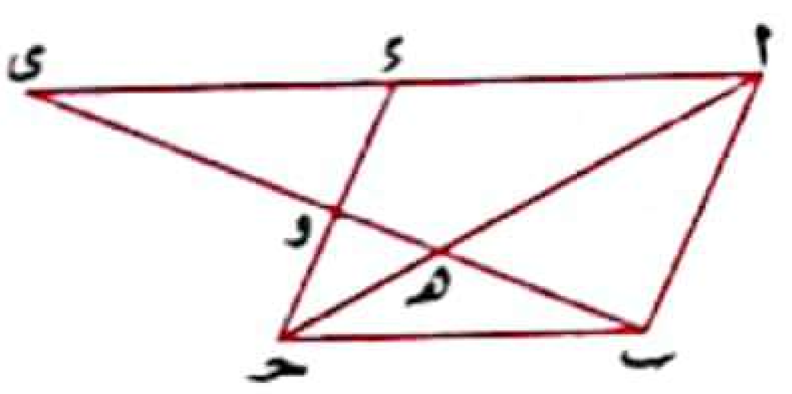

إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

فإن : س = ............ سم

(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٢

**٢١** في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، و ∈ $\overline{\text{ءحـ}}$

، رسم $\overrightarrow{\text{ب و}}$ فقطع $\overline{\text{أحـ}}$ في هـ ، وقطع $\overleftarrow{\text{أء}}$ في ى

أثبت أن : (١) $\Delta$ أ هـ ى ~ $\Delta$ حـ هـ ب (٢) $(\text{هـ ب})^2$ = هـ ى × هـ و

**٢٢** $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ وتران في دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـء}}$ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة

، أب = ٤ سم ، ءحـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم

أثبت أن : $\Delta$ أ ء هـ ~ $\Delta$ حـ ب هـ ، ثم أوجد : طول $\overline{\text{حـ هـ}}$ «١٢ سم»

**٢٣** $\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة ، حـ نقطة تنتمي للدائرة ، رسم $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ فقطع المماس للدائرة عند ب في نقطة ء

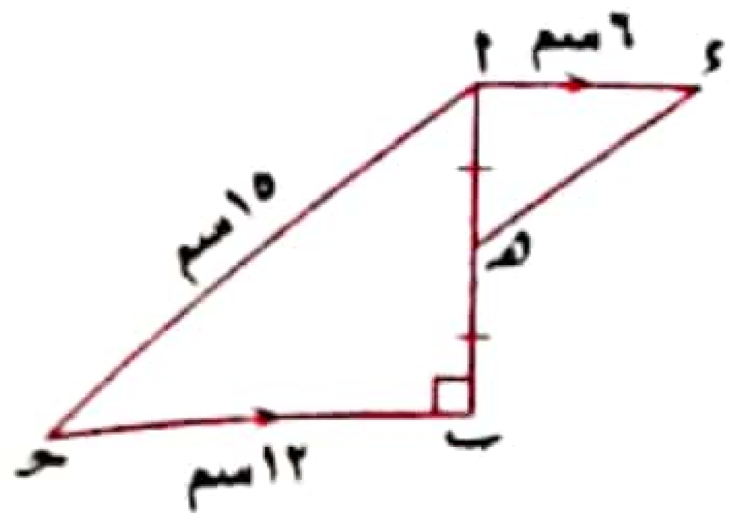
أثبت أن : $(\text{ب حـ})^2$ = حـ أ × حـ ء

**٢٤** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ليقطعه في ء

، إذا كان : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{1}{2}$ ، أء = ٦ $\sqrt{2}$ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ «٦ سم ، ٦ $\sqrt{3}$ سم ، ٦ $\sqrt{6}$ سم»

**٢٥** في الشكل المقابل :

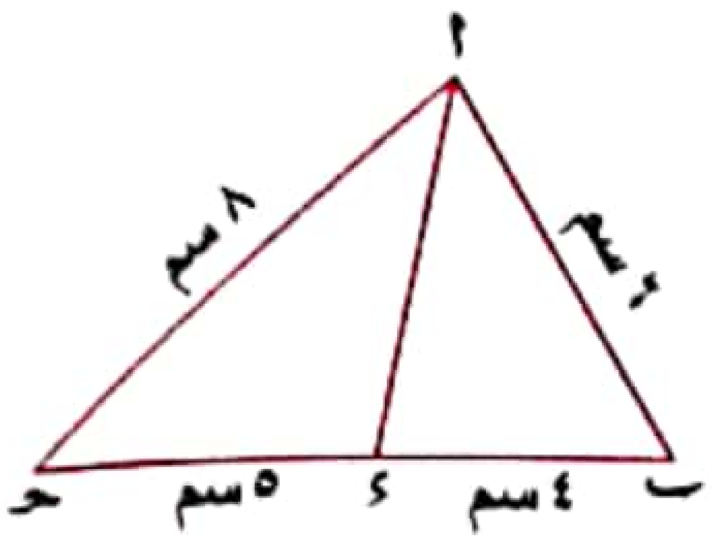



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ بحيث أ ء = ٦ سم

**أثبت أن :** Δ أ ب حـ ~ Δ هـ أ ء **واستنتج أن :** $\overline{أحـ}$ // $\overline{ءهـ}$

**٢٦** في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث : ب ء = ٤ سم

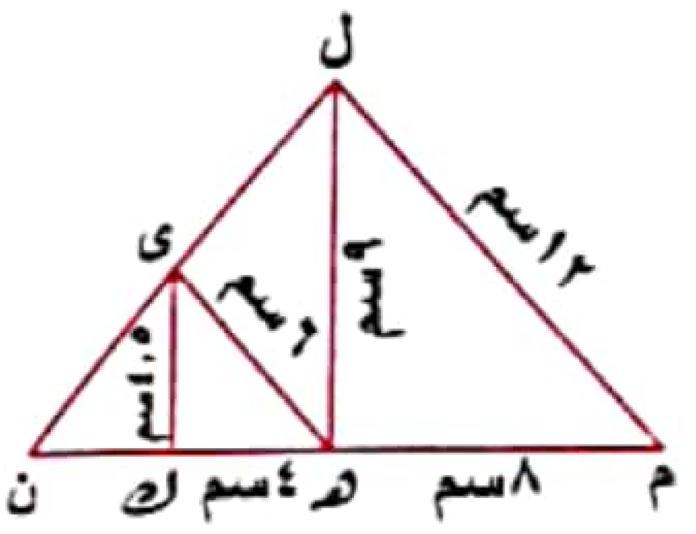
، ء حـ = ٥ سم فإذا كانت : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم

(١) **أثبت أن :** Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

(٢) **أوجد :** طول $\overline{أء}$ «$5\frac{1}{3}$ سم»

(٣) **أثبت أن :** $\overline{أب}$ مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ

**٢٧** في الشكل المقابل :




ل م ن مثلث ، هـ ∈ $\overline{مَن}$ ، ك ∈ $\overline{مَن}$ ، ى ∈ $\overline{لن}$

، ل م = ١٢ سم ، م هـ = ٨ سم ، ل هـ = ٩ سم

، هـ ى = ٦ سم ، هـ ك = ٤ سم ، ك ى = ٤,٥ سم

**أثبت أن :** $\overline{ىك}$ // $\overline{لهـ}$ ، $\overline{هـى}$ // $\overline{مل}$ ثم احسب : طول $\overline{نك}$ «٤ سم»

**٢٨** س ص ع ، ل م ن مثلثان متساويان في قياسات زواياهما المتناظرة ، ص ع = ٨ سم

، م ن = ١٢ سم ، رسم $\overleftrightarrow{سء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{صع}$ قابله في ء ورسم $\overleftrightarrow{لهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{مَن}$ قابله في هـ

فإذا كان : ء س = ٧ سم **فأوجد :** طول $\overline{لهـ}$ «$10\frac{1}{2}$ سم»

**٢٩** 📖 أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان. رسم $\overleftrightarrow{أس}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ليقطعه في س ، ورسم $\overleftrightarrow{ءص}$ ⊥ $\overline{هـو}$ ليقطعه في ص أثبت أن : ب س × ص و = حـ س × ص هـ

**٣٠** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ أ = ١٥ سم ، ء ∈ $\overline{ب حـ}$

بحيث ب ء = $\frac{1}{4}$ ب حـ ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ قطع $\overline{أحـ}$ في هـ

**أوجد :** مساحة الشكل أ ب ء هـ «$23\frac{5}{8}$ سم$^2$»

**٣١** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث : $\frac{ء ب}{أ ب} = \frac{أ ب}{حـ ب}$

**أثبت أن :** (١) Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (٢) $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

**٣٢** إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و وكانت س منتصف ب حـ ، ص منتصف هـ و

حيث ب حـ ، هـ و ضلعان متناظران في المثلثين فأثبت أن : Δ أ ب س ~ Δ ء هـ ص

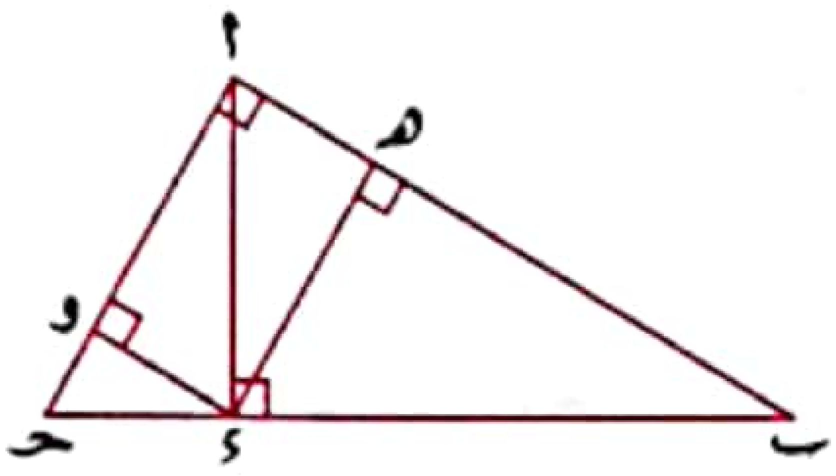
---

**٣٣** أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه أ حـ ، ب ء في هـ ، فإذا كان : (أ ب)/(أ هـ) = (ب ء)/(ء حـ)

أثبت أن : (١) Δ أ ب هـ ~ Δ ء ب حـ (٢) ب ء ينصف ∠ أ ب حـ

---

**٣٤** في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ ء ⊥ ب حـ ، ء هـ ⊥ أ ب ، ء و ⊥ أ حـ

أثبت أن : (١) Δ أ ء هـ ~ Δ حـ ء و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ ء و = √(أ هـ × هـ ب × أ و × و حـ)

---

**٣٥** أ ب حـ ء مستطيل ، رسم ء و ⊥ أ حـ فقطع أ حـ في هـ ، ب حـ في و

أثبت أن : مساحة المستطيل أ ب حـ ء = √(أ هـ × أ حـ × ء هـ × ء و)

---

**٣٦** أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ تقاطع قطراه أ حـ ، ب ء في م

أثبت أن : م أ × م ب = م حـ × م ء

وإذا كان : أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٤ سم احسب : طول أ م «٦ سم»

---

**٣٧** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ ، رسمت أ ء وفرضت عليها نقطة هـ ثم رسم

هـ س // أ ب ويقطع ب ء في س ، ورسم هـ ص // أ حـ ويقطع ء حـ في ص

أثبت أن : (١) Δ أ ب حـ ~ Δ هـ س ص (٢) س ص × أ ء = ب حـ × ء هـ

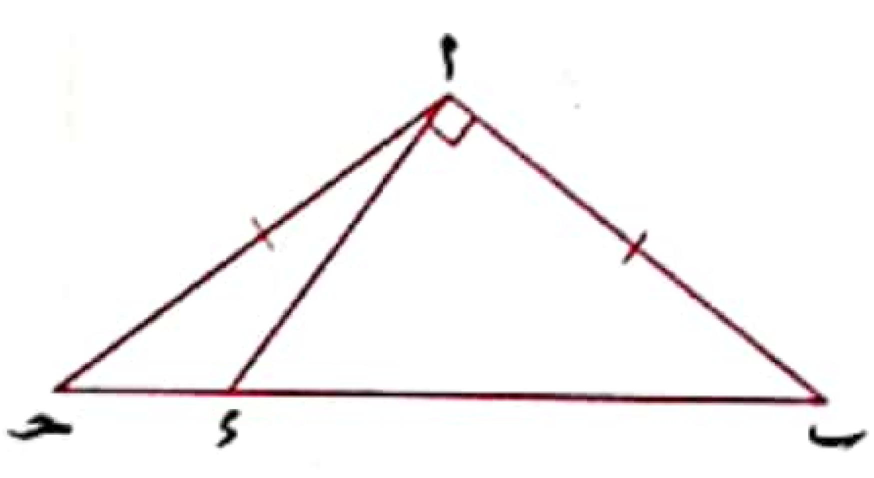
---

**٣٨** أ ب قطر في دائرة م ، حـ ∈ أ ب وتقع خارج الدائرة ، رسمت حـ ء مماسة للدائرة تمسها عند ء

ثم رسم ء هـ ⊥ أ ب قطعه في هـ أثبت أن : (حـ ء)$^{2}$ = حـ هـ × حـ م = حـ ب × حـ أ

---

**٣٩** في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية في أ ، أ ب = أ حـ

، رسم أ ء ⊥ أ ب ويقطع ب حـ في ء

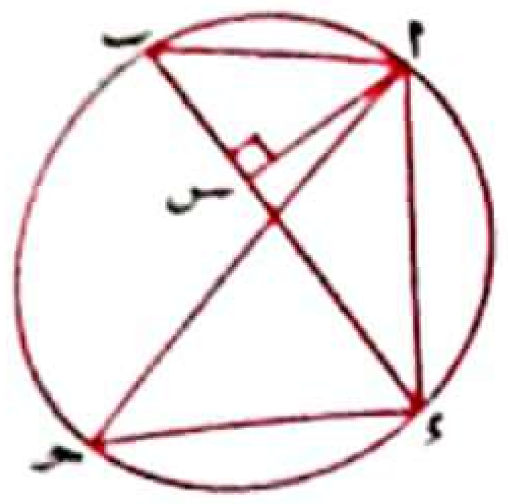
أثبت أن : ٢ (أ ب)$^{2}$ = ب ء × ب حـ

---

**٤٠** أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، ق(∠ أ) = ٩٠° ، هـ ∈ ب ء

بحيث أ ب × هـ حـ = ء هـ × ب ء ، حـ ء × ب ء = ء أ × هـ حـ

أثبت أن : (ب حـ)$^{2}$ = (أ ب)$^{2}$ + (أ ء)$^{2}$ + (حـ ء)$^{2}$




**٤١** في الشكل المقابل :

$\overline{أس} \perp \overline{بء}$ ، $\frac{ب س}{ح ء} = \frac{ب أ}{أ ح}$

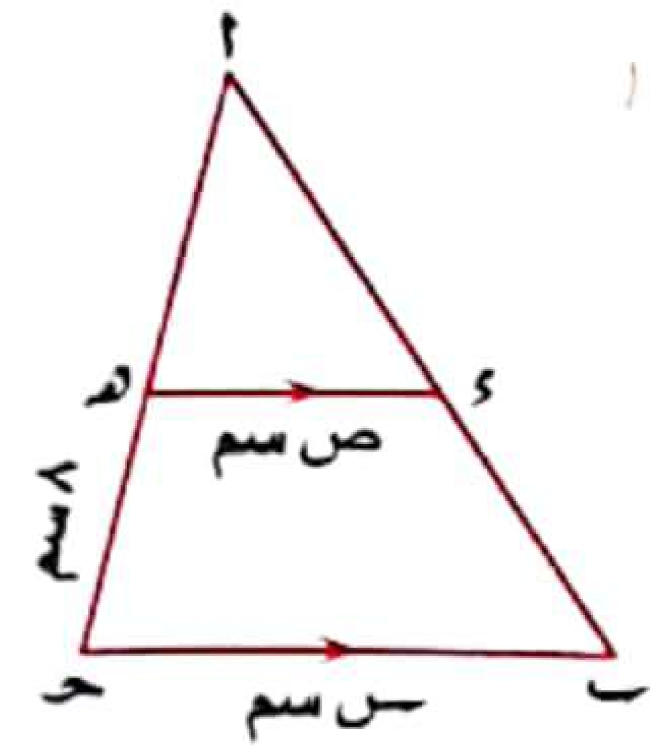
أثبت أن : (١) Δ ب س أ ~ Δ ح ء أ  (٢) $\overline{أح}$ قطر في الدائرة.

**٤٢** أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح ، هـ ∈ $\overleftarrow{بح}$ خارج المثلث ، ء ∈ $\overleftarrow{حب}$ خارج المثلث

بحيث $(أب)^2$ = ء ب × ح هـ  أثبت أن : Δ أ ب ء ~ Δ هـ ح أ

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٤٣** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

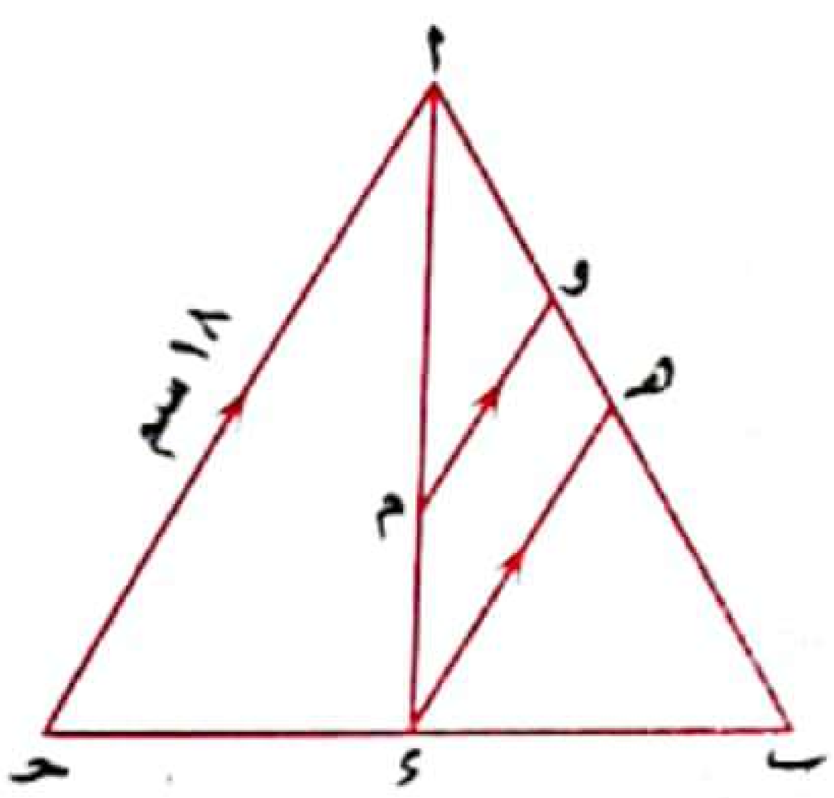



(١) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\frac{س - ص}{س + ص} = \frac{٢}{٧}$

فإن : أ هـ = ............ سم

(أ) ١٦  (ب) ١٥  (جـ) ١٢  (د) ١٠



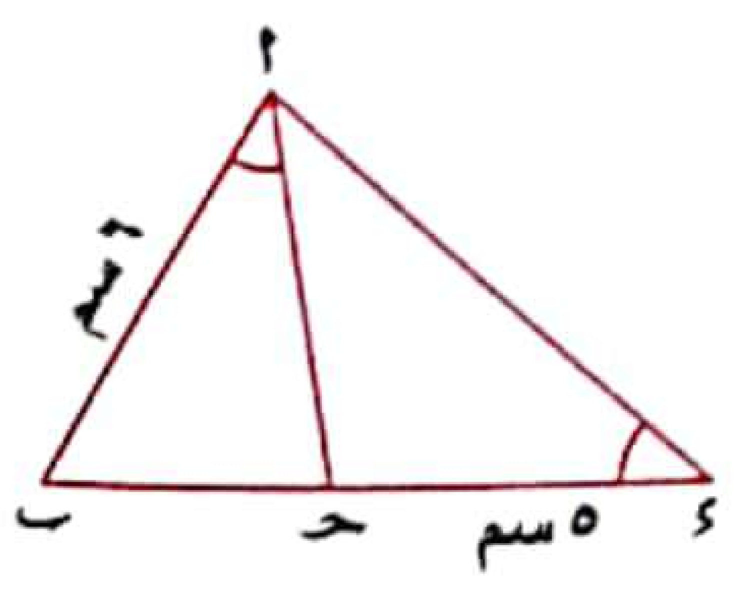

(٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب ح

فإن : طول $\overline{وم}$ = ............ سم

(أ) ٤  (ب) ٥

(جـ) ٦  (د) ٨



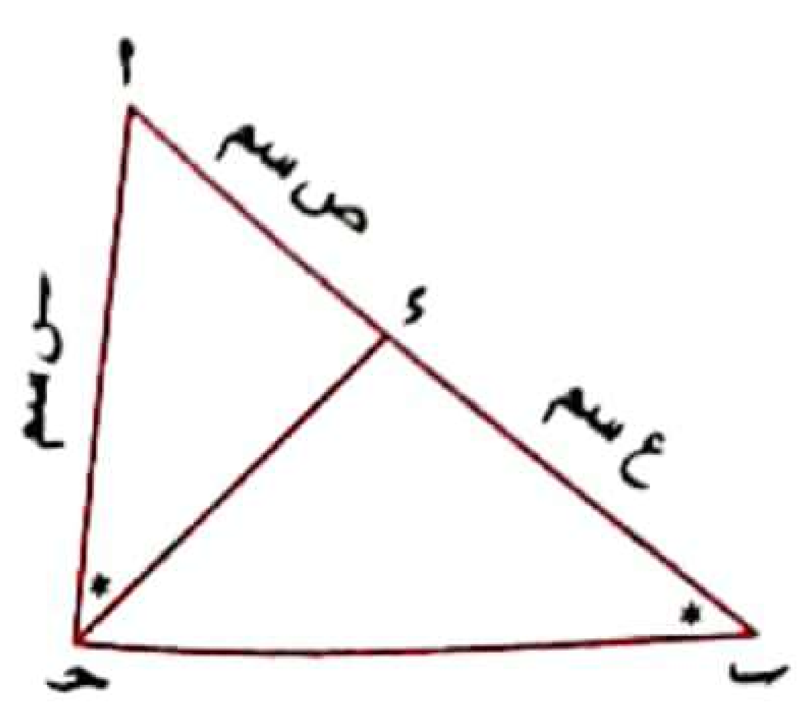

(٣) في الشكل المقابل :

ح ∈ $\overline{بء}$ ، ق (∠ء) = ق (∠ب أ ح)

، أ ب = ٦ سم ، ح ء = ٥ سم

فإن : ب ح = ............ سم

(أ) ٣  (ب) ٤  (جـ) ٥  (د) ٦




(٤) في الشكل المقابل :

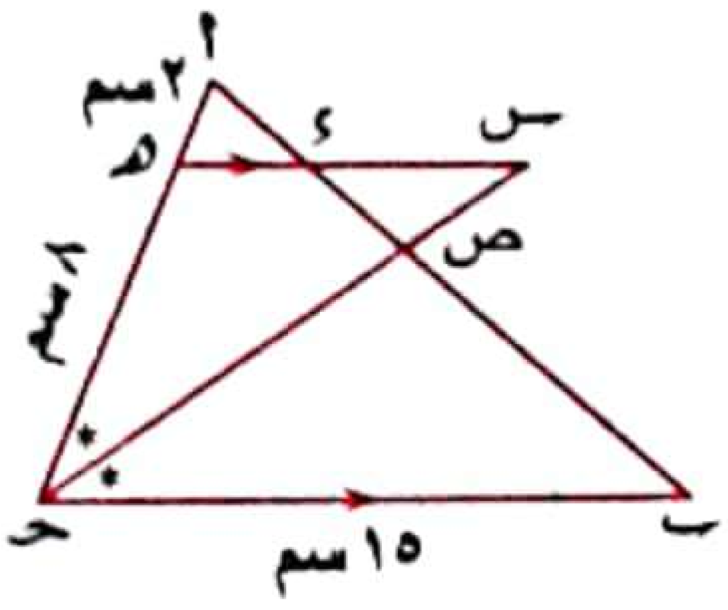
إذا كان : $س^2 - ص^2 = ١٦$

فإن : ص × ع = ............ $سم^2$

(أ) ٤  (ب) ٨

(جـ) ١٢  (د) ١٦

(٥) في الشكل المقابل :



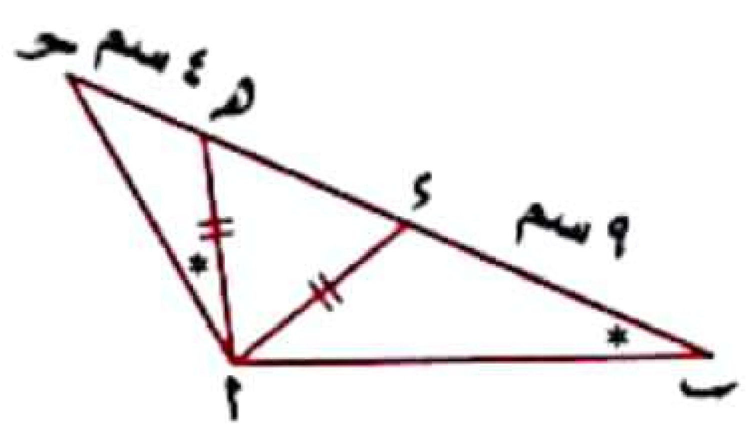

إذا كان : حـ س ينصف ∠ أ حـ ب

، س ء // ب حـ

فإن : س ء = ............ سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

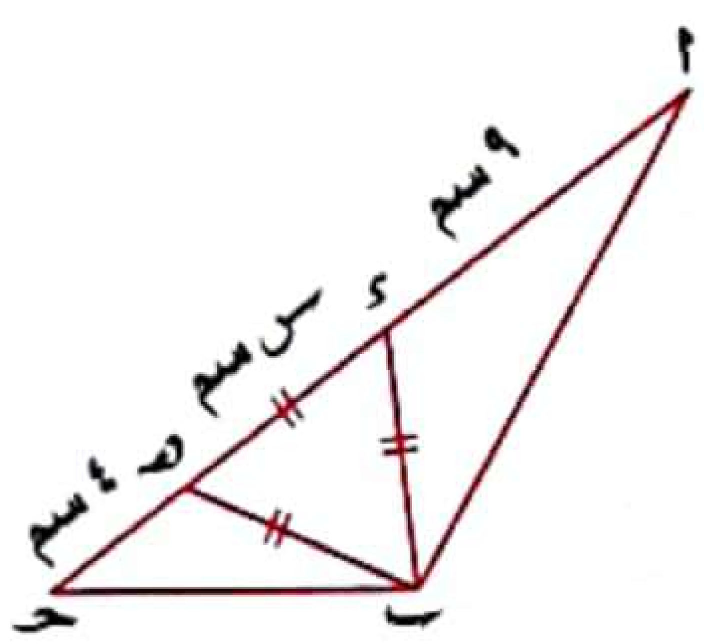
(٦) في الشكل المقابل :




أ ء = ............ سم

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ٦

(٧) في الشكل المقابل :



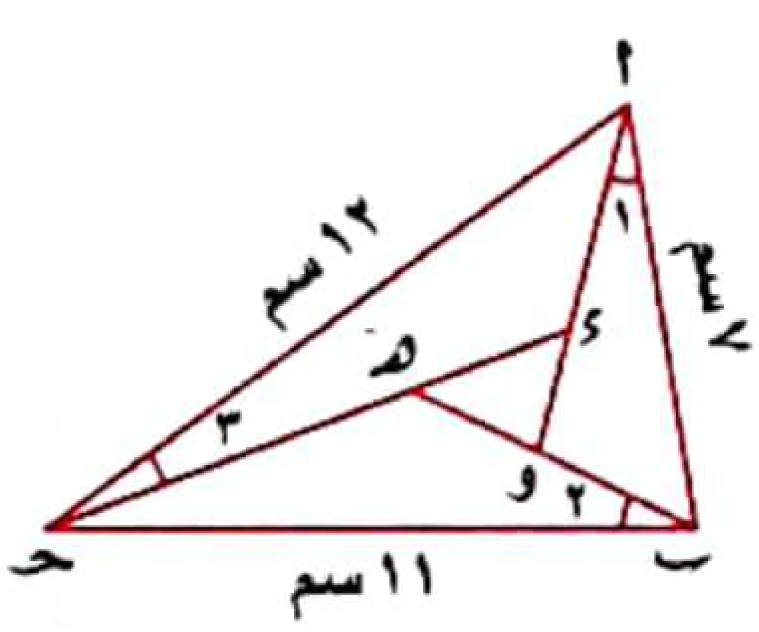

إذا كان : ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

، Δ ب ء هـ متساوي الأضلاع

فإن : س = ............ سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٨) في الشكل المقابل :

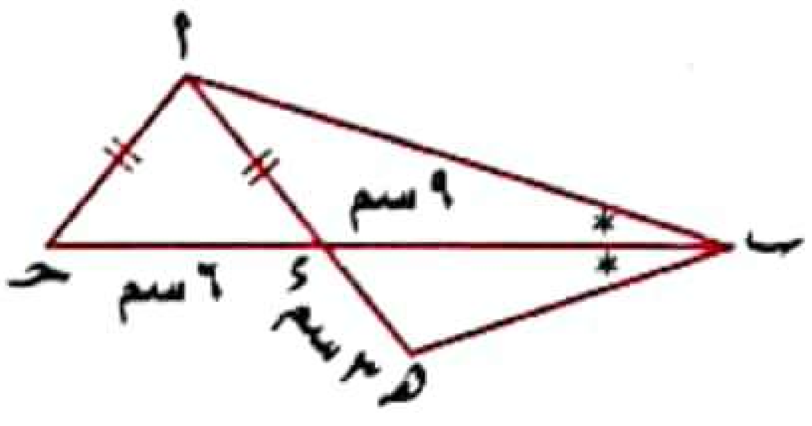



إذا كان : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

فإن : ء هـ : هـ و : و ء = ............

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧ (جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٩) في الشكل المقابل :



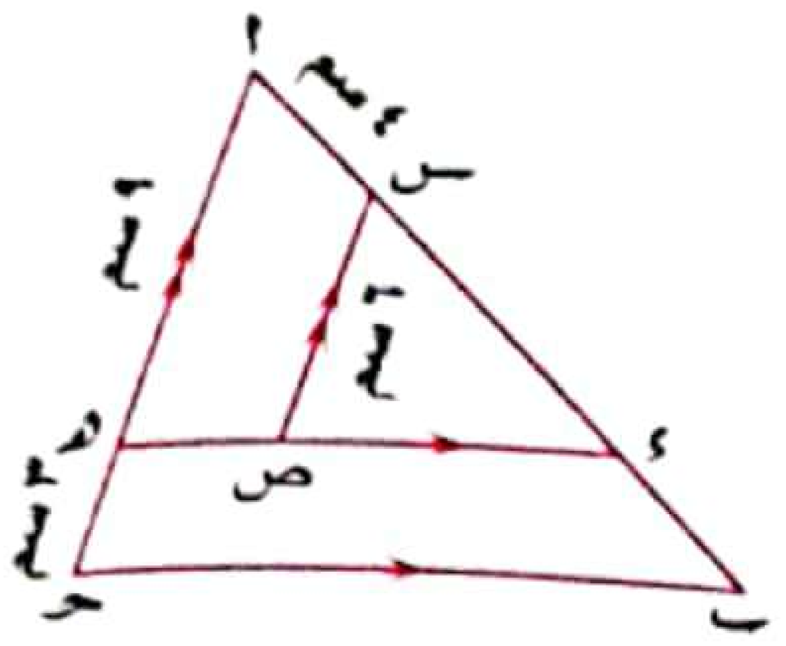

إذا كان : ب ء ينصف ∠ أ ب هـ

، ب ء = ٩ سم ، ء حـ = ٦ سم ، ء هـ = ٣ سم

فإن محيط Δ أ ء حـ = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(١٠) **فى الشكل المقابل :**



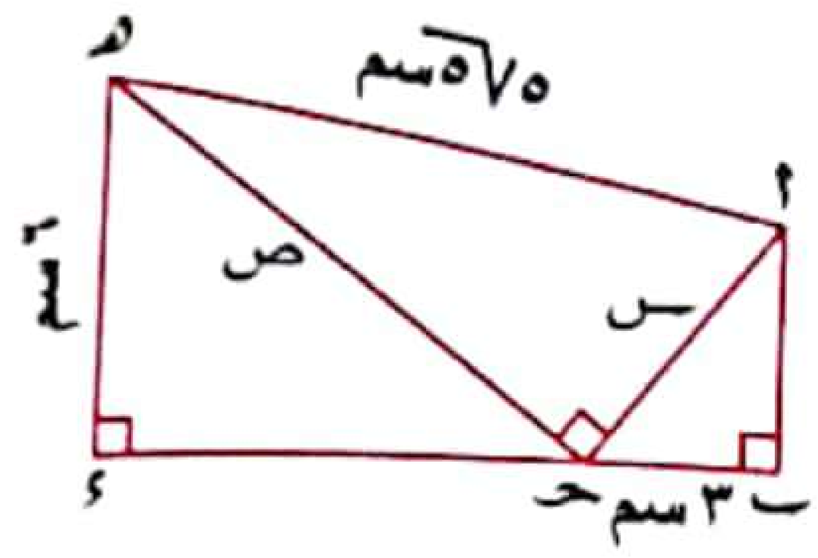

س ص // أ جـ ، د هـ // ب جـ

فإن : د ب = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(١١) **فى الشكل المقابل :**

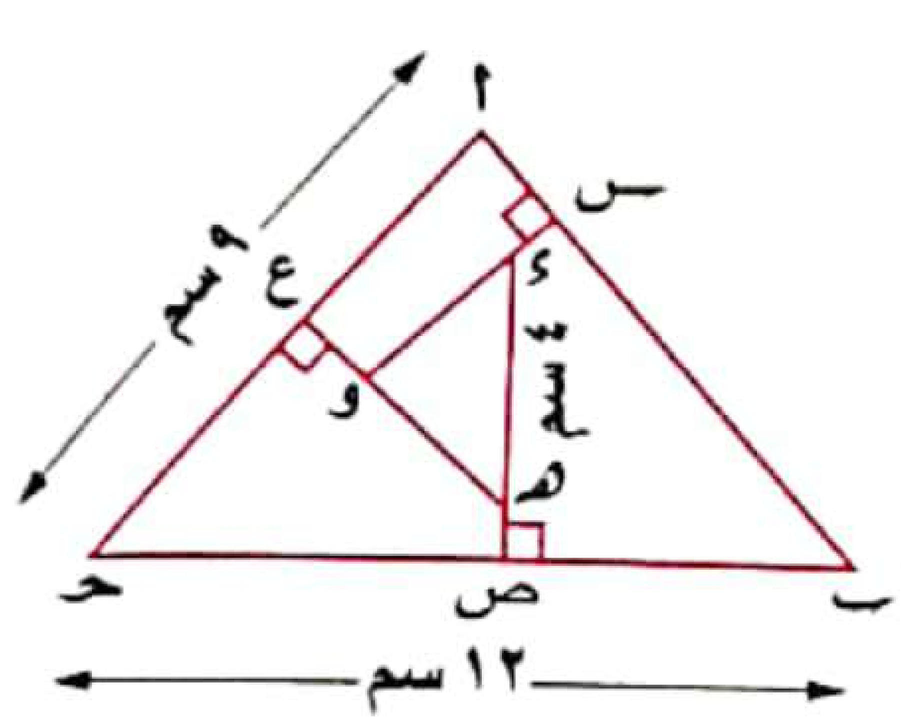



س + ص = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ١٨ (د) ٢١

(١٢) **فى الشكل المقابل :**




إذا كان : و س ⊥ أ ب ، د ص ⊥ ب جـ

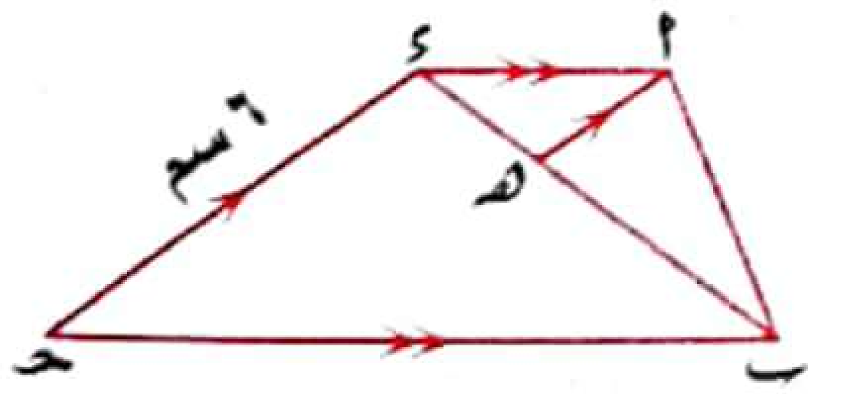
، هـ ع ⊥ أ جـ ، أ جـ = ٩ سم

، ب جـ = ١٢ سم ، د هـ = ٤ سم

فإن : هـ و = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) **فى الشكل المقابل :**

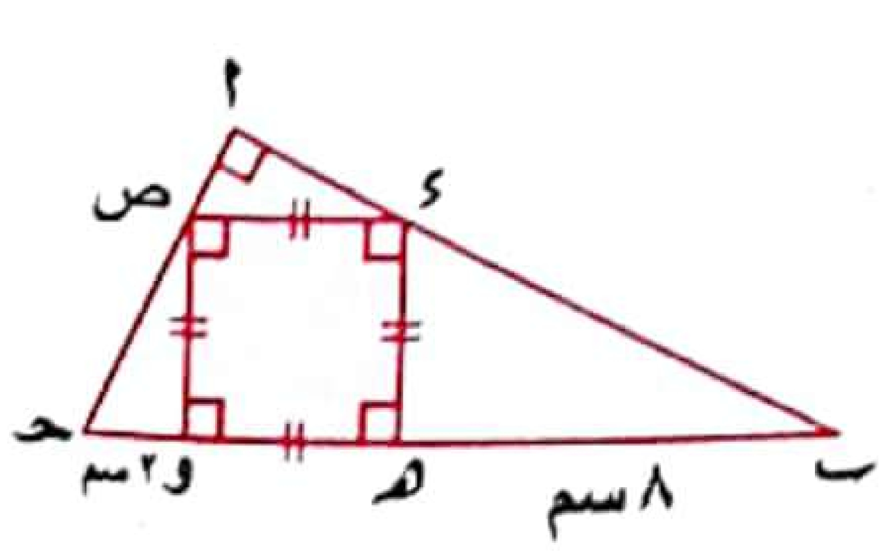



إذا كان : ب هـ = ٢ هـ د

فإن : أ هـ = ............ سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) **فى الشكل المقابل :**




إذا كان : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

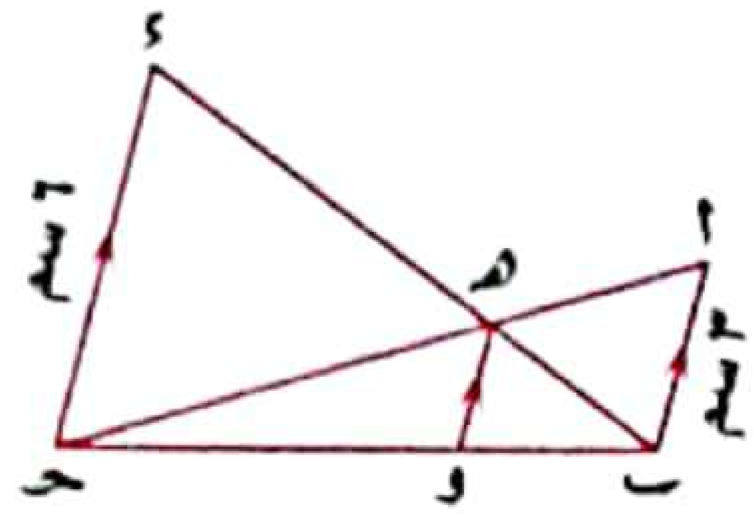
، د هـ و ص مربع

، ب هـ = ٨ سم ، و جـ = ٢ سم

فإن : مساحة المربع د هـ و ص = ............ $سم^2$

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢٠ (د) ٣٦

(١٥) في الشكل المقابل :

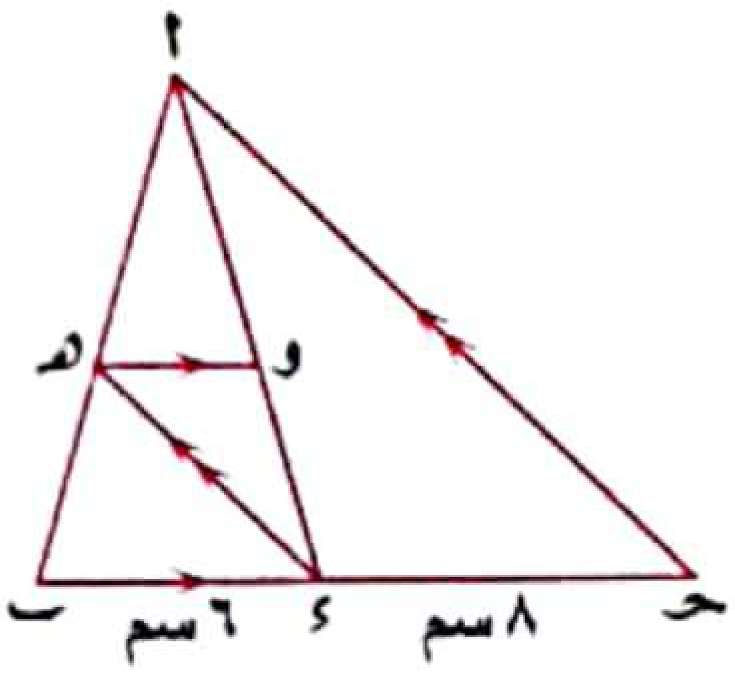


إذا كان : $\overline{أب} // \overline{هـ و} // \overline{حـ ء}$

فإن : هـ و = ............. سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٢ (جـ) ١,٥ (د) ١

(١٦) في الشكل المقابل :



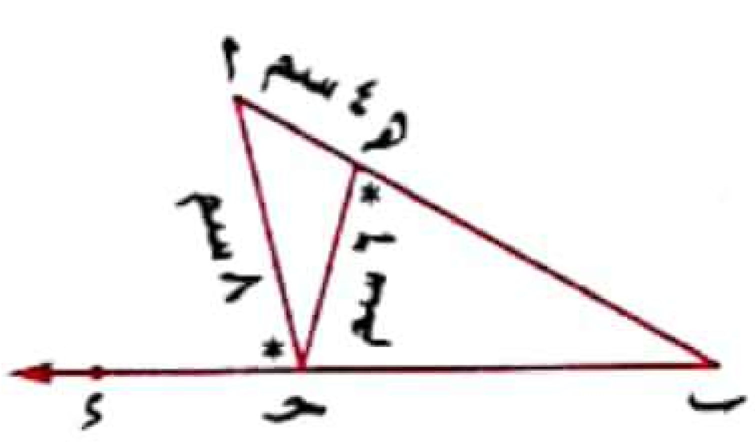
إذا كانت : $\overline{و هـ} // \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ} // \overline{حـ أ}$

، ب ء = ٦ سم ، ء حـ = ٨ سم

فإن : و هـ = ............. سم

(أ) $\frac{١٢}{٧}$ (ب) $\frac{١٨}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{٢٨}{٧}$

(١٧) في الشكل المقابل :

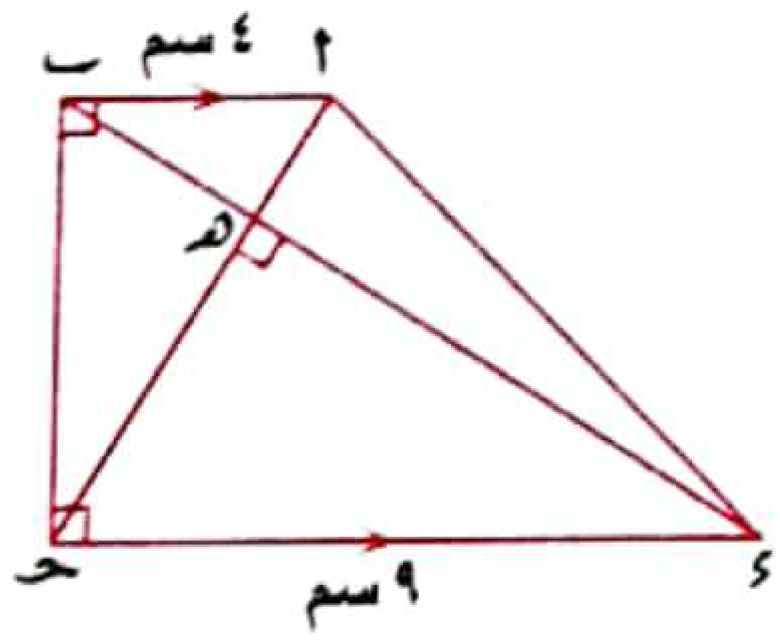


إذا كان : ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ب هـ حـ)

فإن : ب هـ + ب حـ = ............. سم

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(١٨) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف

، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء حـ ب) = °٩٠

، $\overline{أ حـ} \perp \overline{ب ء}$

فإن مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء = ............. سم$^٢$

(أ) ١٣ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٩ (د) ٦٠



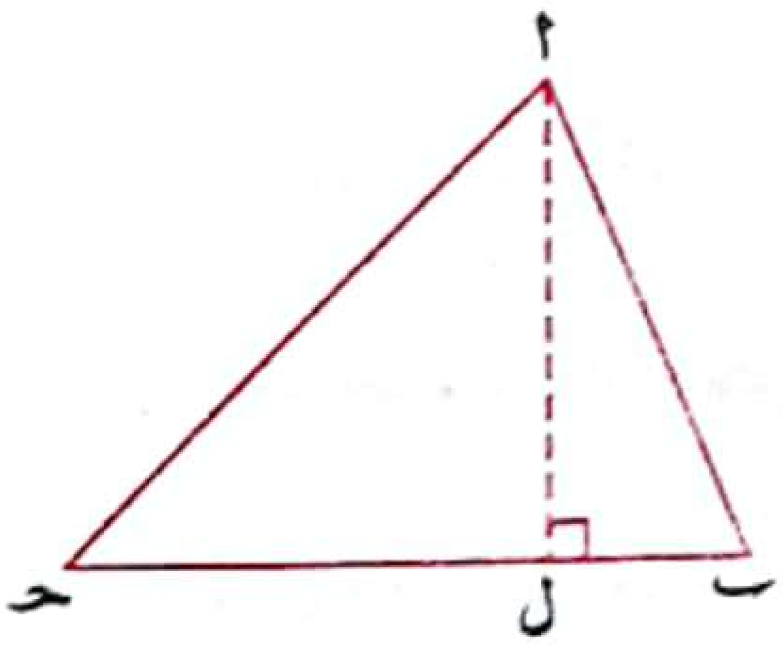
# الدرس 3 العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

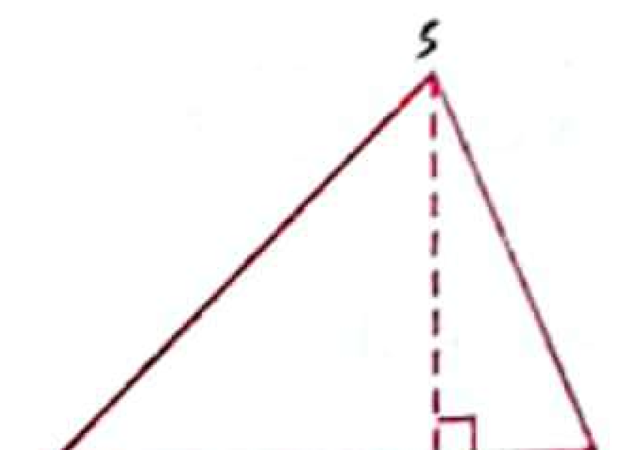
نعلم أن النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ، وفى هذا الدرس سنتناول العلاقة بين مساحتى مضلعين متشابهين.

## أولًا النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين

**نظرية ٣**

**النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.**




**◂ المعطيات** $\triangle\text{أبحـ} \sim \triangle\text{ءهـو}$

**◂ المطلوب** إثبات أن : $\frac{\text{م}(\triangle\text{أبحـ})}{\text{م}(\triangle\text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}\right)^{٢}$

**◂ العمل** نرسم $\overleftrightarrow{\text{أل}} \perp \overline{\text{بحـ}}$ يقطعها فى ل ، $\overleftrightarrow{\text{ءم}} \perp \overline{\text{هـو}}$ يقطعها فى م

**◂ البرهان** ∵ $\triangle\text{أبحـ} \sim \triangle\text{ءهـو}$

∴ ق (∠ب) = ق (∠هـ) ، $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}$ (١)

، ∵ ∆∆ أبل ، ءهـم قائما الزاوية ، ق (∠ب) = ق (∠هـ)

∴ $\triangle\text{أبل} \sim \triangle\text{ءهـم}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أل}}{\text{ءم}}$ (٢)

، ∵ $\frac{\text{م}(\triangle\text{أبحـ})}{\text{م}(\triangle\text{ءهـو})} = \frac{\frac{١}{٢}\,\text{بحـ} \times \text{أل}}{\frac{١}{٢}\,\text{هـو} \times \text{ءم}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} \times \frac{\text{أل}}{\text{ءم}}$ (٣)

وبالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣) ينتج أن :

$\frac{\text{م}(\triangle\text{أبحـ})}{\text{م}(\triangle\text{ءهـو})} = \frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} \times \frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}} = \left(\frac{\text{بحـ}}{\text{هـو}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أحـ}}{\text{ءو}}\right)^{٢}$ (وهو المطلوب)

**ملاحظة ١**

**من برهان النظرية السابقة نستطيع أن نستنتج أن :**

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما .

**مثال ١**

إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين هى $\frac{٩}{١٦}$ ، ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم أوجد محيط المثلث الأكبر.

**الحل**

بفرض أن المثلثين المتشابهين هما : Δ أ ب حـ ، Δ س ص ع حيث Δ أ ب حـ هو المثلث الأصغر :

$\therefore \frac{م(\Delta أ ب حـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \left(\frac{أ ب}{س ص}\right)^٢ = \frac{٩}{١٦}$ $\therefore \frac{أ ب}{س ص} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{محيط \Delta أ ب حـ}{محيط \Delta س ص ع} = \frac{أ ب}{س ص} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore \frac{٦٠}{محيط \Delta س ص ع} = \frac{٣}{٤}$

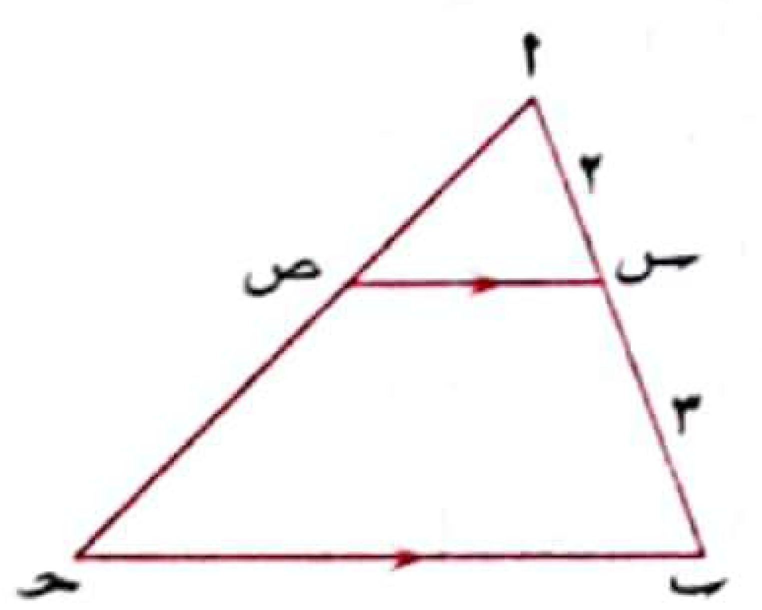
$\therefore$ محيط Δ س ص ع $= \frac{٦٠ \times ٤}{٣} = ٨٠$ سم (وهو المطلوب)

**مثال ٢**

أ ب حـ مثلث مساحته ٦٢,٥ سم$^٢$ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س ، $\overline{أ حـ}$ فى ص

فإذا كان أ س : س ب = ٢ : ٣ **فأوجد :** مساحة الشكل س ب حـ ص

**الحل**




فى Δ أ ب حـ : $\because$ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

$\therefore$ Δ أ س ص ~ Δ أ ب حـ

$\therefore \frac{م(\Delta أ س ص)}{م(\Delta أ ب حـ)} = \left(\frac{أ س}{أ ب}\right)^٢$

$\therefore \frac{م(\Delta أ س ص)}{٦٢,٥} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^٢$

$\therefore م(\Delta أ س ص) = \frac{٤}{٢٥} \times ٦٢,٥ = ١٠$ سم$^٢$

$\therefore$ مساحة الشكل س ب حـ ص = م (Δ أ ب حـ) − م (Δ أ س ص)

$= ٦٢,٥ - ١٠ = ٥٢,٥$ سم$^٢$ (وهو المطلوب)

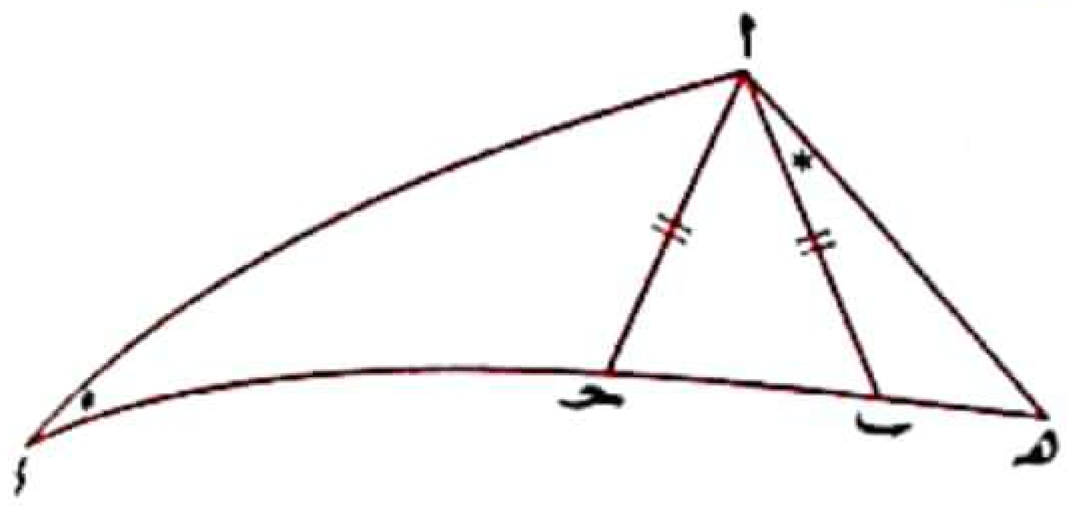
**مثال ٣**

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ء ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ خارج المثلث ، هـ ∈ $\overleftarrow{حـ ب}$ خارج المثلث بحيث

ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ء) فإذا كانت مساحة Δ أ حـ ء أربعة أمثال مساحة Δ أ ب هـ

**فأثبت أن :** ء حـ = ٢ أ حـ

الحـــل



∵ ΔΔ أ ب هـ ، د جـ أ فيهما :

ق (∠ب أ هـ) = ق (∠د)

، ق (∠أ ب هـ) = ق (∠د جـ أ) (مكملتان لزاويتين متساويتين فى القياس)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ د جـ أ

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{د جـ أ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د جـ}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \frac{١}{٤} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د جـ}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د جـ}}$$

∴ د جـ = ٢ أ ب

، ∵ أ ب = أ جـ

∴ د جـ = ٢ أ جـ

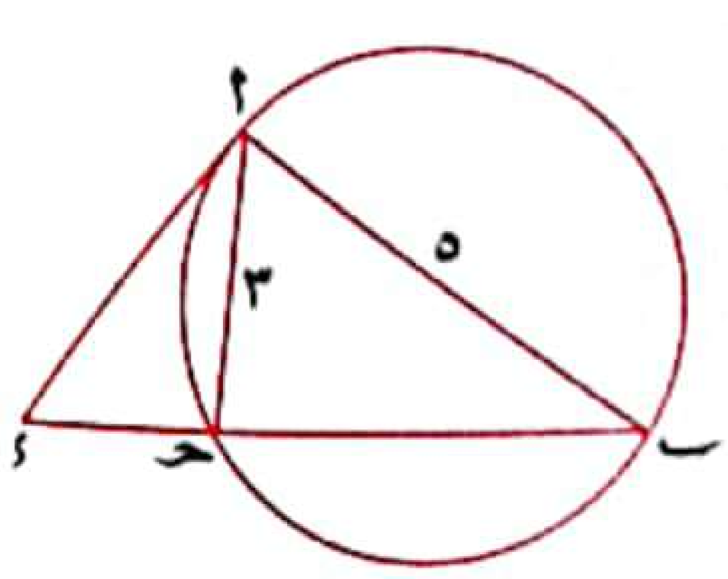
(وهو المطلوب)

## مثـــال ٤

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٥}{٣}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماسًا للدائرة عند أ قطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فى د

أوجد : م (Δ أ جـ د) : م (Δ أ ب جـ)

الحـــل




∵ ΔΔ أ د جـ ، ب د أ فيهما : ∠د مشتركة

، ق (∠جـ أ د) = ق (∠ب) (مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$)

∴ Δ أ د جـ ~ Δ ب د أ

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ د جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ب د أ})} = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب أ}}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$$

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ د جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ د جـ})} = \frac{٩}{٢٥}$$

∴ ٢٥ م (Δ أ د جـ) = ٩ م (Δ أ ب جـ) + ٩ م (Δ أ د جـ)

∴ ١٦ م (Δ أ د جـ) = ٩ م (Δ أ ب جـ)

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ د جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ})} = \frac{٩}{١٦}$$

(وهو المطلوب)

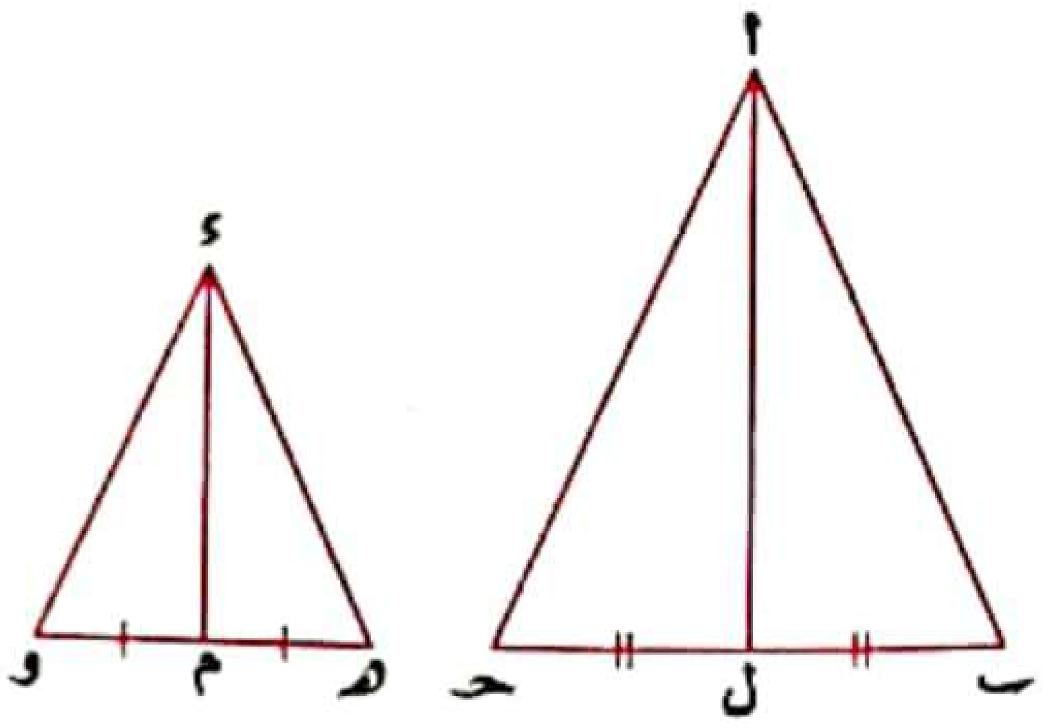
### حاول بنفسك

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر ١٥٠ سم$^{٢}$ احسب مساحة المثلث الأصغر.

## ملاحظـة ٢

**النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما.**

**فى الشكل المقابل :**




إذا كان : $\Delta\,\text{ا ب حـ} \sim \Delta\,\text{ء هـ و}$

، ل منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$

فإن : $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب حـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ و})} = \left(\dfrac{\text{ا ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$

### الإثبـات

$\because \Delta\,\text{ا ب حـ} \sim \Delta\,\text{ء هـ و}$ $\therefore \dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}}$

، $\because$ ب حـ = ٢ ب ل ، هـ و = ٢ هـ م $\therefore \dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \dfrac{\text{٢ ب ل}}{\text{٢ هـ م}}$

$\therefore \dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \dfrac{\text{ب ل}}{\text{هـ م}}$ ، $\because \angle\text{ب} \equiv \angle\text{هـ}$ (لأن $\Delta\,\text{ا ب حـ} \sim \Delta\,\text{ء هـ و}$)

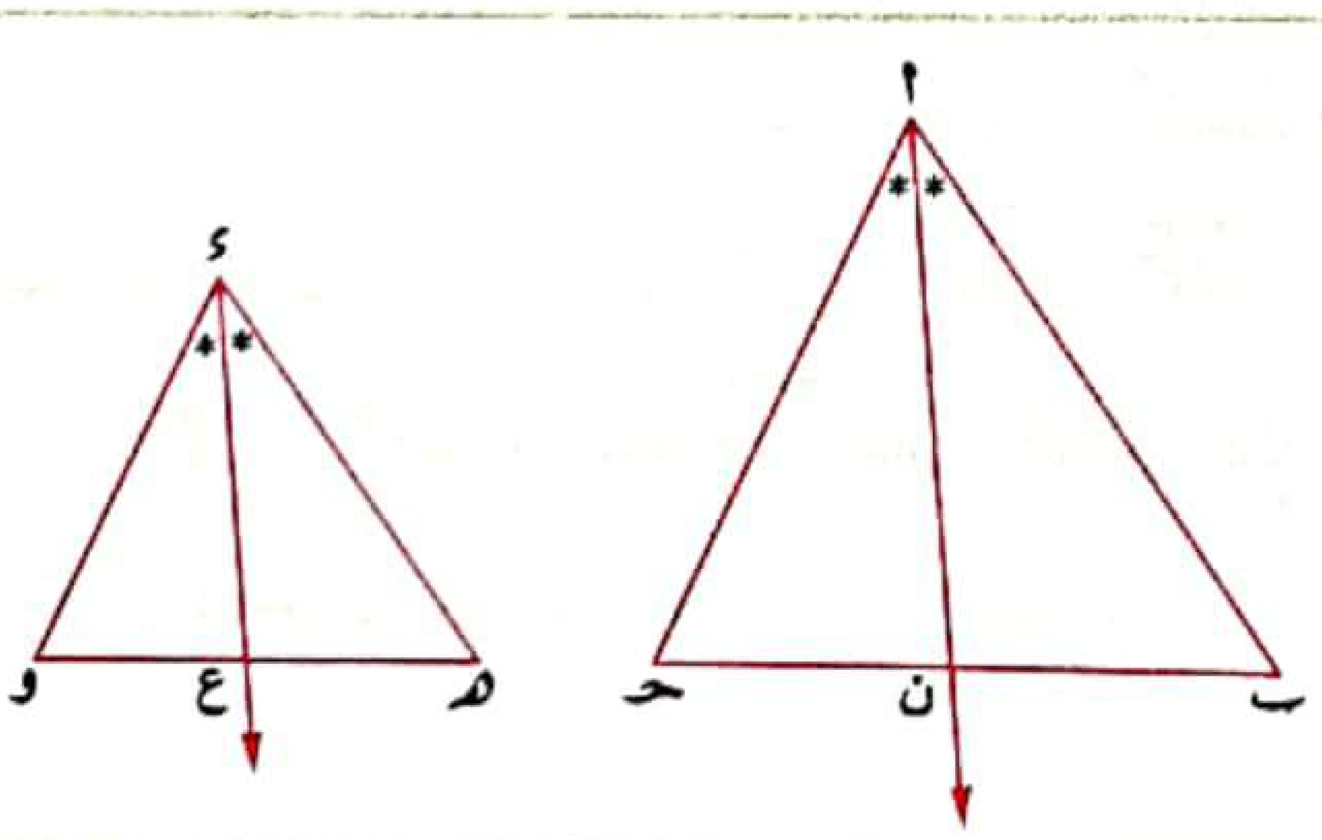
$\therefore \Delta\,\text{ا ب ل} \sim \Delta\,\text{ء هـ م}$ $\therefore \dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب ل})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ م})} = \left(\dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{ا ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$ (١)

، $\because \dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب حـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ و})} = \left(\dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب حـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ و})} = \left(\dfrac{\text{ا ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$

## ملاحظـة ٣

**فى الشكل المقابل :**




إذا كان : $\Delta\,\text{ا ب حـ} \sim \Delta\,\text{ء هـ و}$

، $\overrightarrow{\text{ا ن}}$ ينصف $\angle$ ا ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ن

، $\overrightarrow{\text{ء ع}}$ ينصف $\angle$ ء ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع

فإن : $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب حـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ و})} = \left(\dfrac{\text{ا ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$

### الإثبـات

$\because \Delta\,\text{ا ب حـ} \sim \Delta\,\text{ء هـ و}$ $\therefore \text{ق}(\angle\,\text{ب ا حـ}) = \text{ق}(\angle\,\text{هـ ء و})$

$\therefore \frac{١}{٢}\,\text{ق}(\angle\,\text{ب ا حـ}) = \frac{١}{٢}\,\text{ق}(\angle\,\text{هـ ء و})$ $\therefore \text{ق}(\angle\,\text{ب ا ن}) = \text{ق}(\angle\,\text{هـ ء ع})$

، $\because \text{ق}(\angle\,\text{ب}) = \text{ق}(\angle\,\text{هـ})$ $\therefore \Delta\,\text{ا ب ن} \sim \Delta\,\text{ء هـ ع}$

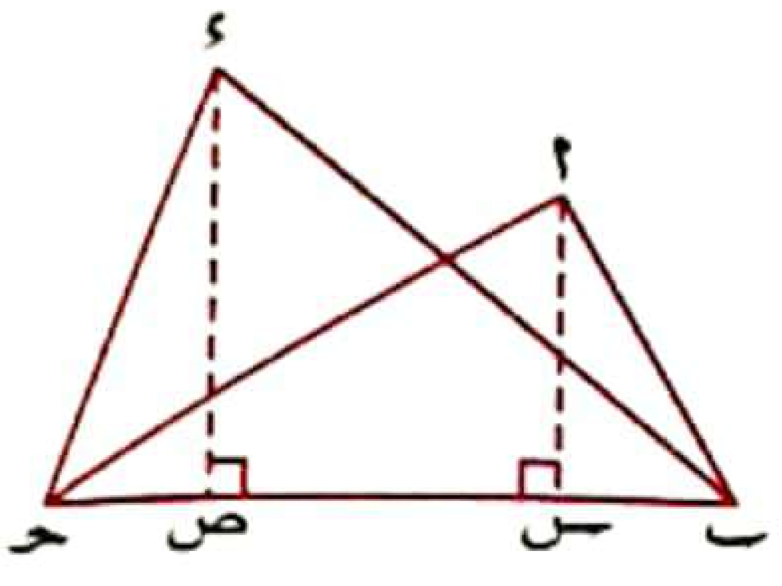
$\therefore \dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{ا ب ن})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ ع})} = \left(\dfrac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\text{ا ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$ (١)

، ∵ م(△ أ ب ج) / م(△ د هـ و) = (أ ب / د هـ)$^2$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م(△ أ ب ج) / م(△ د هـ و) = (أ ن / د ع)$^2$

## ملاحظة ٤

**النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى القاعدة تساوى النسبة بين ارتفاعيهما.**




**فى الشكل المقابل :**

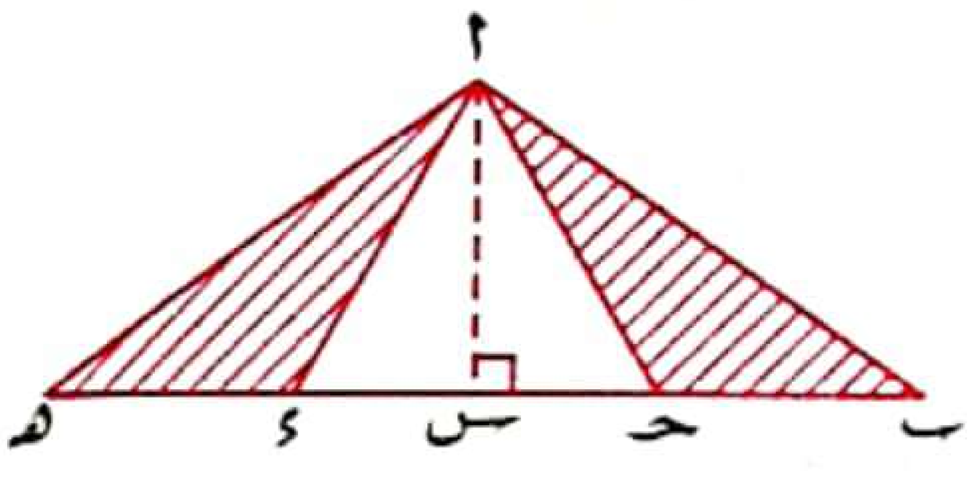
$\overline{\text{ب ج}}$ قاعدة مشتركة بين △ أ ب ج ، △ د ب ج

∴ م(△ أ ب ج) / م(△ د ب ج) = ($\frac{1}{2}$ ب ج × أ س) / ($\frac{1}{2}$ ب ج × د ص) = أ س / د ص

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

## ملاحظة ٥

**النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى الارتفاع تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما.**



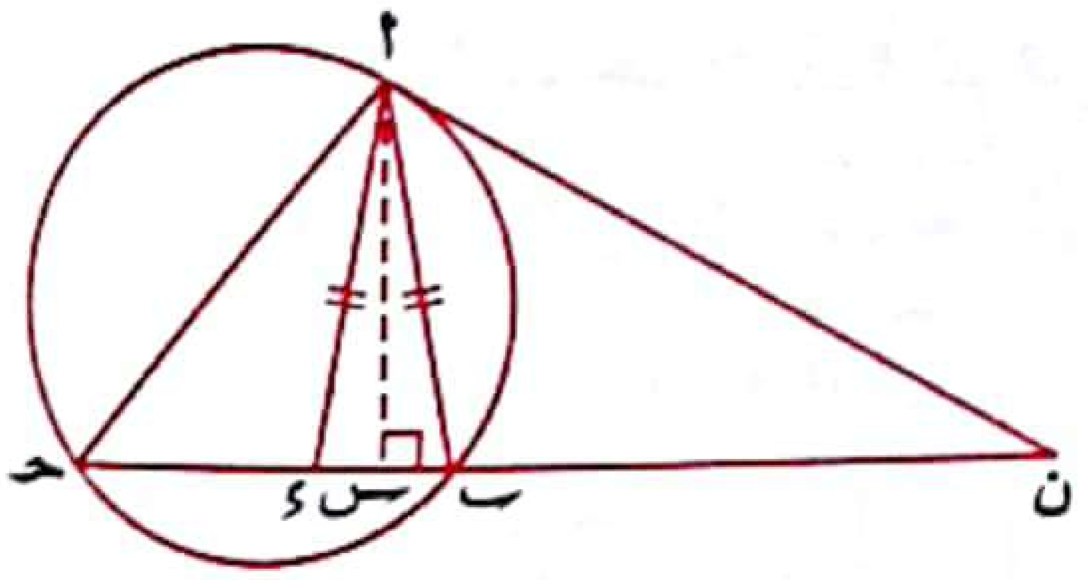

**فى الشكل المقابل :**

أ س ارتفاع مشترك بين △ أ ب ج ، △ أ د هـ

∴ م(△ أ ب ج) / م(△ أ د هـ) = ($\frac{1}{2}$ ب ج × أ س) / ($\frac{1}{2}$ د هـ × أ س) = ب ج / د هـ

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

## مثال ٥




أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث : أ ج > أ ب ، د ∈ $\overline{\text{ب ج}}$

بحيث : أ د = أ ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ يمس الدائرة عند أ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ج ب}}$ فى ن

أثبت أن : ب ن : د ج = (أ ن)$^2$ : (ج أ)$^2$

### الحل

∵ م(△ أ ب ن) / م(△ ج د أ) = ($\frac{1}{2}$ ب ن × أ س) / ($\frac{1}{2}$ د ج × أ س) = ب ن / د ج (١)

، ∵ أ ب = أ د ∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ د ب) ∴ ق(∠ أ ب ن) = ق(∠ أ د ج)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ مماس ∴ ق(∠ ب أ ن) = ق(∠ ج) (مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ △ أ ب ن ~ △ ج د أ ∴ م(△ أ ب ن) / م(△ ج د أ) = (أ ن)$^2$ / (ج أ)$^2$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : ب ن : د ج = (أ ن)$^2$ : (ج أ)$^2$

(وهو المطلوب)

## ثانيًا النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

**حقيقة**

**المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره.**

**ففى الشكل المقابل :**

إذا كان المضلع أ ب جـ ء هـ يشابه المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ

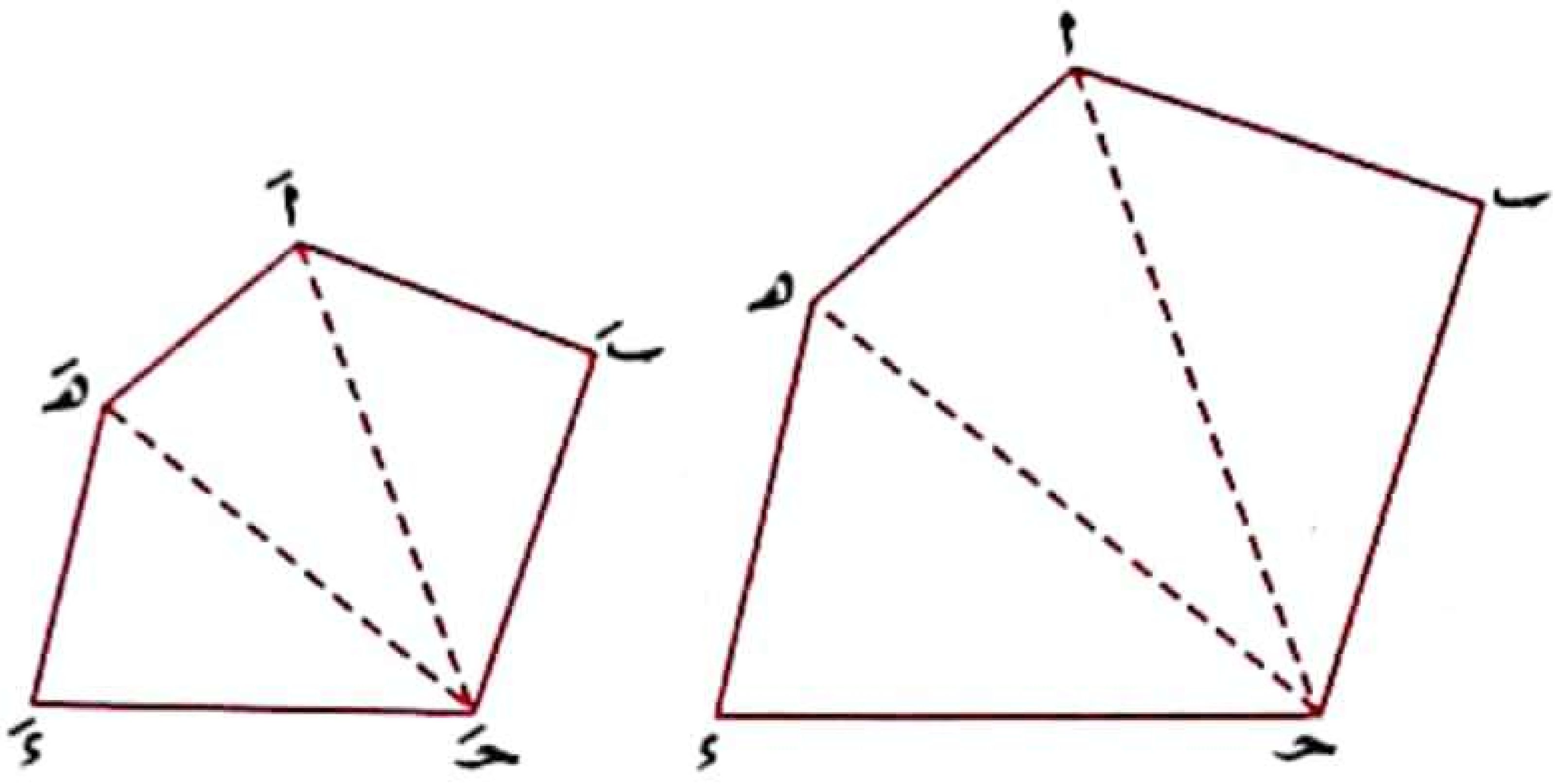
ومن رأسين متناظرين مثل جـ ، جَ

رسمنا $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{جَ أَ}}$ ، $\overline{\text{جَ هَ}}$

فإن كلاً من المضلعين ينقسم إلى ثلاثة مثلثات

ويكون : $\Delta$ أ ب جـ ~ $\Delta$ أَ بَ جَ

، $\Delta$ أ جـ هـ ~ $\Delta$ أَ جَ هَ ، $\Delta$ هـ جـ ء ~ $\Delta$ هَ جَ ءَ

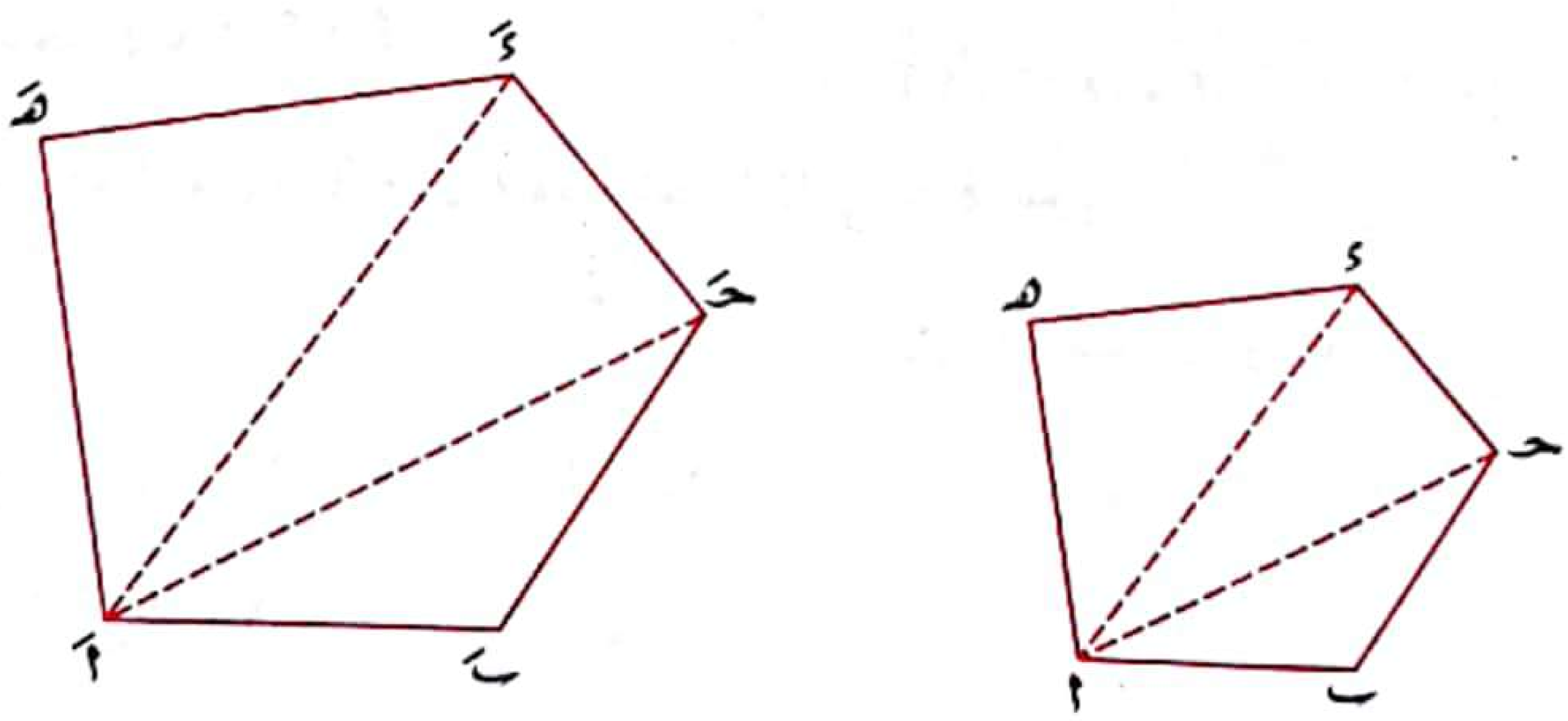



**ملاحظات**

- الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع)
- إذا كان عدد أضلاع مضلع = ن ضلعًا فإن عدد المثلثات التى ينقسم إليها برسم الأقطار المشتركة فى أحد الرءوس = (ن – ٢) مثلثًا.

**نظرية ٤**

**النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.**




**المعطيات** المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ

**المطلوب** إثبات أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^{٢}$

**العمل** من أ ، أَ نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أَ جَ}}$ ، $\overline{\text{أَ ءَ}}$

**البرهان** ∵ المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع أَ بَ جَ دَ هَ

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات ، كل يشابه نظيره (حقيقة) ويكون :

$$\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ بَ جَ})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جَ}}\right)^{2} \text{ ، } \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ جـ د})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ جَ دَ})} = \left(\frac{\text{جـ د}}{\text{جَ دَ}}\right)^{2} \text{ ، } \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ دَ هَ})} = \left(\frac{\text{د هـ}}{\text{دَ هَ}}\right)^{2}$$

، ∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جَ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جَ دَ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{دَ هَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$ (من تشابه المضلعين)

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ بَ جَ})} = \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ جـ د})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ جَ دَ})} = \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ دَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^{2}$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ}) + \text{م}(\Delta\ \text{أ جـ د}) + \text{م}(\Delta\ \text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{أَ بَ جَ}) + \text{م}(\Delta\ \text{أَ جَ دَ}) + \text{م}(\Delta\ \text{أَ دَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^{2}$$

ويكون : $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ب جـ د هـ})}{\text{م}(\text{المضلع أَ بَ جَ دَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^{2}$ (وهو المطلوب)

## مثال ٦

مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٩٥ سم$^{٢}$ أوجد مساحة كل منهما.

### الحل

∵ النسبة بين محيطى المضلعين المتشابهين = ٣ : ٢

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٢

∴ النسبة بين مساحتيهما = ٩ : ٤

وبفرض مساحة المضلع الأول = ٩ س ، ومساحة الثانى = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٩٥ ∴ ١٣ س = ١٩٥ ∴ س = ١٥

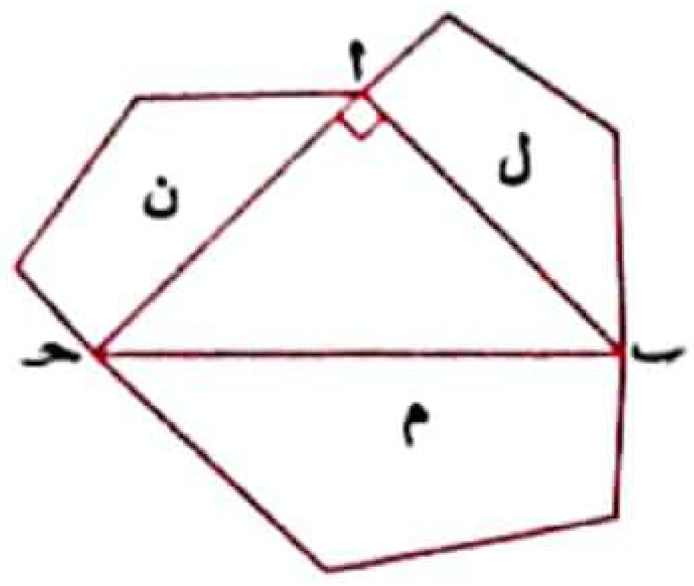
∴ مساحة المضلع الأول = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم$^{٢}$

، مساحة المضلع الثانى = ١٥ × ٤ = ٦٠ سم$^{٢}$ (وهو المطلوب)

## مثال ٧

أثبت أنه إذا أنشئ على أضلاع مثلث قائم الزاوية ثلاثة مضلعات متشابهة بحيث تكون أضلاع المثلث أضلاعًا متناظرة فيها فإن مساحة المضلع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المضلعين المنشأين على ضلعى القائمة.

**الحـــل**




∵ المضلع ل ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{م (المضلع ل)}}{\text{م (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ب ح}}\right)^2 = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{ب ح})^2}$ (١)

، ∵ المضلع ن ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{م (المضلع ن)}}{\text{م (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أح}}{\text{ب ح}}\right)^2 = \frac{(\text{أح})^2}{(\text{ب ح})^2}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{م (المضلع ل)}}{\text{م (المضلع م)}} + \frac{\text{م (المضلع ن)}}{\text{م (المضلع م)}} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{ب ح})^2} + \frac{(\text{أح})^2}{(\text{ب ح})^2}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع ل)} + \text{م (المضلع ن)}}{\text{م (المضلع م)}} = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{أح})^2}{(\text{ب ح})^2} = \frac{(\text{ب ح})^2}{(\text{ب ح})^2}$ (فيثاغورس)

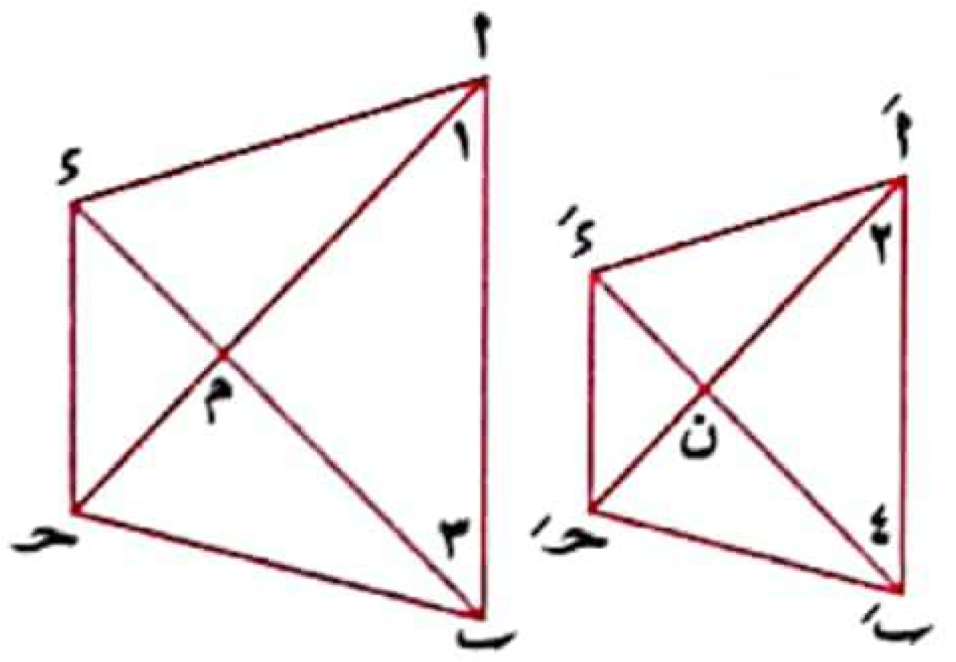
∴ م (المضلع ل) + م (المضلع ن) = م (المضلع م) (وهو المطلوب)

## مثال ٨

أ ب ح ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول فى م وقطرا الثانى فى ن

أثبت أن : $\frac{\text{م (المضلع أ ب ح ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{ب م})^2}{(\text{بَ ن})^2}$

**الحـــل**




∵ المضلعان متشابهان.

∴ △ أ ب ح ~ △ أَ بَ حَ

وينتج أن : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ، △ أ ب ء ~ △ أَ بَ ءَ

وينتج أن : ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ △ أ ب م ~ △ أَ بَ ن ∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{بَ ن}} = \frac{\text{أب}}{\text{أَ بَ}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع أ ب ح ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أَ بَ})^2} = \frac{(\text{ب م})^2}{(\text{بَ ن})^2}$ (وهو المطلوب)

### حاول بنفسك

أ ب ح ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان فإذا كانت : س منتصف $\overline{\text{ب ح}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بَ حَ}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{م (المضلع أ ب ح ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{س ء})^2}{(\text{ص ءَ})^2}$

# على العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين ٧ سم ، ١١ سم فإن النسبة بين محيطيهما ...............

(أ) $\frac{٤٩}{١٢١}$ (ب) $\frac{٧}{١٨}$ (جـ) $\frac{٧}{١١}$ (د) $\frac{١١}{١٨}$

(٢) إذا كان : $\Delta$ أ ب حـ ~ $\Delta$ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{م(\Delta س ص ع)}{م(\Delta أ ب حـ)}$ = ...............

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٩}$

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٩ : ٤٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ...............

(أ) ٣ : ٧ (ب) ٩ : ٤٩ (جـ) ٣ : ١٠ (د) ١٠ : ٣

(٤) إذا كان : $\Delta$ أ ب حـ ~ $\Delta$ ء هـ و ، م($\Delta$ أ ب حـ) = ٩ م($\Delta$ ء هـ و) وكان ء هـ = ٤ سم

فإن : أ ب = ............... سم

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٣٦

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فتكون النسبة بين مساحتيهما ...............

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٩ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ١٦ : ٨١

(٦) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٩ : ٢٥ وكان طول أحد أضلاع المضلع الأصغر ٣ سم فإن طول نظيره فى المضلع الأكبر ............... سم

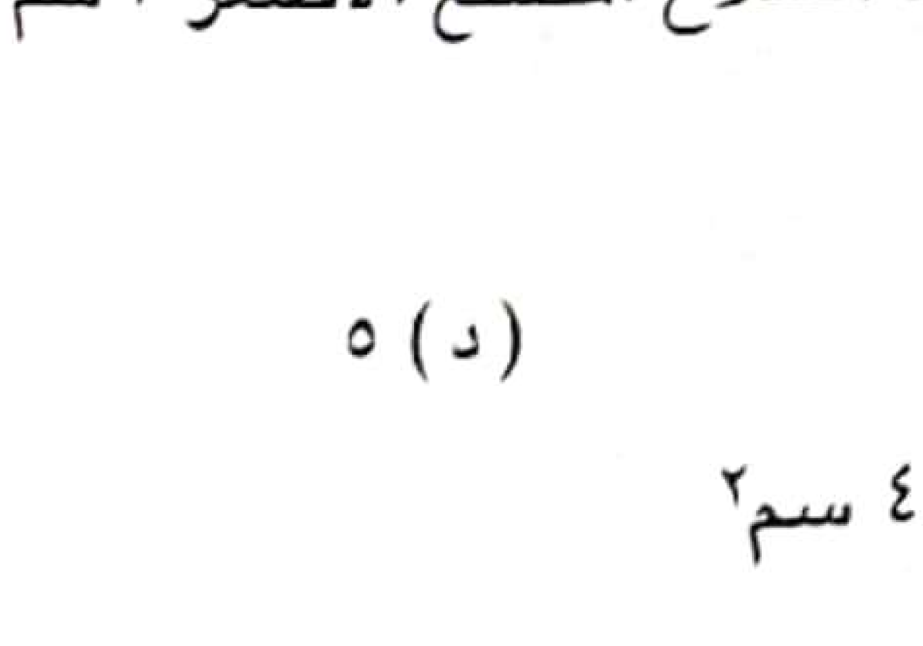
(أ) $\frac{٢٥}{٣}$ (ب) $\frac{٩}{٥}$ (جـ) ٧٥ (د) ٥

(٧) مربعان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم$^{٢}$

فإن مساحة أكبرهما ............... سم$^{٢}$

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

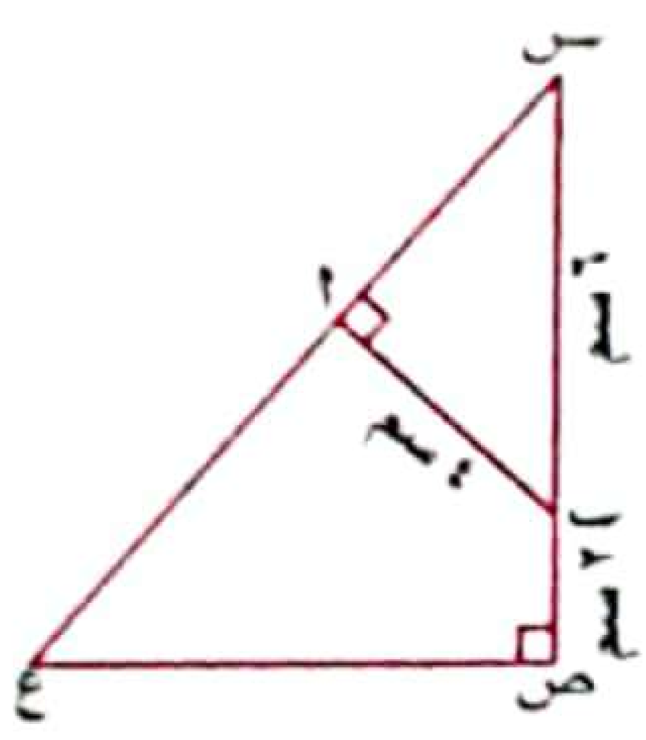
(٨) فى الشكل المقابل :




$\frac{م(\Delta أ ب هـ)}{م(\Delta حـ ء هـ)}$ = ...............

(أ) $\frac{٩}{٤٩}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٦}{٤٩}$

(٩) فى الشكل المقابل :

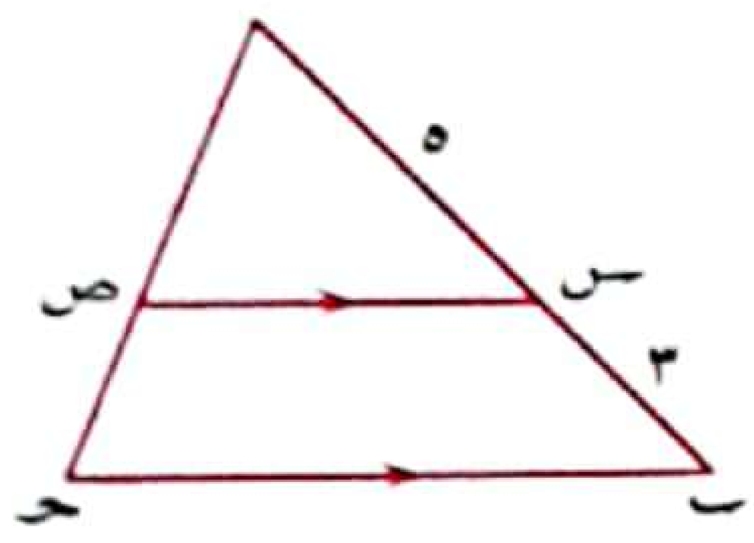


$\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ س أ ب})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ س ص ع})}$ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{١٦}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(١٠) فى الشكل المقابل :



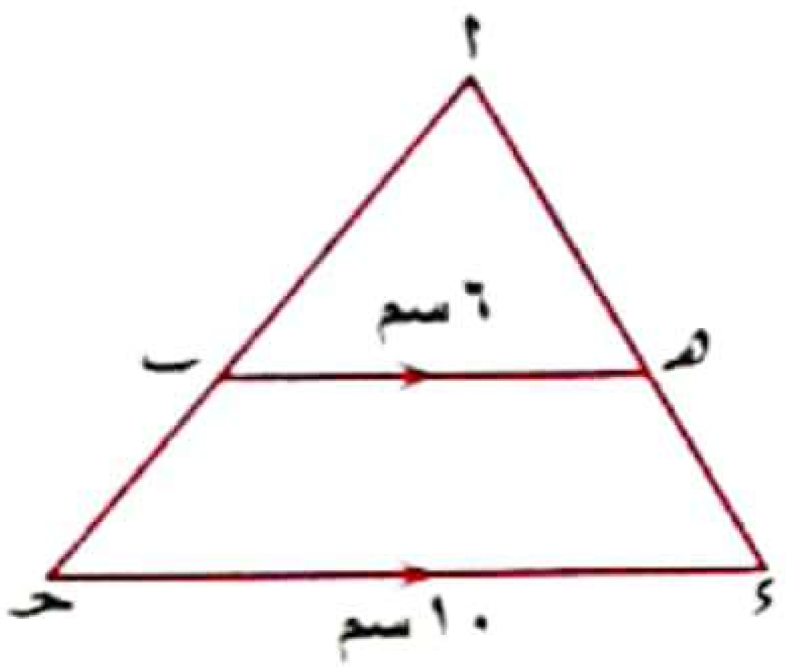
إذا كان أ س : س ب = ٥ : ٣

، م (Δ أ ب جـ) = ٢٥,٦ سم$^2$

فإن : م (Δ أ س ص) = .............. سم$^2$

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٤١ (د) ٦٥,٥

(١١) فى الشكل المقابل :



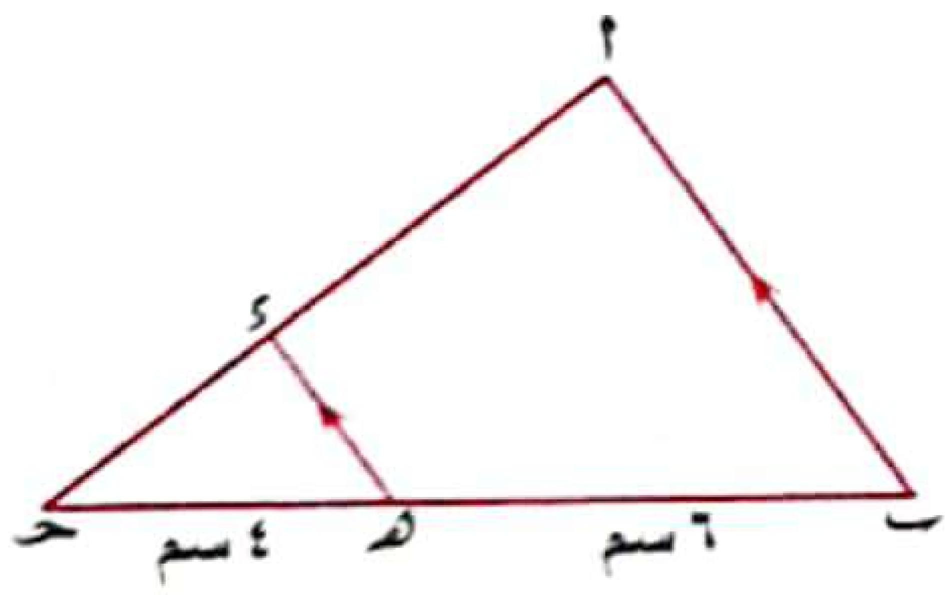
إذا كانت : $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$

فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة شبه المنحرف ب جـ د هـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{٢٥}{٨١}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(١٢) فى الشكل المقابل :

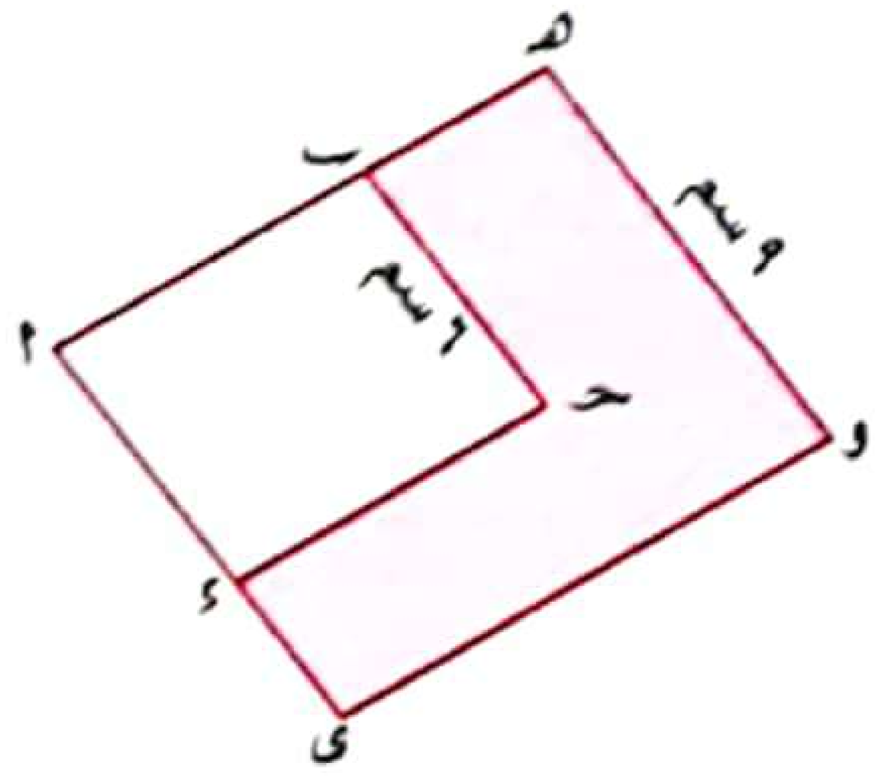


إذا كانت مساحة الشكل أ ب هـ د = ٤٢ سم$^2$

فإن مساحة Δ جـ هـ د = .............. سم$^2$

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(١٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : الشكل أ ب جـ د ~ الشكل أ هـ و ى

وكانت مساحة الشكل أ ب جـ د = ٣٢ سم$^2$

فإن مساحة الجزء المظلل = .............. سم$^2$

(أ) ٧٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٠ (د) ١٦

---

**٢** إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع أَ بَ جَ دَ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{١}{٢}$

فاكتب ما يساويه كل من : $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ د)}}{\text{م (المضلع أَ بَ جَ دَ)}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جَ دَ}}$

**٣** إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم² فأوجد مساحة المضلع الأكبر. «٢٤٠ سم²»

---

**٤** مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأول ١٦ سم² فما مساحة المثلث الثانى ؟ «١٠٠ سم²»

---

**٥** مضلعان متشابهان مساحتاهما ١٠٠ سم² ، ٦٤ سم² ، فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم فأوجد محيط الثانى. «٤٨ سم»

---

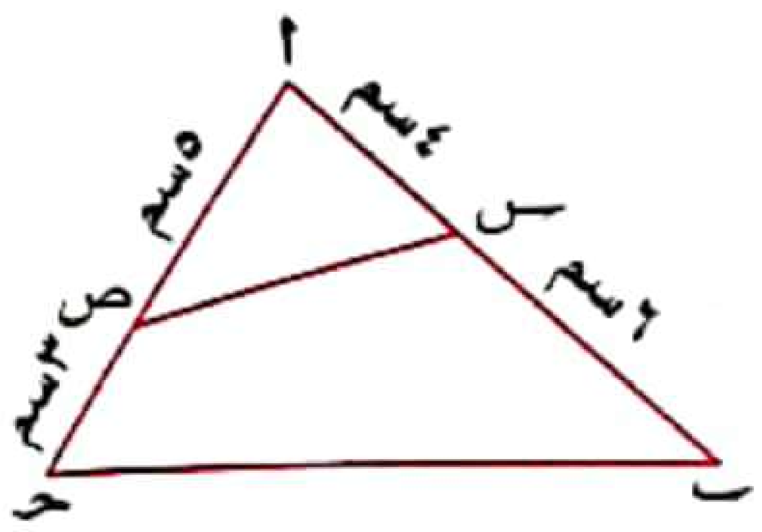
**٦** مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم² أوجد مساحة كل منهما. «٩٠ سم² ، ٤٠ سم²»

---

**٧** مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم² فأوجد مساحة كل منهما. «٤ سم² ، ٣٦ سم²»

---

**٨** فى الشكل المقابل :



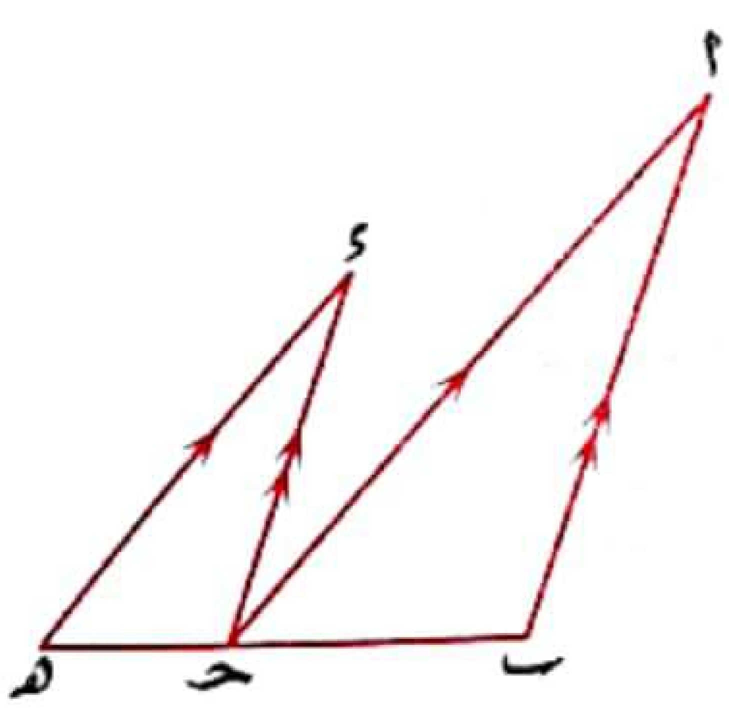

ا ب حـ مثلث فيه : ا س = ٤ سم ، س ب = ٦ سم

، ا ص = ٥ سم ، ص حـ = ٣ سم

أوجد : $\frac{\text{م}(\triangle \text{ ا س ص})}{\text{م}(\triangle \text{ ا حـ ب})}$ «$\frac{1}{4}$»

---

**٩** فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$

، $\overline{\text{ا حـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ ، ا ب = $\frac{3}{2}$ ء حـ

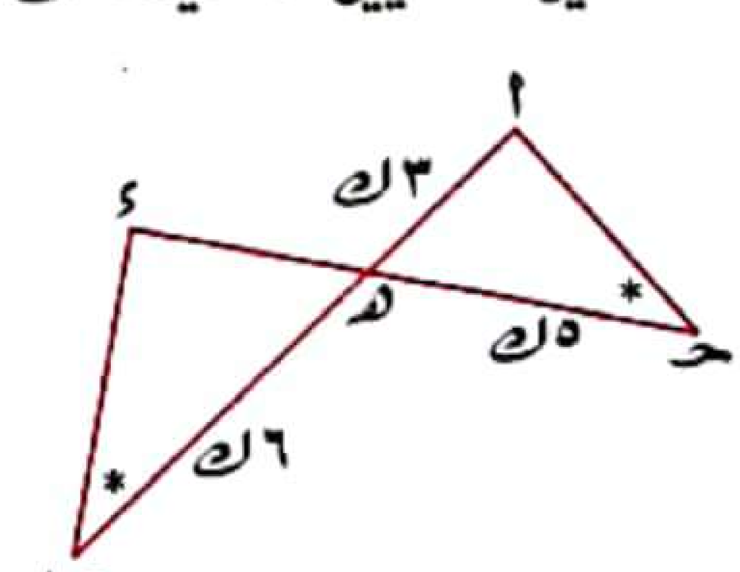
، مساحة $\triangle$ ء حـ هـ = ١٦ سم²

أوجد : مساحة $\triangle$ ا ب حـ «٣٦ سم²»

---

**١٠** ادرس كلًا من الشكلين التاليين ، حيث ك ثابت تناسب ، ثم أوجد المطلوب تحت كل شكل :

(١)

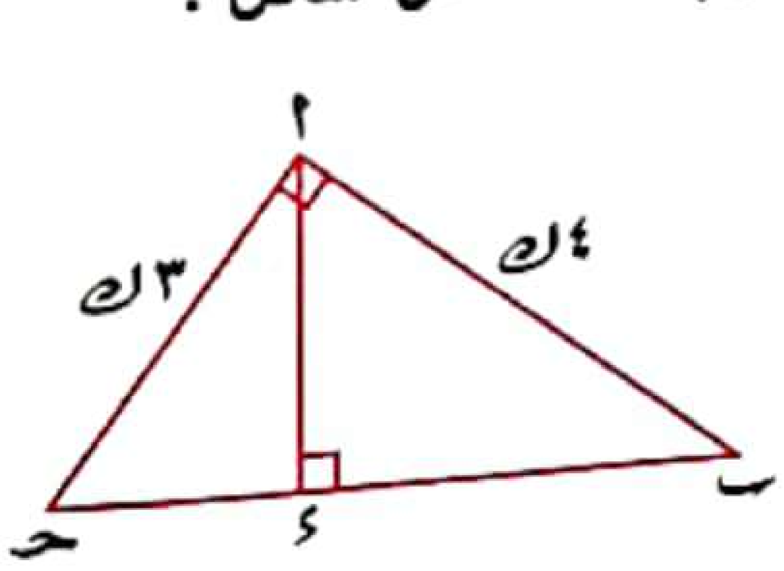



$\overrightarrow{\text{ا ب}} \cap \overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ}

، م ($\triangle$ ا حـ هـ) = ٩٠٠ سم²

أوجد : م ($\triangle$ ء هـ ب)

(٢)




ق (∠ ب ا حـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، م ($\triangle$ ا ء حـ) = ١٨٠ سم²

أوجد : م ($\triangle$ ا ب حـ)

**١١** ا ب ح مثلث ، ء ∈ $\overline{اب}$ حيث اء = ٢ ب ء ، هـ ∈ $\overline{اح}$ حيث ءهـ // $\overline{بح}$

إذا كانت مساحة Δ اءهـ = ٦٠ سم$^2$ أوجد : مساحة شبه المنحرف ءبحهـ

« ٧٥ سم$^2$ »

**١٢** ا ب ح مثلث فيه : اب = ٨ سم ، اح = ٦ سم ، ء ∈ $\overline{اب}$ حيث اء = ٣ سم

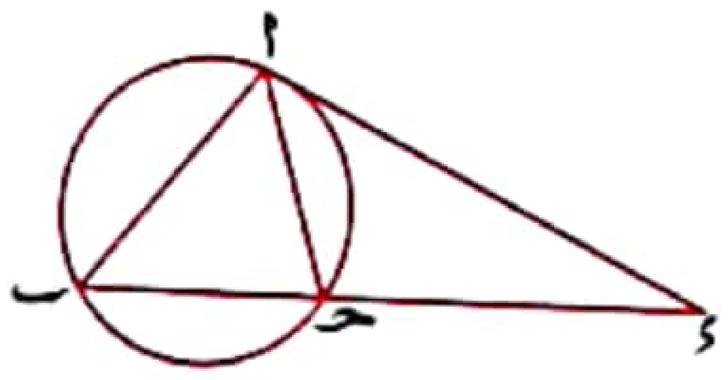
، هـ ∈ $\overline{اح}$ حيث هـ ح = ٢ سم أوجد : $\frac{م (Δ اءهـ)}{م (الشكل ءبحهـ)}$

« $\frac{1}{3}$ »

**١٣** ا ب ح ء ، اَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول في س وقطرا الثاني في ص

أثبت أن : $\frac{م (المضلع ا ب ح ء)}{م (المضلع اَ بَ حَ ءَ)} = \frac{(ب س)^2}{(بَ ص)^2}$

**١٤** في الشكل المقابل :

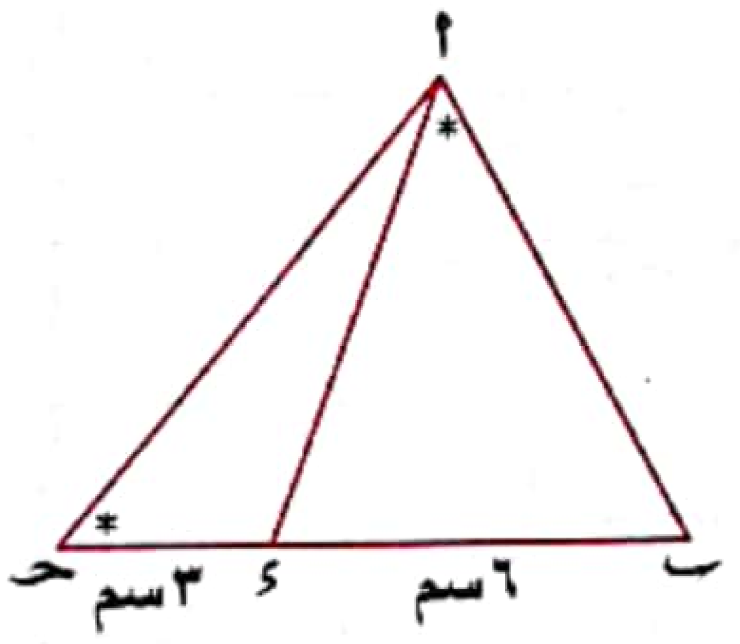



$\overline{اء}$ قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ ا ب ح ، ٢ اب = ٣ اح

أوجد : $\frac{م (Δ ا ح ء)}{م (Δ ا ح ب)}$

« $\frac{4}{5}$ »

**١٥** في الشكل المقابل :




ا ب ح مثلث فيه : ب ح = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{بح}$ بحيث

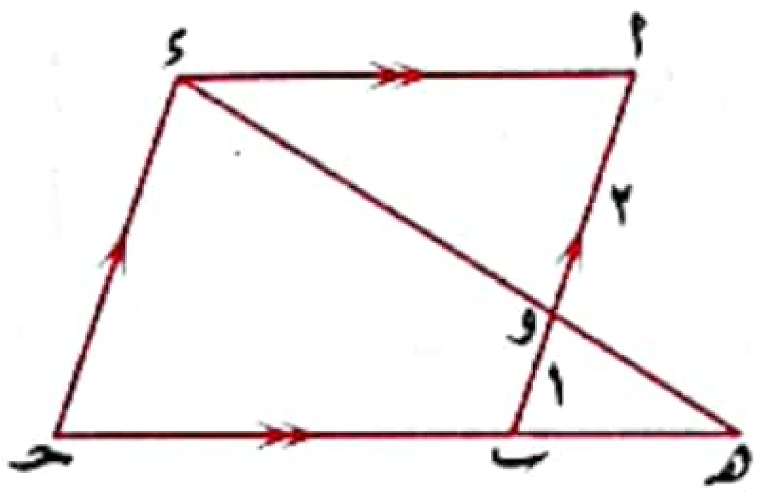
ب ء = ٦ سم فإذا كان ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ ح)

فأثبت أن : Δ ا ب ح ∼ Δ ء ب ا واحسب : طول $\overline{اب}$

ثم أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين : ا ب ح ، ء ب ا

« ٣ $\sqrt{6}$ سم ، ٣ : ٢ »

**١٦** في الشكل المقابل :



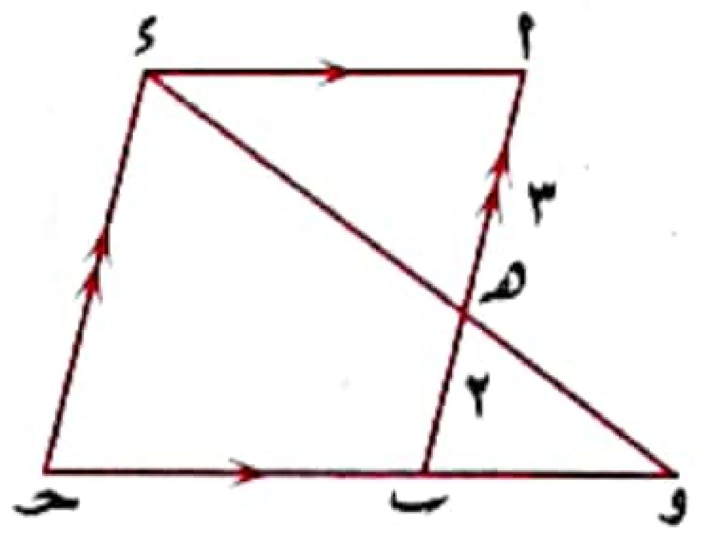

ا ب ح ء متوازي أضلاع ، $\frac{ب و}{ا و} = \frac{1}{2}$

، م (Δ ب هـ و) = ٩ سم$^2$

أوجد : مساحة متوازي الأضلاع ا ب ح ء

« ١٠٨ سم$^2$ »

**١٧** في الشكل المقابل :




ا ب ح ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overline{اب}$

حيث $\frac{اهـ}{هـ ب} = \frac{3}{2}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ} \cap \overleftrightarrow{حب} = \{و\}$

(١) أثبت أن : Δ ء ح و ∼ Δ هـ ا ء

(٢) أوجد : $\frac{م (Δ ء ح و)}{م (Δ هـ ا ء)}$

« $\frac{25}{9}$ »

**١٨** 📖 أ ب جـ د متوازى أضلاع ، س ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، س ∉ $\overline{أب}$ حيث ب س = ٢ أ ب ، ص ∈ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ، ص ∉ $\overline{جـ ب}$ حيث ب ص = ٢ ب جـ ، رسم متوازى الأضلاع ب س ع ص

أثبت أن : م (متوازى الأضلاع أ ب جـ د) / م (متوازى الأضلاع س ب ص ع) = ١/٤

---

**١٩** 📖 أ ب جـ د ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ن منتصف $\overline{ص ع}$

فأثبت أن : م (المضلع أ ب جـ د) : م (المضلع س ص ع ل) = (م د)$^2$ : (ن ل)$^2$

---

**٢٠** $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران غير متقاطعين فى دائرة م ، فإذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جـ د}$ = {هـ} ، أ جـ = ٣ ب د

فأوجد : م (△ هـ ب د) / م (△ هـ جـ أ) « ١/٩ »

---

**٢١** م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، رسم قاطعان يمران بالنقطة أ يقطعان الدائرة م فى ب ، د ويقطعان الدائرة ن فى جـ ، هـ أثبت أن : م (△ أ ب د) / م (△ أ جـ هـ) = (ب د)$^2$ / (جـ هـ)$^2$

---

**٢٢** أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى د ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : م (△ أ ب هـ) : م (△ أ د جـ) : م (△ ب د هـ) = (هـ ب)$^2$ : (جـ د)$^2$ : (هـ د)$^2$

---

**٢٣** إذا كان : △ أ ب جـ ~ △ س ص ع ، $\overline{أد}$ ، $\overline{س ل}$ ارتفاعين متناظرين فيهما

فأثبت أن : ب جـ × س ل = أ د × ص ع

---

**٢٤** برهن على أن النسبة بين مساحتى المثلثين المتشابهين تساوى مربع النسبة بين :

(١) ارتفاعين متناظرين فيهما. (٢) طولى متوسطين متناظرين فيهما.

---

**٢٥** 📖 أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع أثبت أن : م (△ أ ب س) + م (△ ب جـ ص) = م (△ أ جـ ع)

---

**٢٦** 📖 أ ب جـ مثلث فيه : أ ب / ب جـ = ٤/٣ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{أجـ}$ فى هـ أثبت أن : م (△ أ ب جـ) / م (△ أ ب هـ) = ٧/١٦

---

**٢٧** أ ب جـ د شبه منحرف فيه : $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{أد}$ ، ويقطع $\overline{أب}$ فى س ، $\overline{جـ د}$ فى ص وبحيث ينقسم شبه المنحرف إلى المضلعين المتشابهين أ س ص د ، س ب جـ ص

أثبت أن : م (المضلع أ س ص د) / م (المضلع س ب جـ ص) = م (△ أ ب د) / م (△ ب د جـ)

**٢٨** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ء ⊥ ب حـ يقطعه فى ء ، رسم المثلثان المتساويا الأضلاع أ ب هـ ، حـ أ و خارج المثلث أ ب حـ

**أثبت أن :** (١) المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع حـ ء أ و

(٢) م (المضلع أ ء ب هـ) / م (المضلع حـ ء أ و) = ب ء / حـ ء

---

**٢٩** 📖 أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ب ء ⊥ أ حـ يقطعه فى ء ، رُسم على أ ب ، ب حـ المربعان أ س ص ب ، ب م ن حـ خارج المثلث أ ب حـ

(١) **أثبت أن :** المضلع ء أ س ص ب ~ المضلع ء ب م ن حـ

(٢) إذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ١٠ سم

**أوجد :** النسبة بين مساحتى سطحى المضلعين. « $\frac{٩}{١٦}$ »

---

**٣٠** 📖 أ ب حـ مثلث فيه أ ب ، ب حـ ، أ حـ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهى المضلعات س ، ص ، ع على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع س = ٤٠ سم$^{٢}$ ، ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم$^{٢}$ ، ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم$^{٢}$ أثبت أن المثلث أ ب حـ قائم الزاوية.

---

**٣١** أ ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ ب ء ، رسم هـ و // ء أ ويقطع أ ب فى و ، رسم هـ م // ء حـ ويقطع ب حـ فى م

**أثبت أن :** م (المضلع ب م هـ و) : م (المضلع ب حـ ء أ) = (ب و × ب م) / (ب أ × ب حـ)

---

**٣٢** 📖 أ ب حـ ء مربع ، قسمت أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ بالنقاط س ، ص ، ع ، ل على الترتيب بنسبة ١ : ٣

**أثبت أن :** (١) الشكل س ص ع ل مربع.

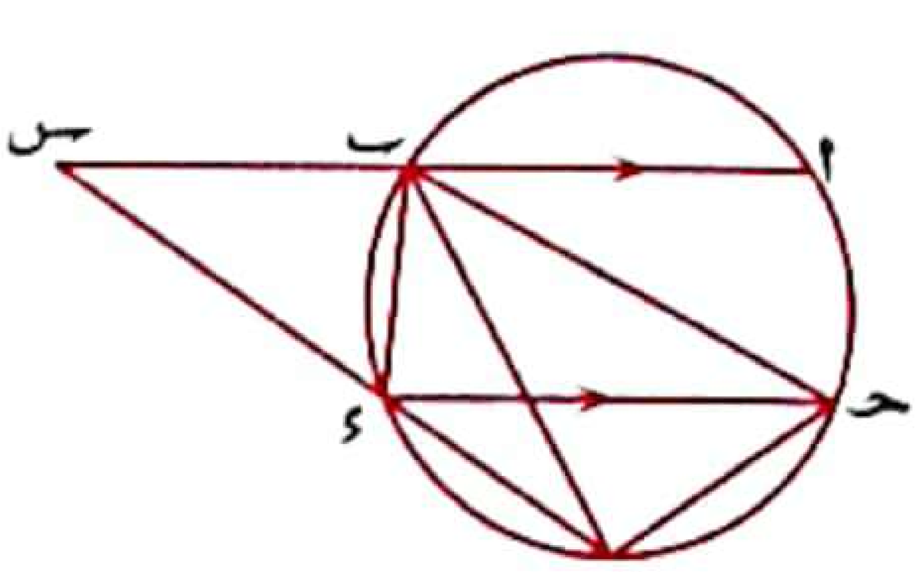
(٢) م (المربع س ص ع ل) / م (المربع أ ب حـ ء) = $\frac{٥}{٨}$

---

**٣٣** في الشكل المقابل :

أ ب ، حـ ء وتران متوازيان فى دائرة ، أ ب ∩ ص ء = {س}

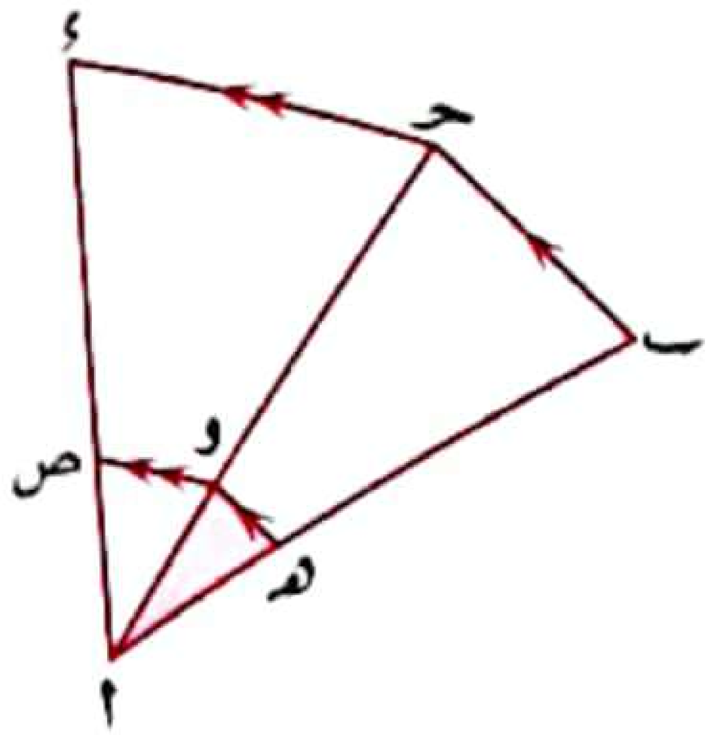
**أثبت أن :** م (△ ء ب س) / م (△ حـ ص ب) = (س ب)$^{٢}$ / (ب ص)$^{٢}$



## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٣٤** **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

**(١) فى الشكل المقابل :**




إذا كانت مساحة (الشكل ء ص و حـ) = ٤٠ سم$^{٢}$

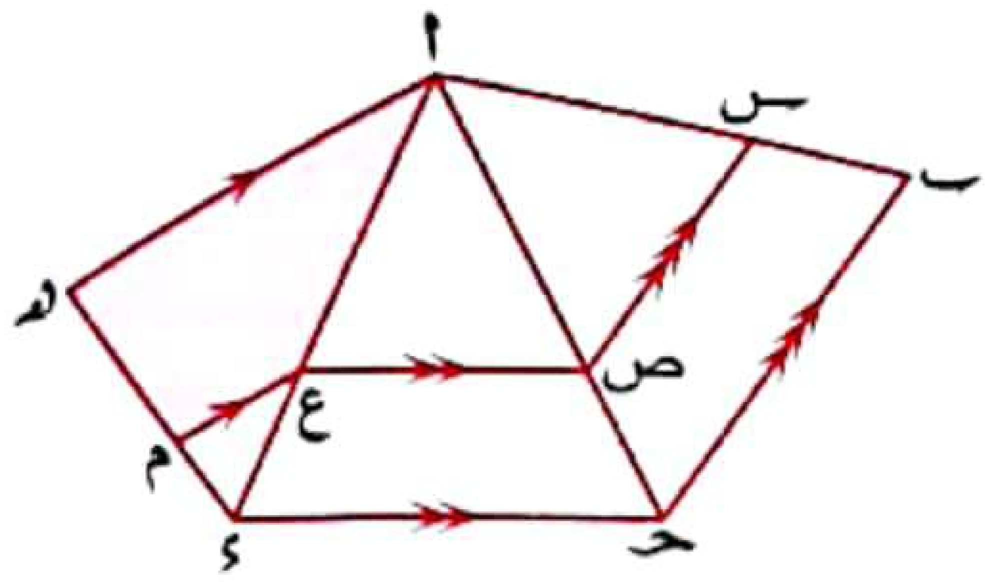
، مساحة (الشكل و هـ ب حـ) = ٣٢ سم$^{٢}$

، مساحة ($\Delta$ أ و ص) = ٥ سم$^{٢}$

فإن مساحة ($\Delta$ أ هـ و) = ............ سم$^{٢}$

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

**(٢) فى الشكل المقابل :**



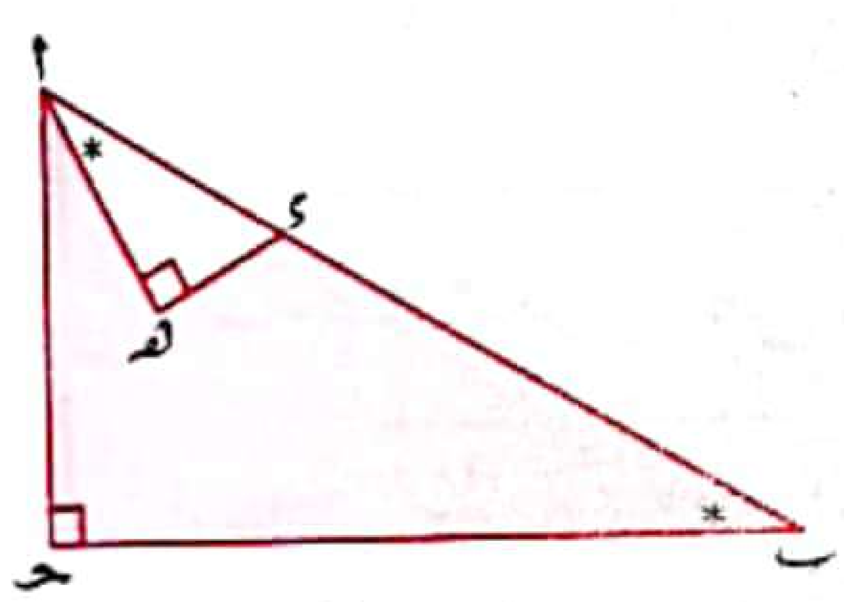

إذا كانت مساحة ($\Delta$ أ س ص) = ٤٠ سم$^{٢}$

، مساحة ($\Delta$ ء ع م) = ١٣ سم$^{٢}$

، مساحة (الشكل س ب حـ ص) = ٥٠ سم$^{٢}$ فإن مساحة الجزء المظلل = ............ سم$^{٢}$

(أ) ٧٧ (ب) ٩٢ (جـ) ١٠٤ (د) ١١٢

**(٣) فى الشكل المقابل :**

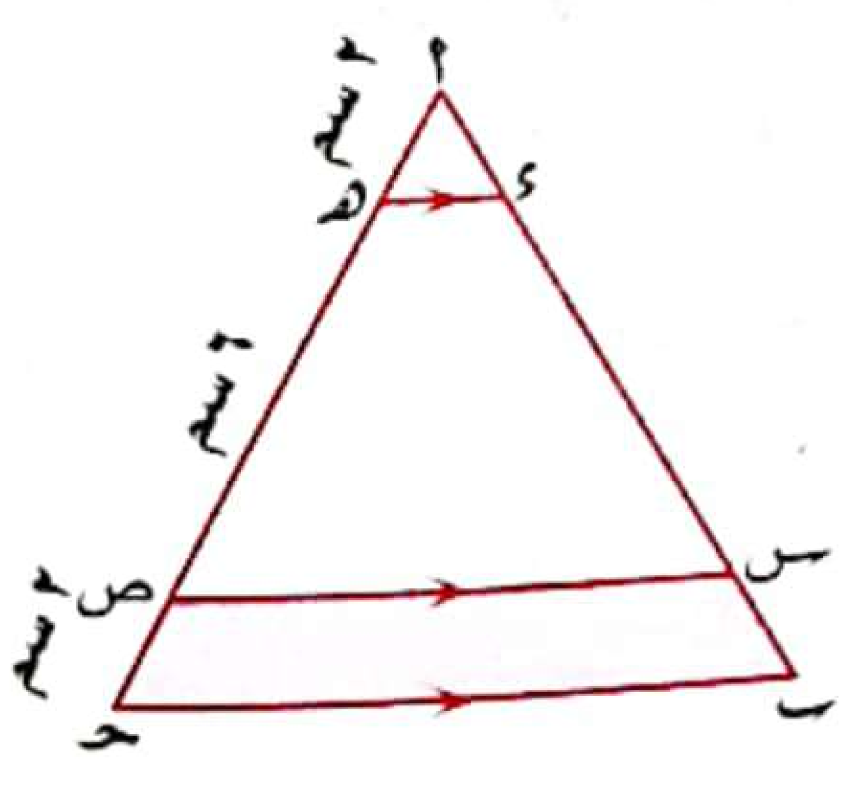



إذا كان : أ ب = ٣ أ ء وكانت مساحة $\Delta$ أ ء هـ = ٦ سم$^{٢}$

فإن مساحة الجزء المظلل = ............ سم$^{٢}$

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

**(٤) فى الشكل المقابل :**



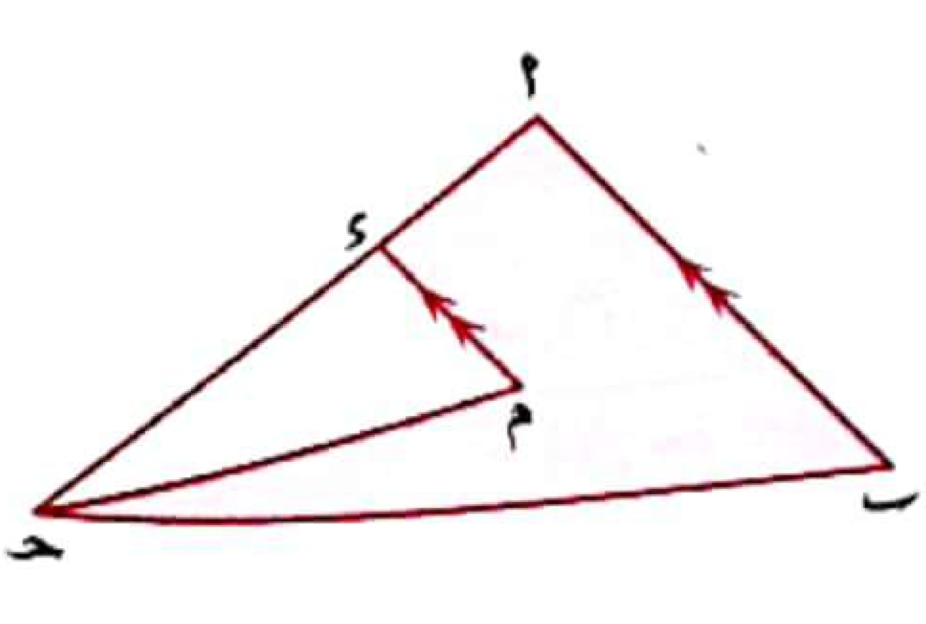

إذا كانت مساحة الشكل ء س ص هـ = ٣٠ سم$^{٢}$

فإن مساحة الشكل س ب حـ ص = ............ سم$^{٢}$

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

**(٥) فى الشكل المقابل :**



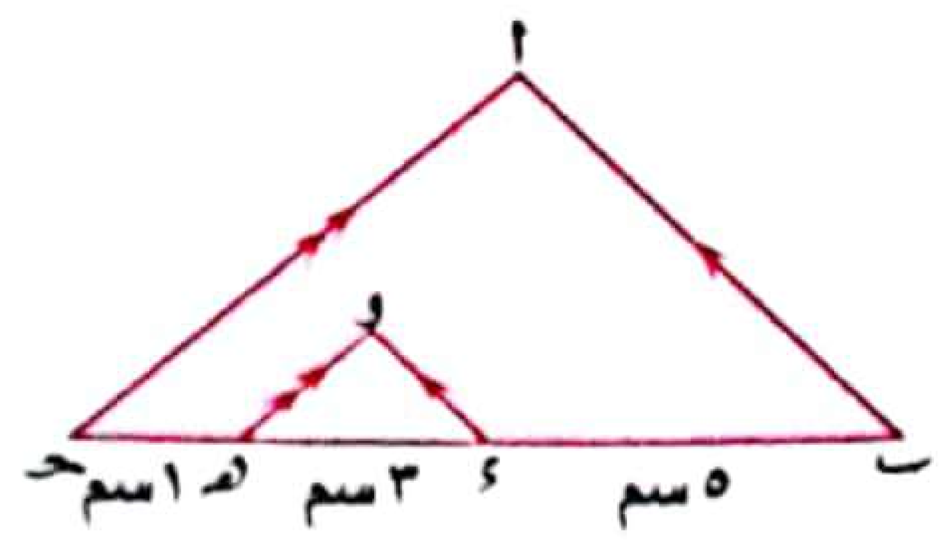

إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات $\Delta$ أ ب حـ ، $\overline{مء}$ // $\overline{أب}$

وكانت مساحة $\Delta$ أ ب حـ = ٣٦ سم$^{٢}$

فإن مساحة الجزء المظلل = ............ سم$^{٢}$

(أ) ٢٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

(٦) في الشكل المقابل :




إذا كانت مساحة Δ ء هـ و = ٦ سم$^{٢}$

فإن مساحة المنطقة المظللة = .............. سم$^{٢}$

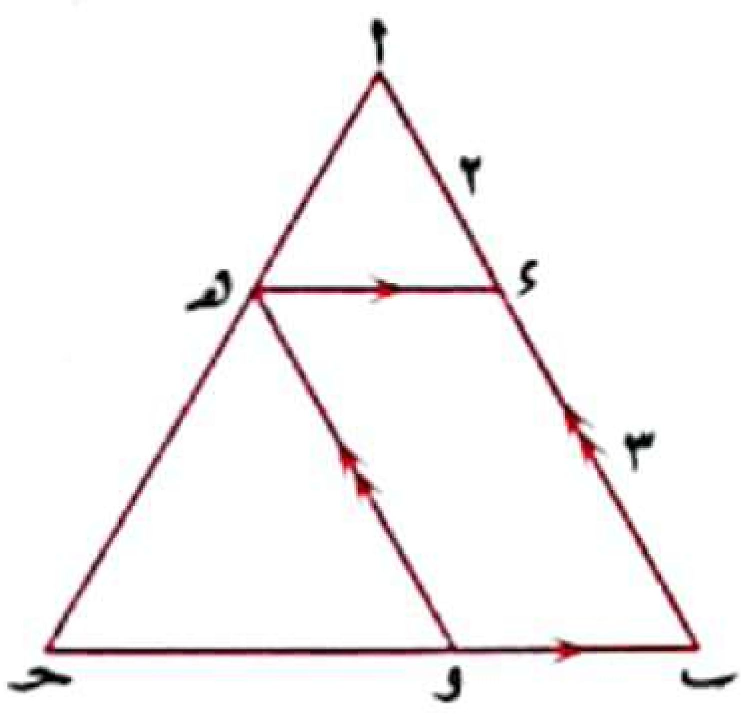
(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٥٤

(٧) إذا كان Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و وكان أ ب = س سم ، ء هـ = (س + ١) سم ،

مساحة Δ أ ب حـ = (س + ٢) سم$^{٢}$ ، ومساحة Δ ء هـ و = (س + ٧) سم$^{٢}$ فإن قيمة س = ..............

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) في الشكل المقابل :



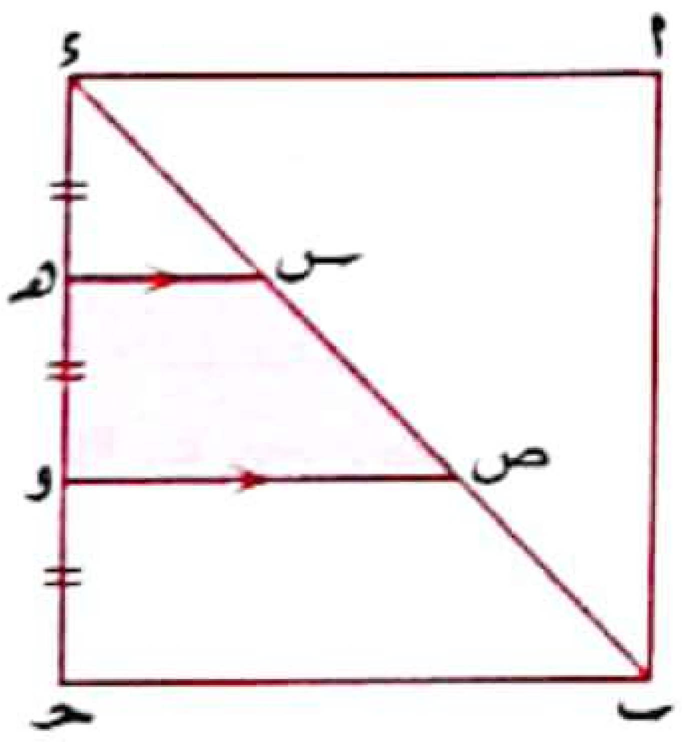

إذا كانت : ء هـ // ب حـ ، هـ و // أ ب ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : $\frac{\text{مساحة (▱ ء ب و هـ)}}{\text{مساحة (Δ أ ب حـ)}}$ = ..............

(أ) $\frac{٢١}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١٢}{٢٥}$ (د) $\frac{١٣}{٢٥}$

(٩) في الشكل المقابل :



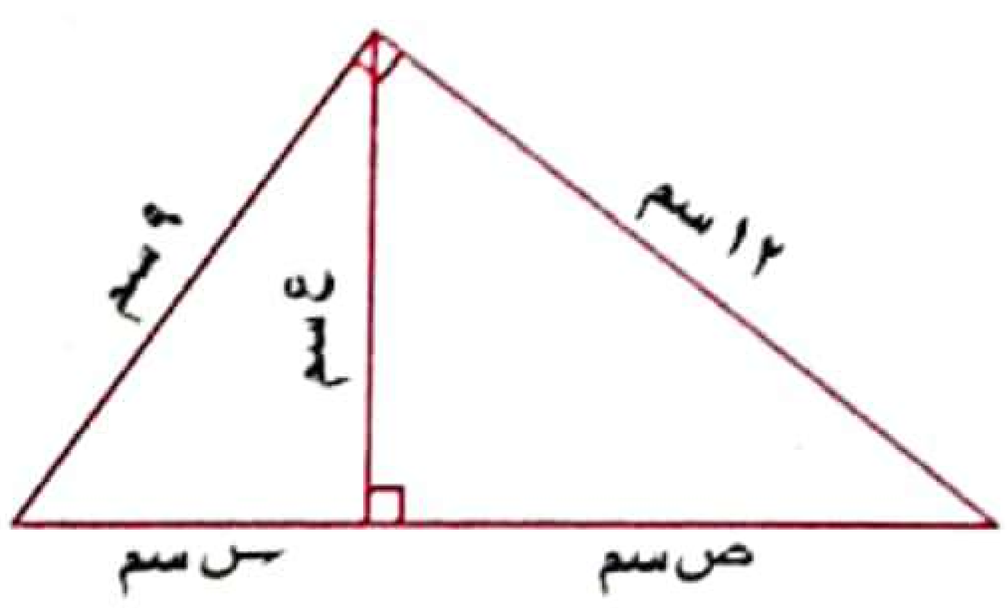

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، ء هـ = هـ و = و حـ

فإن : مساحة (الشكل س ص و هـ) = .............. سم$^{٢}$

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

(١٠) في الشكل المقابل :

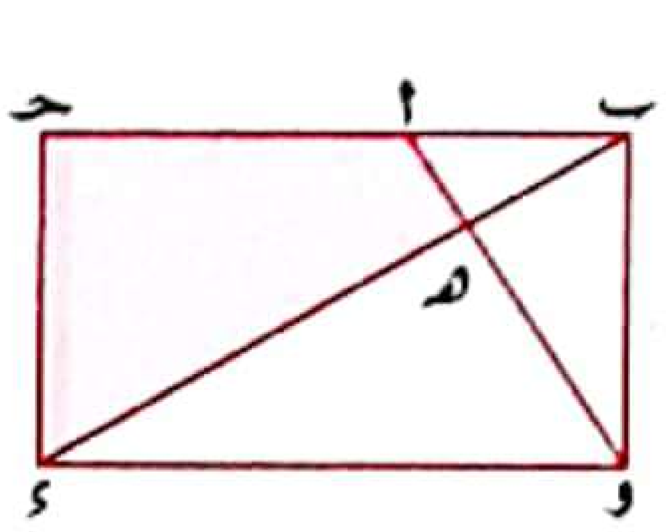



س + ص + ع = ..............

(أ) ١٥ (ب) ١٨,٢

(جـ) ٢٢ (د) ٢٢,٢

(١١) في الشكل المقابل :




ب حـ ء و مستطيل ، مساحة (Δ أ ب هـ) = ٢ سم$^{٢}$

، مساحة (Δ ب هـ و) = ٣ سم$^{٢}$

فإن مساحة الجزء المظلل = .............. سم$^{٢}$

(أ) ٥ (ب) $٥\frac{١}{٢}$ (جـ) ٦ (د) $٧\frac{١}{٢}$

(١٢) إذا كان معامل تشـابه المضلع م$_1$ للمضلع م$_2$ هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشـابه المضلع م$_3$ للمضلع م$_2$ هو $\frac{١}{٣}$ فأى من العلاقات الآتية تكون صحيحة ؟

( أ ) مساحة (م$_1$) + مساحة (م$_2$) = مساحة (م$_3$)

(ب) مساحة (م$_1$) + مساحة (م$_3$) = مساحة (م$_2$)

(جـ) √مساحة (م$_1$) + √مساحة (م$_2$) = √مساحة (م$_3$)

( د ) √مساحة (م$_1$) + √مساحة (م$_3$) = √مساحة (م$_2$)

---

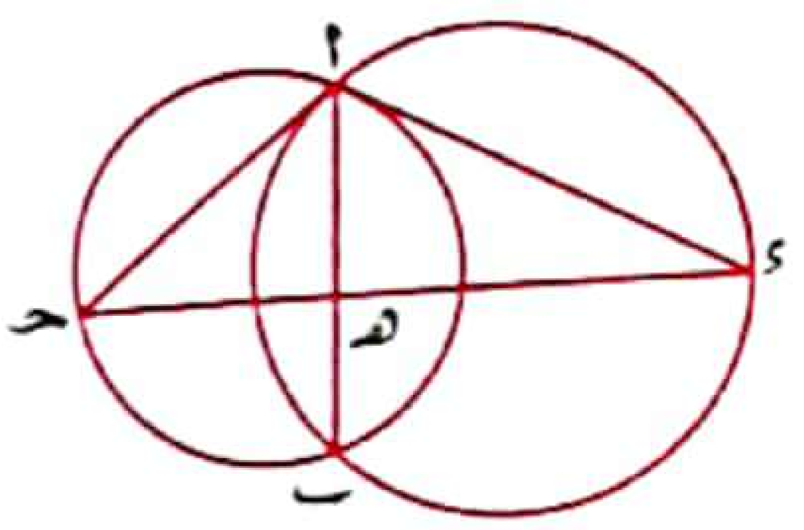
**٣٥** أب قطر فى دائرة ، جـ نقطة تنتمى للدائرة ، س ∈ أب بحيث أس = ب جـ

، رسم س ص // ب جـ ويقطع أجـ فى ص

**أثبت أن :** مـ (△ أ ب جـ) : مـ (المضلع س ب جـ ص) = (أب)$^2$ : (أجـ)$^2$

---

**٣٦** **فى الشكل المقابل :**



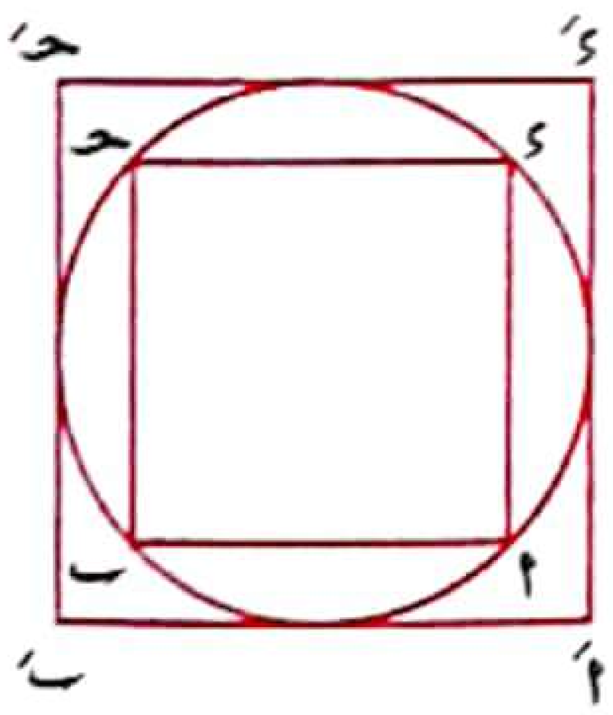

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، أجـ وتر فى إحدى الدائرتين

يمس الأخرى عند أ ، أء وتر فى الدائرة الثانية يمس الأولى

عند أ فإذا كان أب ∩ جـ ء = {هـ} فأثبت أن : $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{(\text{أجـ})^2}{(\text{أء})^2}$

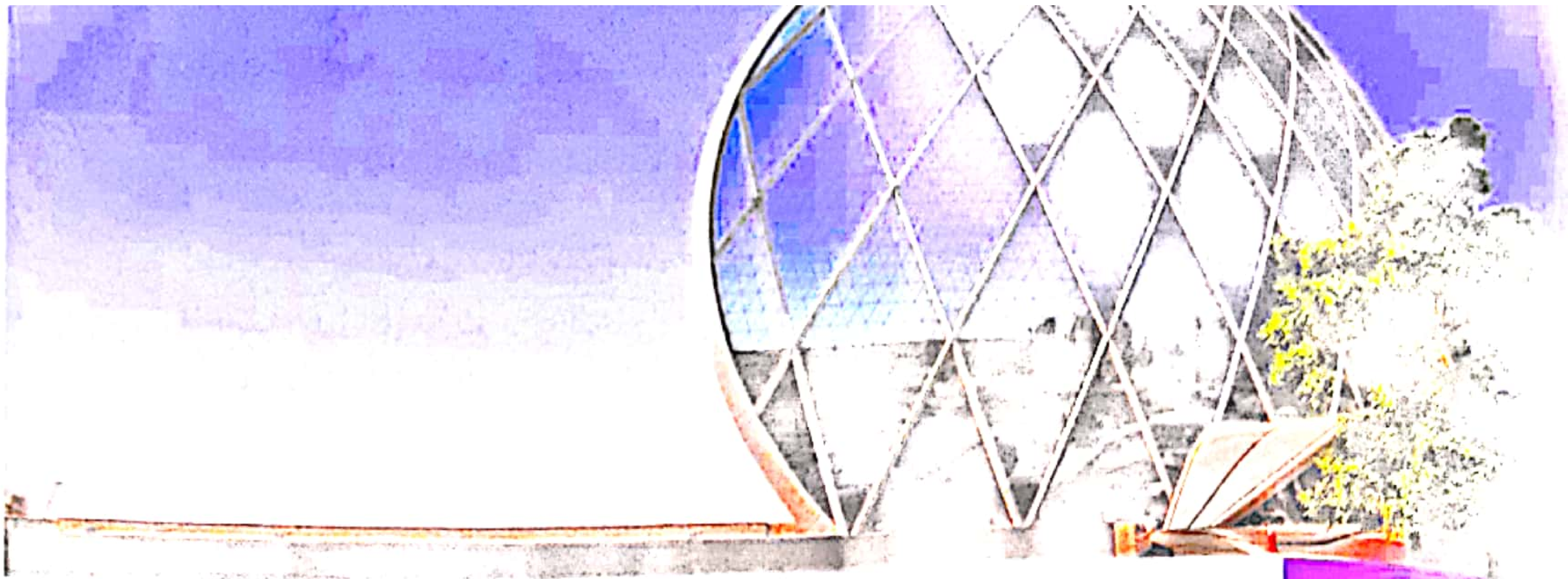
---

**٣٧** **فى الشكل المقابل :**




مربعان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم خارجها.

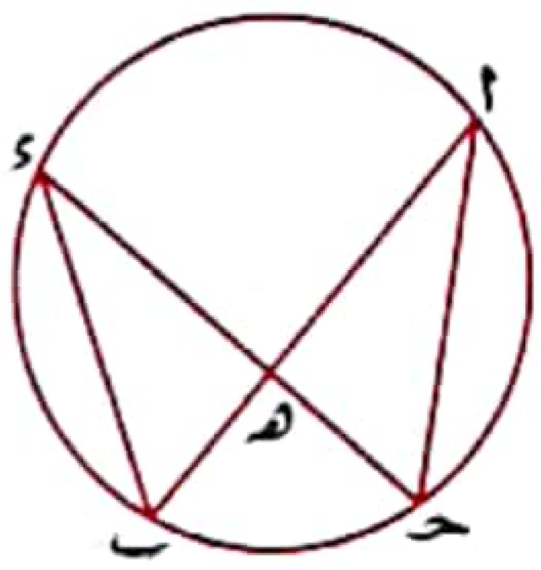
أوجد النسبة بين مساحتيهما. « $\frac{١}{٢}$ »



4

# تطبيقات التشابه فى الدائرة

**١ فى الشكل المقابل**




$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان فى نقطة هـ

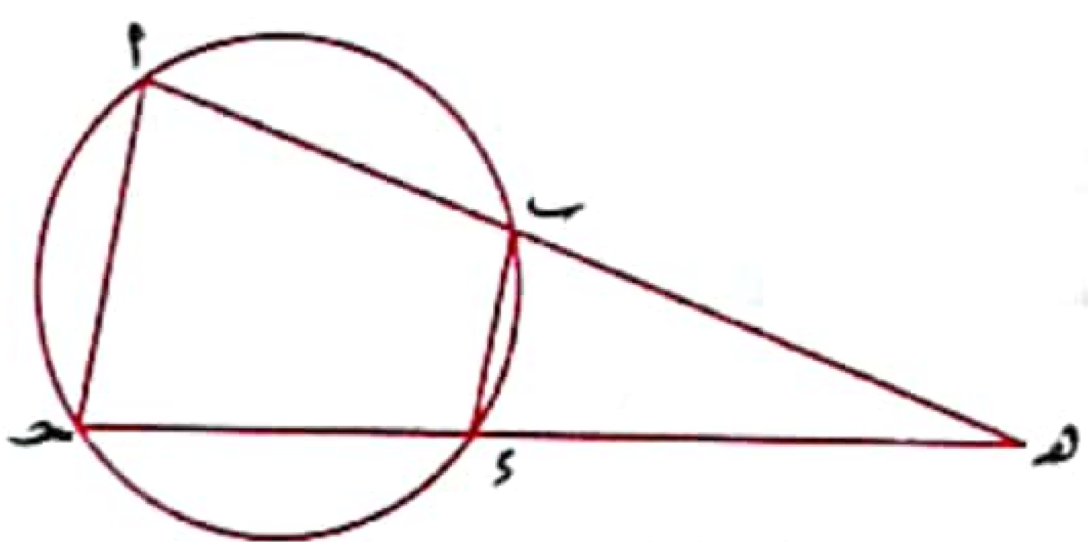
**نلاحظ أن** Δ هـ أ جـ ~ Δ هـ د ب

**وذلك لأن** ق (∠ أ هـ جـ) = ق (∠ د هـ ب) (بالتقابل بالرأس)

، ق (∠ أ) = ق (∠ د) (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$)

**ومن التشابه نستنتج أن** $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

**٢ فى الشكل المقابل**




أ ب د جـ شكل رباعى دائرى ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}} = \{\text{هـ}\}$

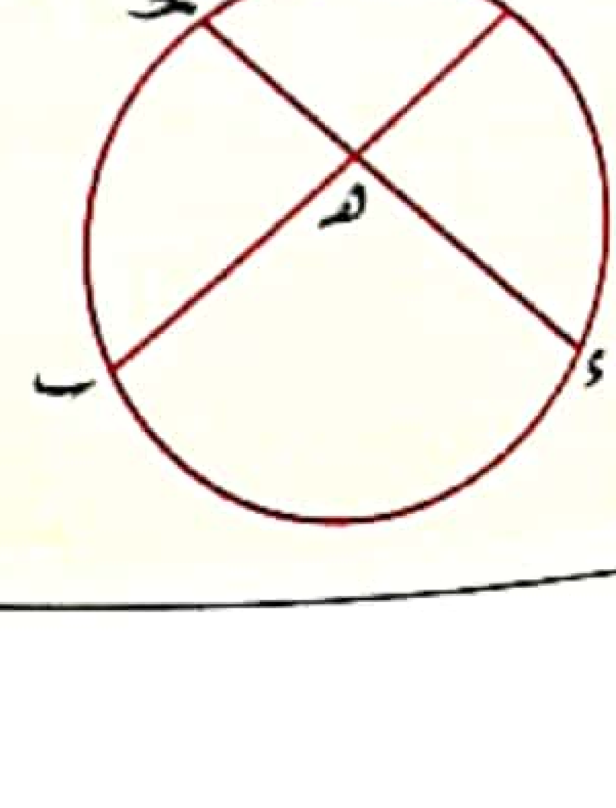
**نلاحظ أن** Δ هـ أ جـ ~ Δ هـ د ب

**وذلك لأن** ق (∠ هـ أ جـ) = ق (∠ هـ د ب) (خواص الرباعى الدائرى) ، ∠ هـ مشتركة

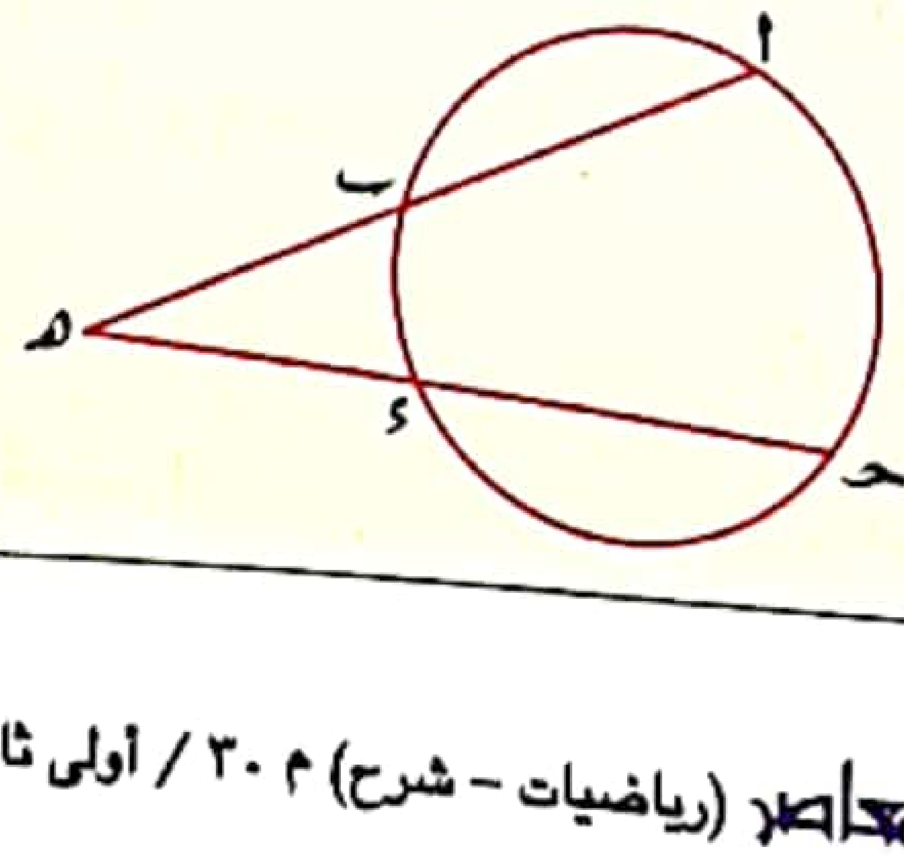
**ومن التشابه نستنتج أن** $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

**تمرين مشهور**

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د




شكل (١)



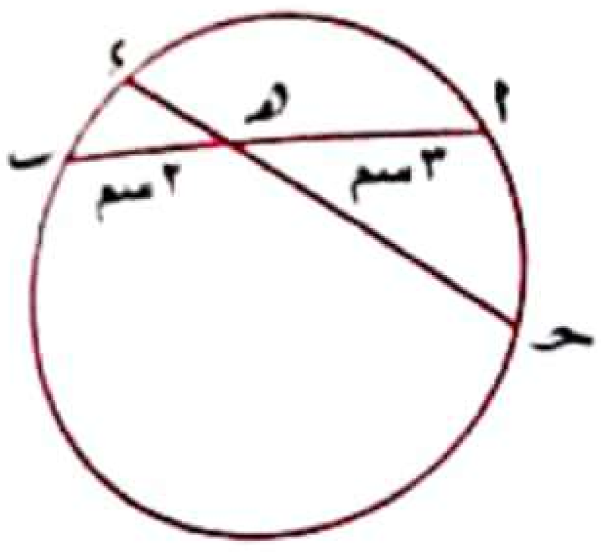

شكل (٢)

## مثال ١

أب ، حـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ فإذا كان : أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٢ سم ، حـ ء = ٥,٥ سم

**فاحسب :** طول كل من حـ هـ ، هـ ء

### الحل




بفرض أن : حـ هـ = س سم

∴ هـ ء = (٥,٥ − س) سم

، ∵ أب ، حـ ء وتران متقاطعان فى هـ

∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

∴ ٣ × ٢ = س (٥,٥ − س)

∴ ٦ = ٥,٥ س − $س^٢$

∴ ٢ $س^٢$ − ١١ س + ١٢ = ٠

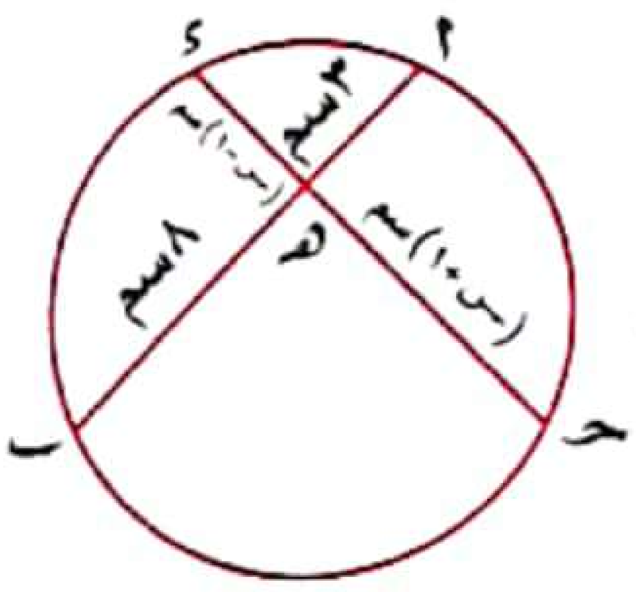
∴ (٢ س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أ، س = ٤

∴ حـ هـ = ٤ سم ، هـ ء = ١,٥ سم

(وهو المطلوب)

### حاول بنفسك



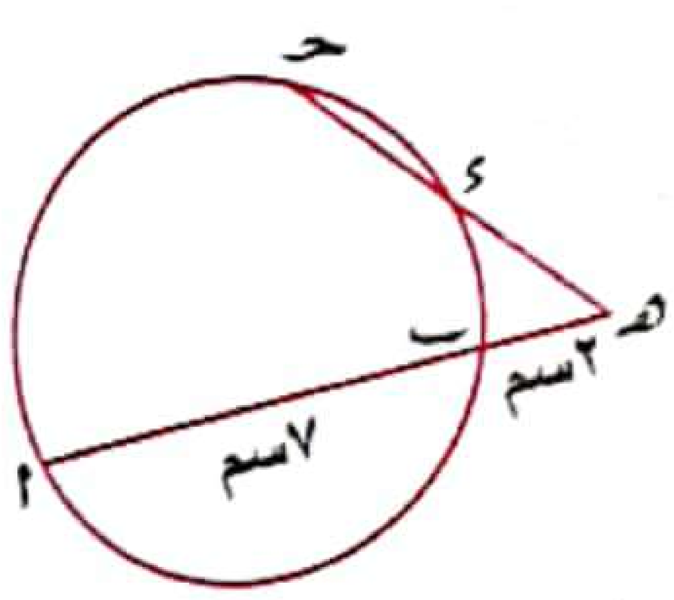

**فى الشكل المقابل :**

أب ∩ حـ ء = {هـ} ، أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٨ سم

، حـ هـ = (س + ١) سم ، هـ ء = (س − ١) سم

**أوجد :** قيمة س

## مثال ٢




**فى الشكل المقابل :**

أب ∩ حـ ء = {هـ} ، هـ ب = ٢ سم ، أب = ٧ سم

فإذا كان : $\frac{\text{هـ ء}}{\text{هـ حـ}} = \frac{١}{٢}$

**فأوجد :** طول هـ حـ

### الحل

∵ $\frac{\text{هـ ء}}{\text{هـ حـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ ء = ك ، هـ حـ = ٢ ك حيث ك ≠ ٠

، ∵ أب ∩ حـ ء = {هـ}

∴ هـ ء × هـ حـ = هـ ب × هـ أ

∴ ك × ٢ ك = ٢ × ٩ = ١٨

∴ ٢ $ك^٢$ = ١٨

∴ $ك^٢$ = ٩

∴ ك = ٣ أ، −٣ (مرفوض)

∴ هـ حـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

(وهو المطلوب)

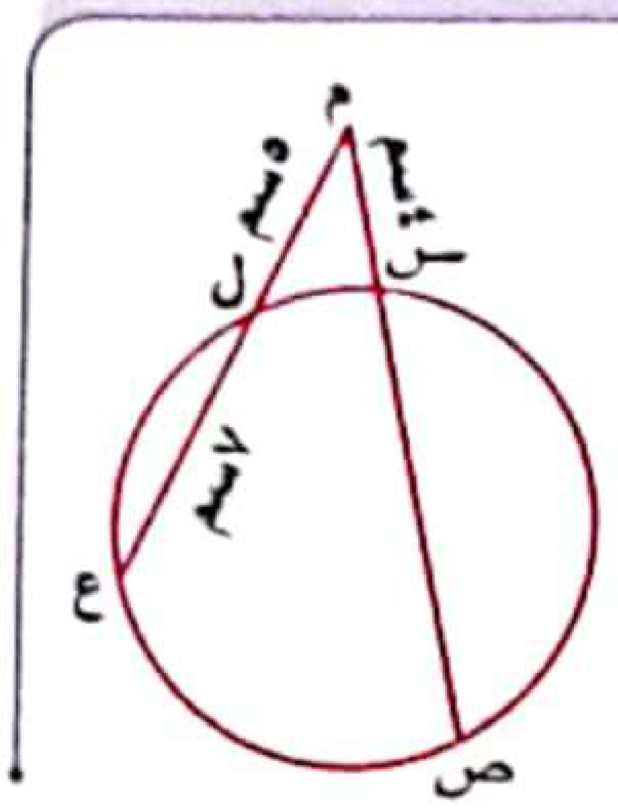
## حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{ص س}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}} = \{\text{م}\}$ ، م س = ٤ سم ، م ل = ٥ سم

، ل ع = ٧ سم

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$




## ملاحظة

فى الشكل المقابل :

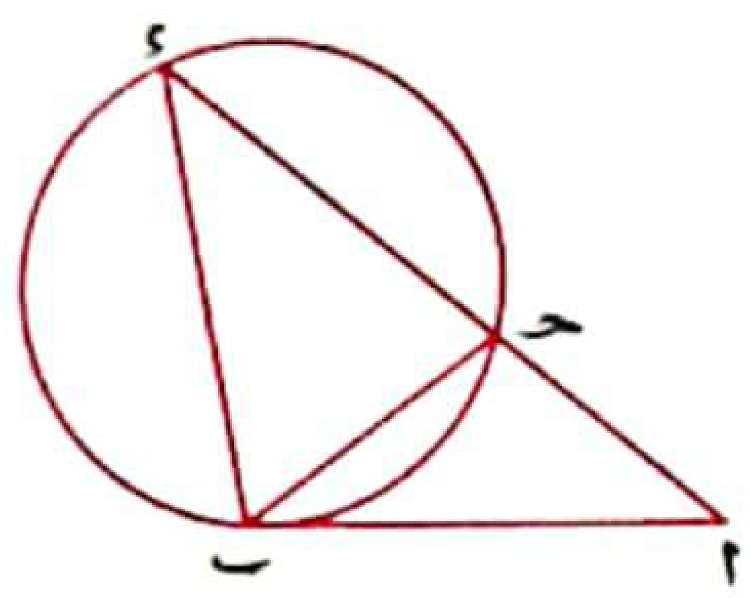
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند ب

**نلاحظ أن** $\Delta$ أ ب حـ ~ $\Delta$ أ ء ب

**وذلك لأن** ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

، ∠ أ مشتركة.




**تذكر أن**

أ ب وسط متناسب

بين أ حـ ، أ ء

، **ومن التشابه نستنتج أن** $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ ∴ $(\text{أ ب})^2 = \text{أ حـ} \times \text{أ ء}$

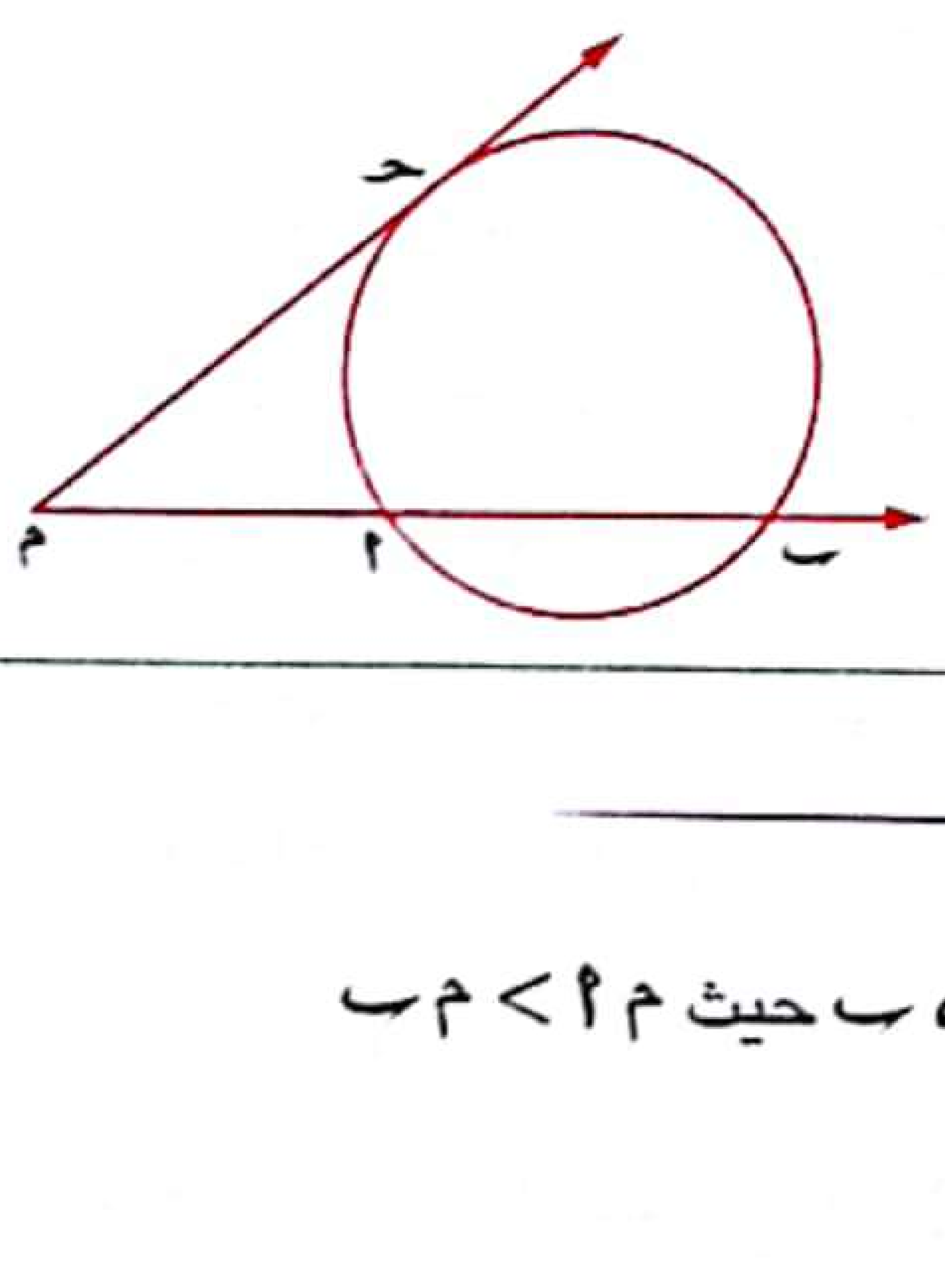
## نتيجة ١

إذا كانت م نقطة خارج دائرة

، $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ يمس الدائرة فى حـ

، $\overleftarrow{\text{م ب}}$ يقطعها فى أ ، ب

فإن : $(\text{م حـ})^2 = \text{م أ} \times \text{م ب}$




## مثال ٣

م نقطة خارج دائرة ، $\overline{\text{م حـ}}$ قطعة مماسة لها عند حـ ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها فى أ ، ب حيث م أ > م ب

فإذا كان : م حـ = ١٠ سم ، أ ب = ١٥ سم **فاحسب** : طول $\overline{\text{م ب}}$

### الحل

نفرض أن : م ب = س سم

، ∵ $\overleftarrow{\text{م حـ}}$ مماسة للدائرة ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها

∴ $(١٠)^2$ = س (س + ١٥)

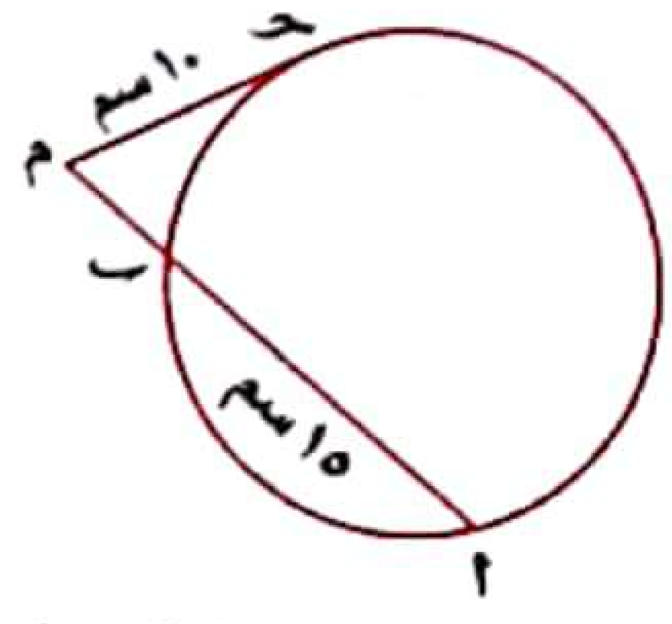
∴ $\text{س}^2$ + ١٥ س − ١٠٠ = ٠

∴ س = ٥ أى م ب = ٥ سم

∴ م أ = (س + ١٥) سم

∴ $(\text{م حـ})^2 = \text{م ب} \times \text{م أ}$

∴ (س − ٥) (س + ٢٠) = ٠



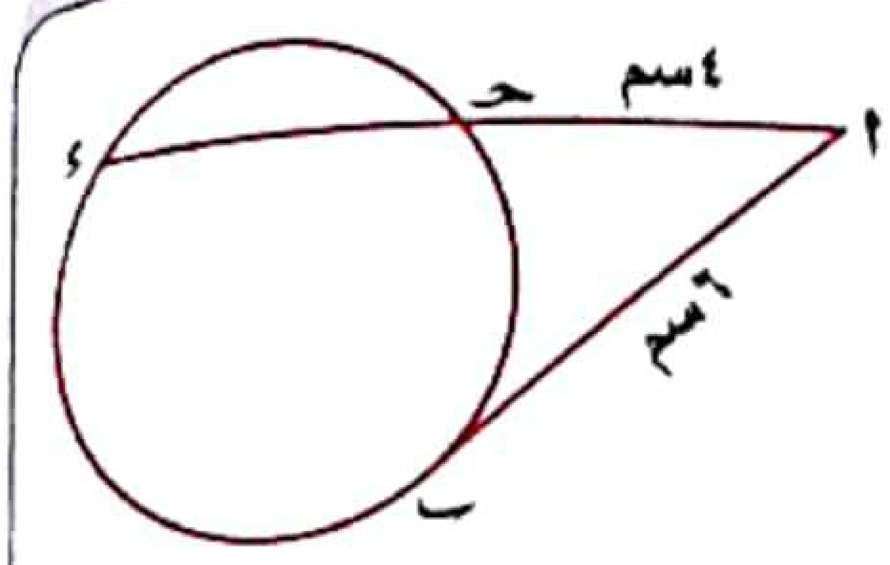

**(وهو المطلوب)**

### حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ قاطع للدائرة عند حـ ، ء ، $\overline{أ ب}$ مماسة للدائرة عند ب

أوجد : طول $\overline{حـ ء}$




### عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ في نقطة هـ (مختلفة عن أ ، ب ، حـ ، ء)

وكان هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

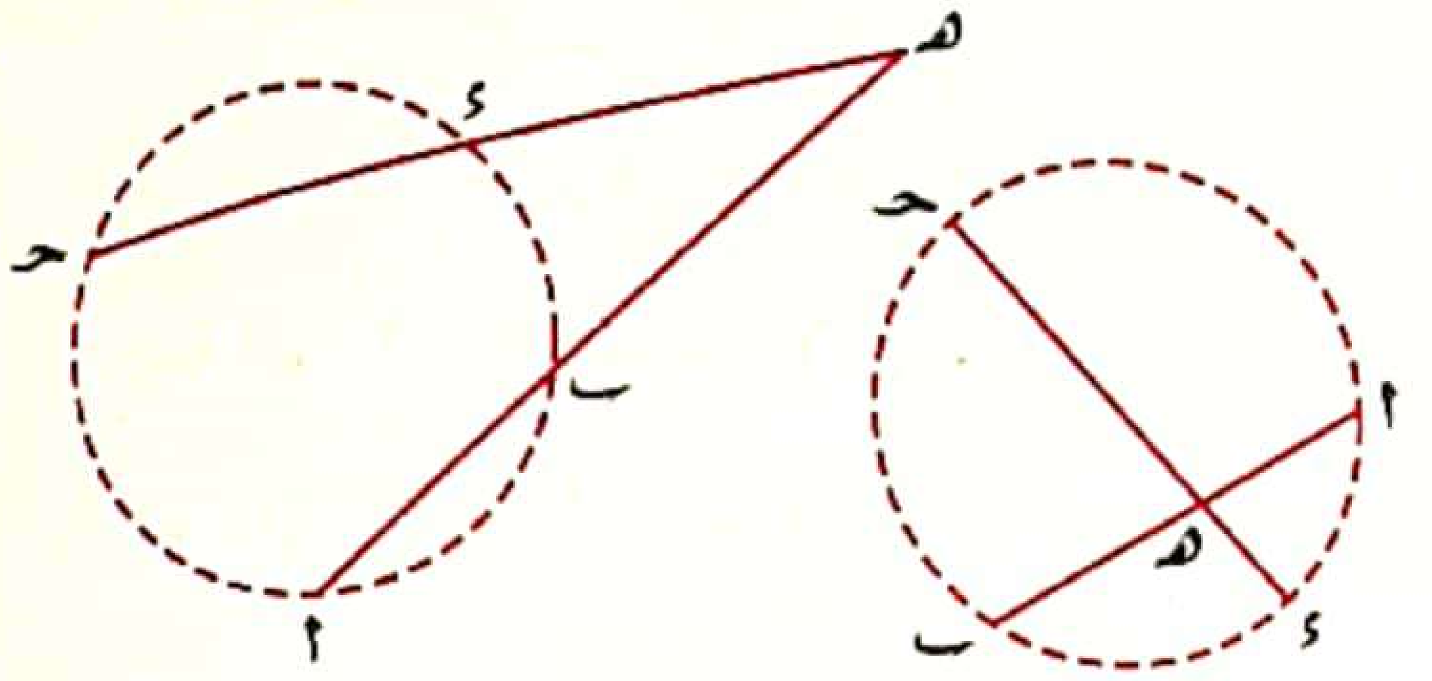
فإن النقط : أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

ففي الشكلين المقابلين :

إذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

فإن النقط :

أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.




### مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، فرضت ء ∈ $\overline{أ حـ}$ بحيث أ ء = ٥ سم ، وفرضت هـ ∈ $\overline{ب حـ}$

بحيث $\frac{ب هـ}{هـ حـ}$ = ٣ أثبت أن : الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري.

#### الحل

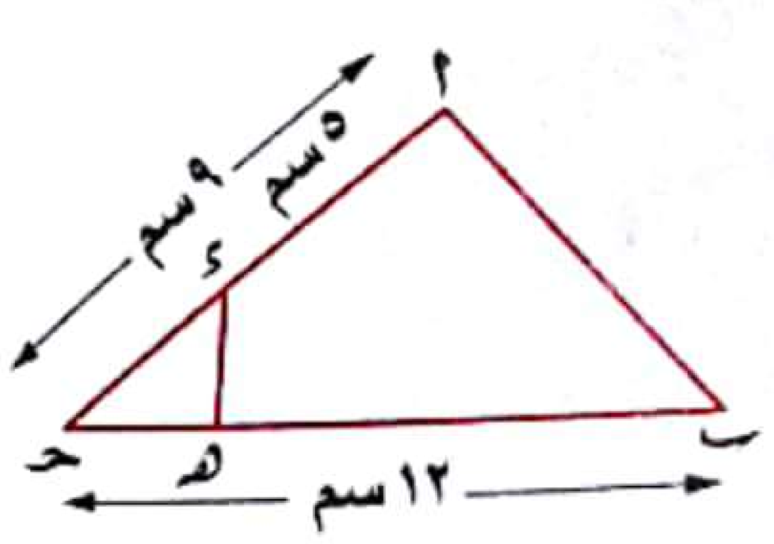
∵ حـ ء = أ حـ − أ ء = ٩ − ٥ = ٤ سم ∴ حـ ء × حـ أ = ٤ × ٩ = ٣٦

، ∵ ب هـ = ٣ حـ هـ ∴ ب حـ = ٤ حـ هـ

∴ حـ هـ = $\frac{١}{٤}$ ب حـ = $\frac{١}{٤}$ × ١٢ = ٣ سم ∴ حـ هـ × حـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦

∴ حـ ء × حـ أ = حـ هـ × حـ ب

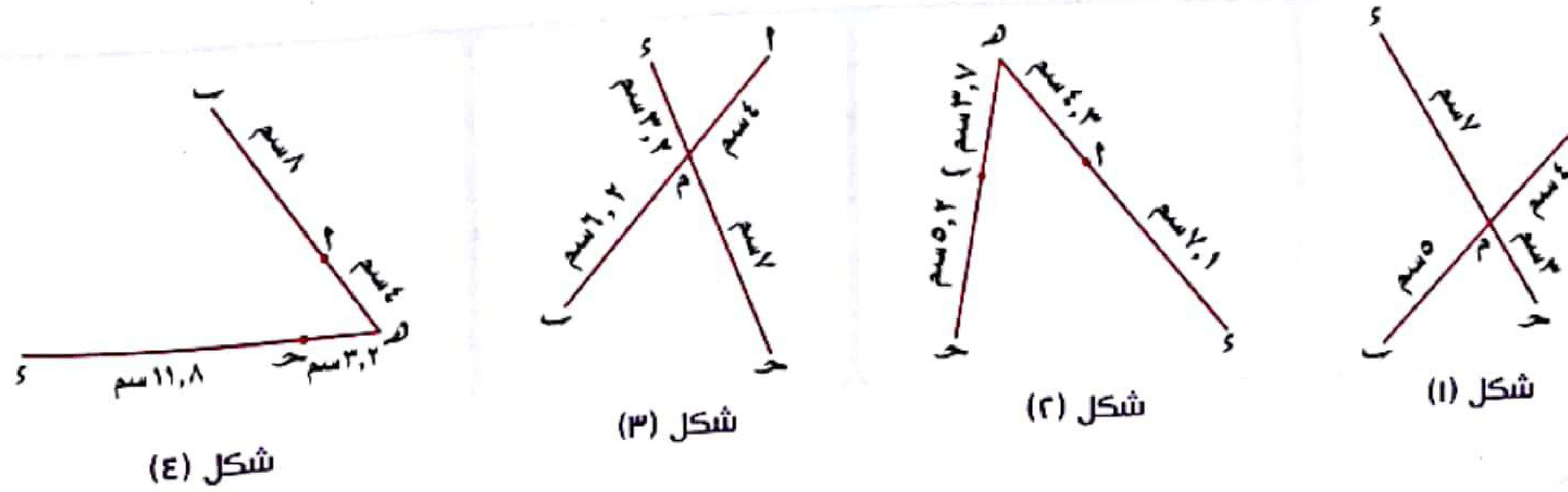
∴ الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري.




(وهو المطلوب)

### حاول بنفسك

في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ؟

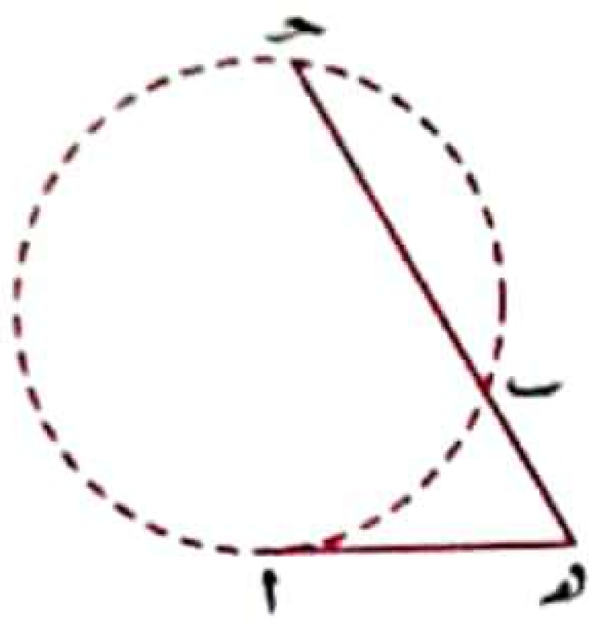


**نتيجة ٢**

إذا كان : (هـ أ)$^{٢}$ = هـ ب × هـ حـ

فإن : هـ أ تمس الدائرة المارة

بالنقط أ ، ب ، حـ

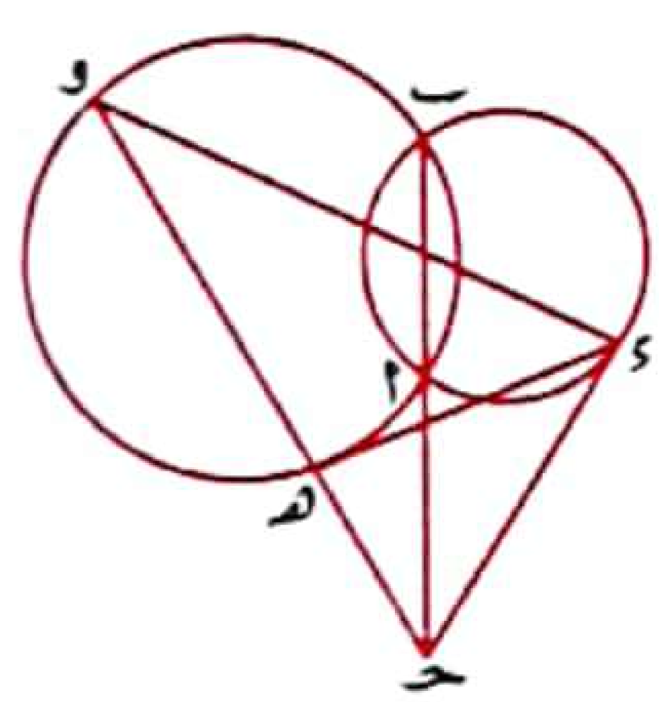



**مثال ٥**

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، نقطة حـ ∈ ب أ ، حـ ∉ أ ب ، حـ ء مماسة لإحدى الدائرتين فى ء ، حـ و قاطعة للأخرى فى هـ ، و حيث حـ و > حـ هـ

أثبت أن : حـ ء مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، هـ ، و

**الحل**




∵ حـ ب ، حـ و قاطعتان لإحدى الدائرتين.

∴ حـ أ × حـ ب = حـ هـ × حـ و (١)

، ∵ حـ ء مماسة للدائرة الأخرى ، حـ ب قاطعة لها

∴ (حـ ء)$^{٢}$ = حـ أ × حـ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : (حـ ء)$^{٢}$ = حـ هـ × حـ و

∴ حـ ء مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، هـ ، و (وهو المطلوب)

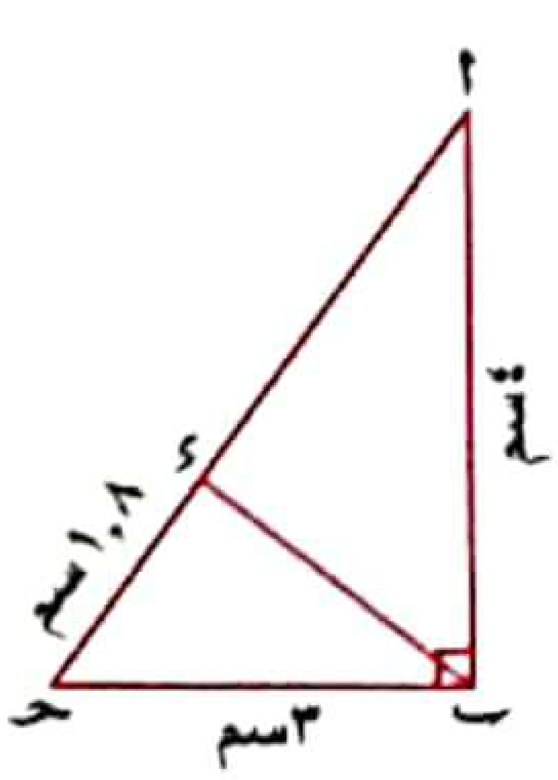
**حاول بنفسك**

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ١,٨ سم

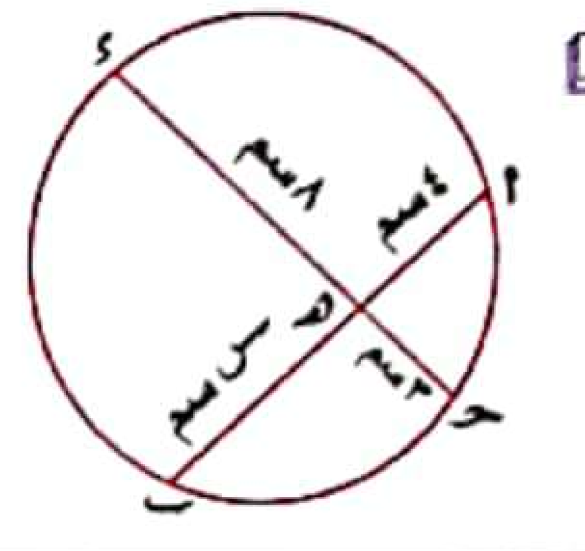
أثبت أن : ب حـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

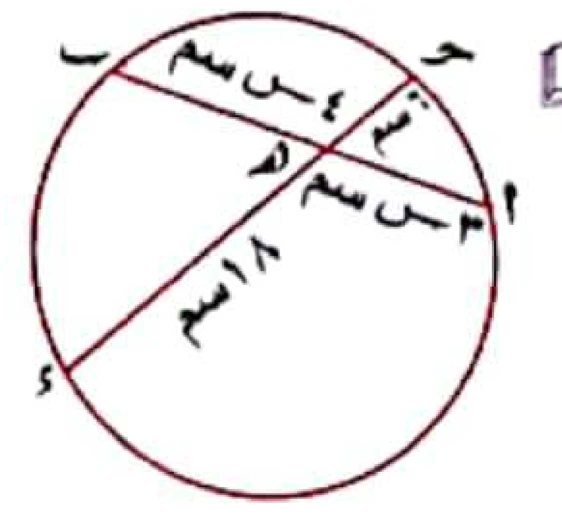


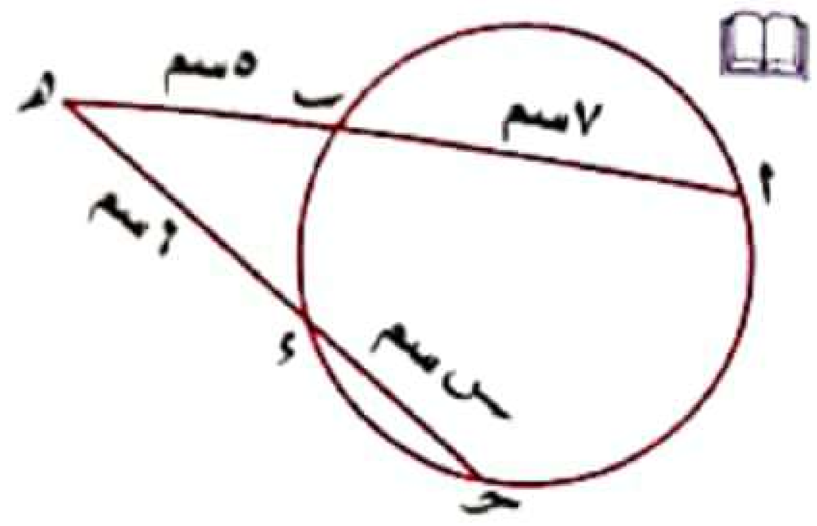
# على تطبيقات التشابه فى الدائرة

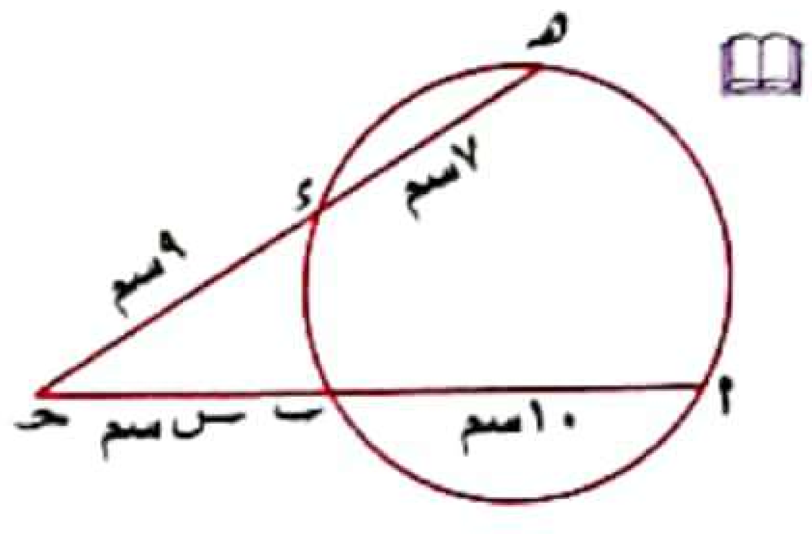
من أسئلة الكتاب المدرسى

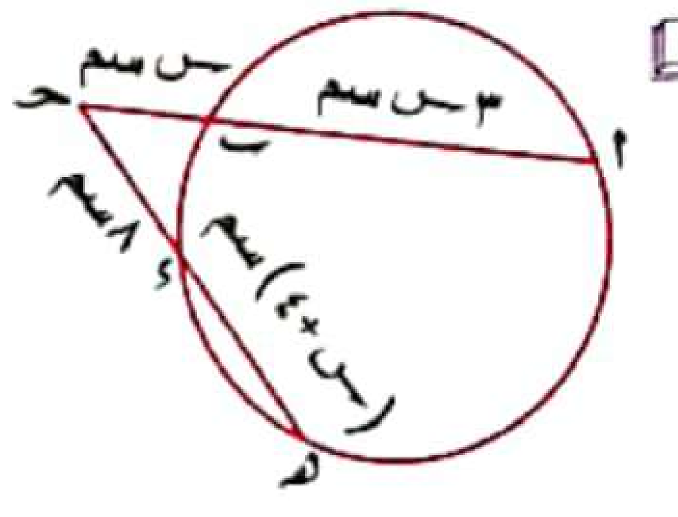
**١** باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلى ، أوجد قيمة س العددية فى كل من الأشكال التالية :

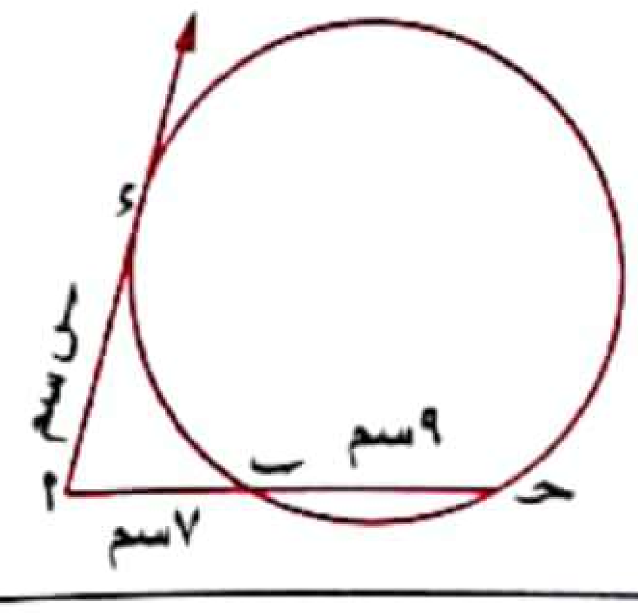
(١)


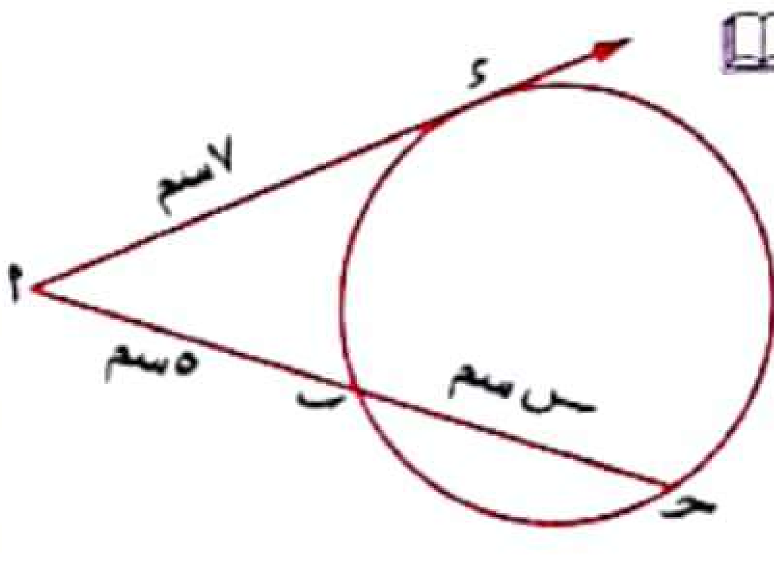
(٢)


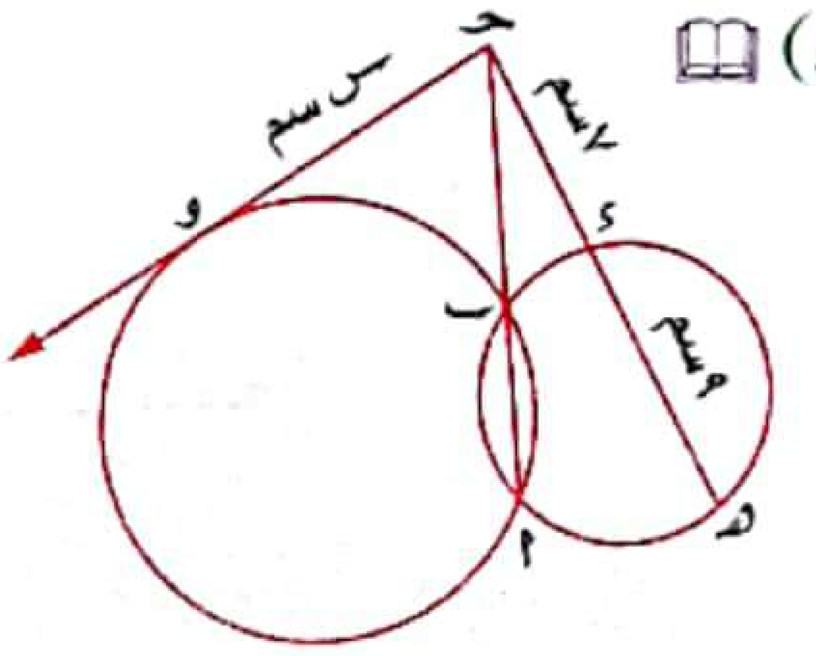
(٣)


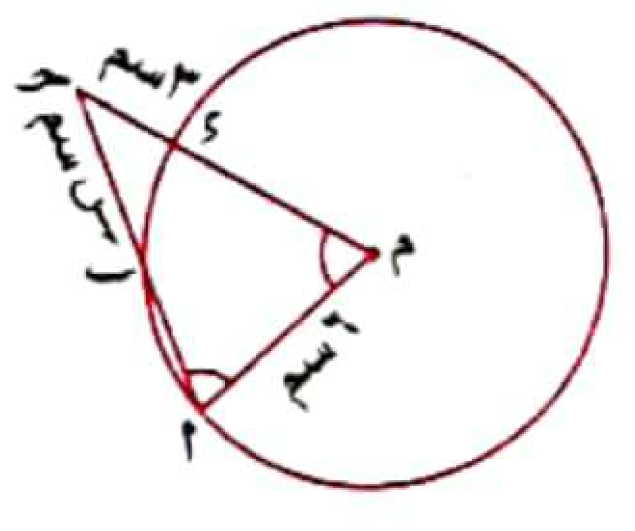
(٤)


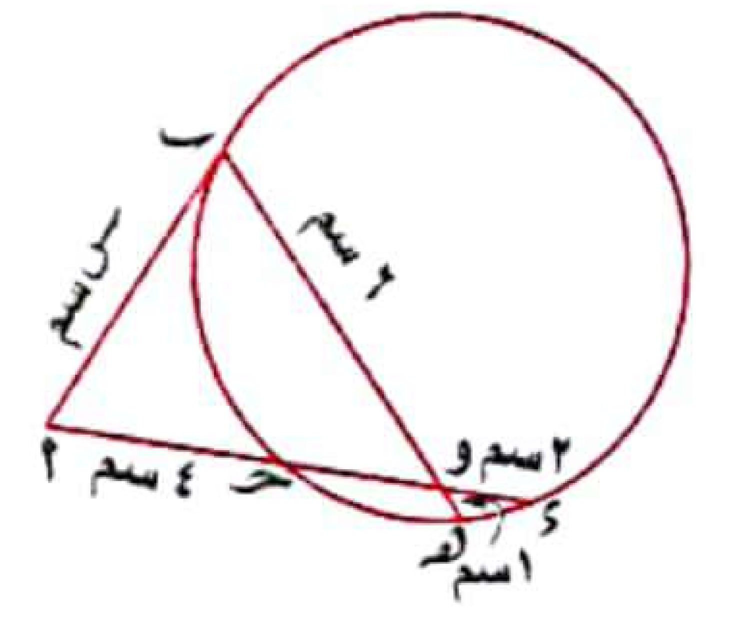
(٥)


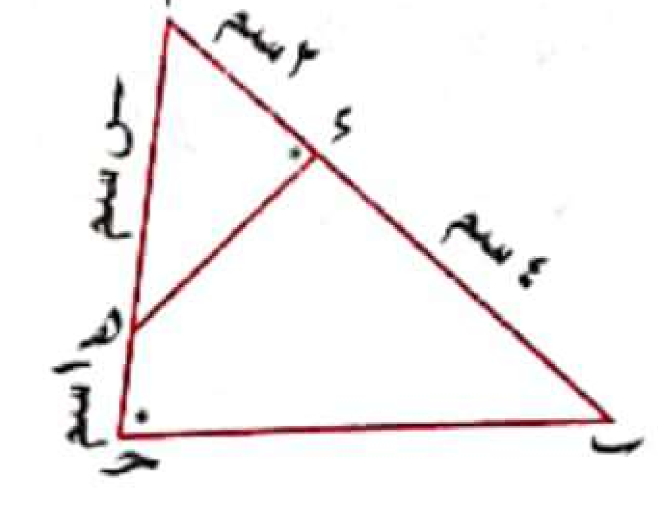
(٦)


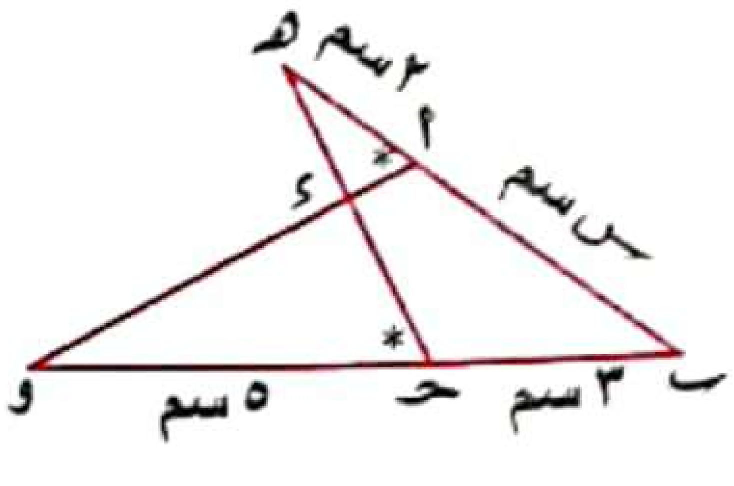
(٧)


(٨)


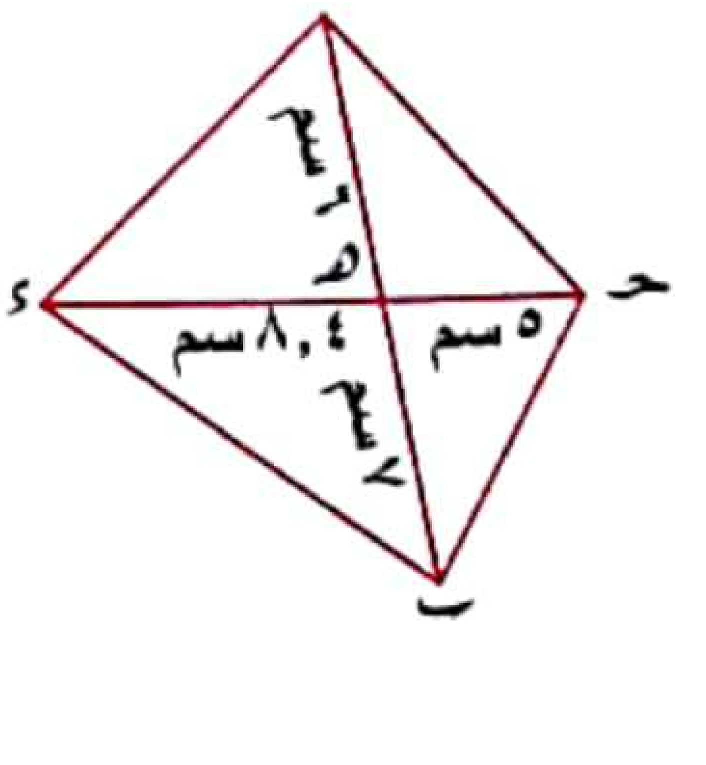
(٩)


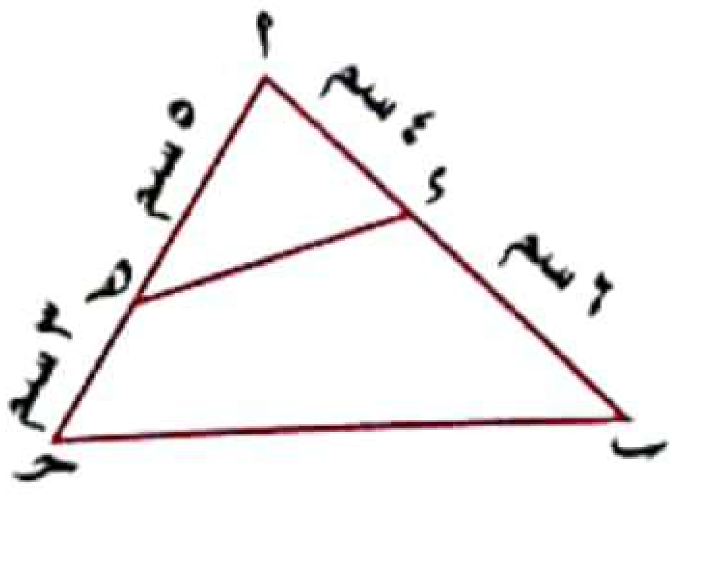
(١٠)


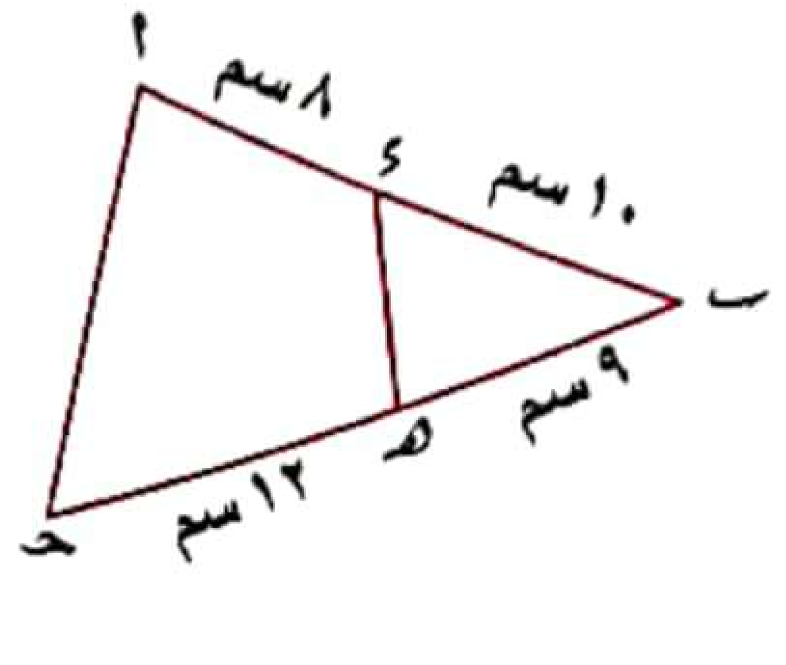
(١١)


(١٢)


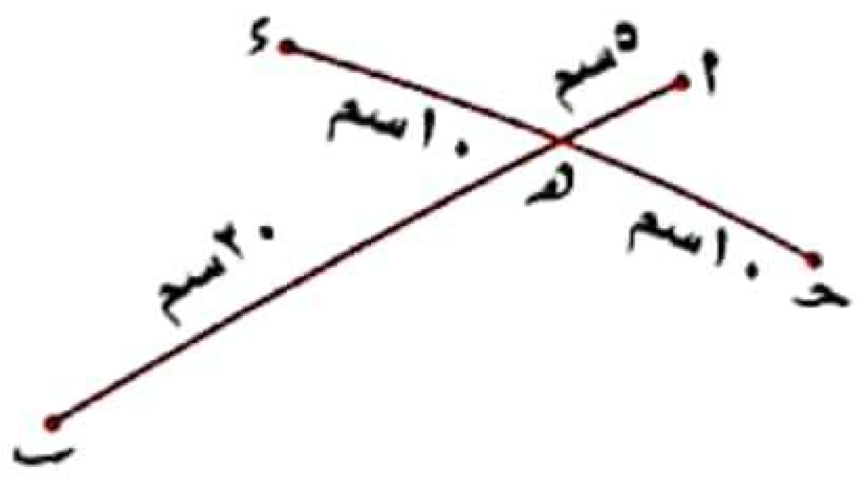
**٢** فى أى من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ؟ فسِّر إجابتك.

(١)


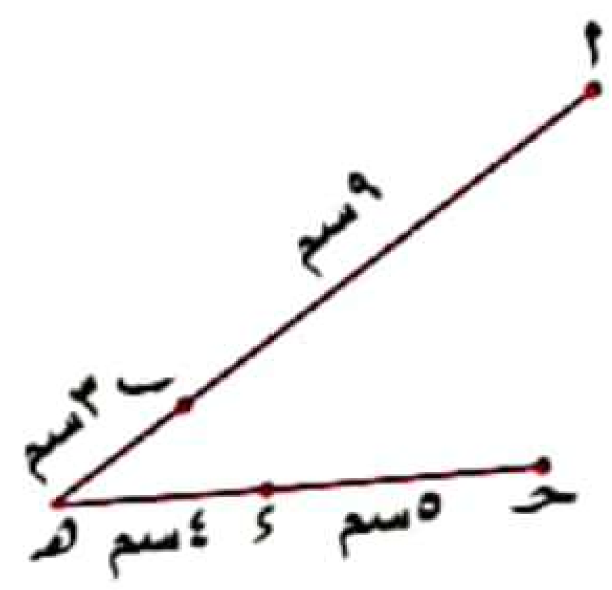
(٢)


(٣)


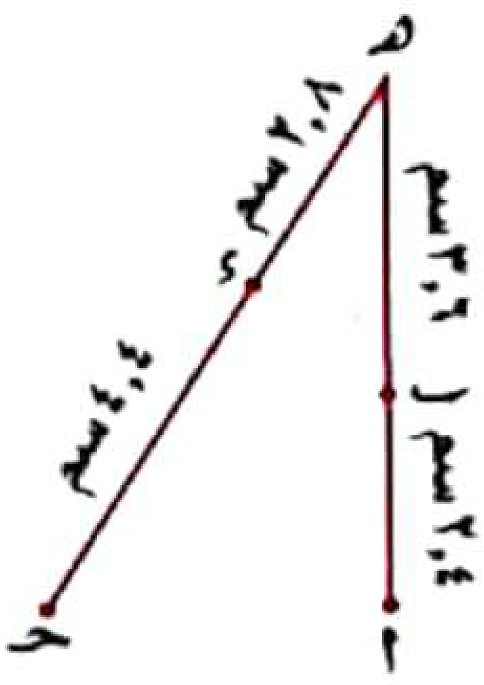
(٤)




(٥)

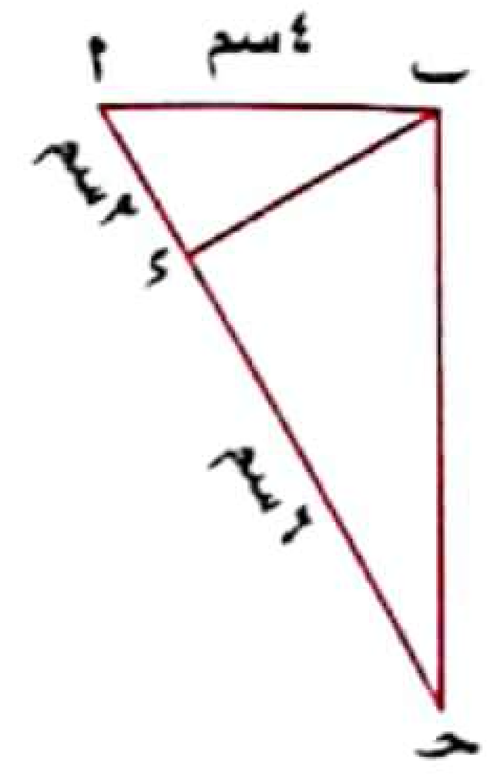



(٦)

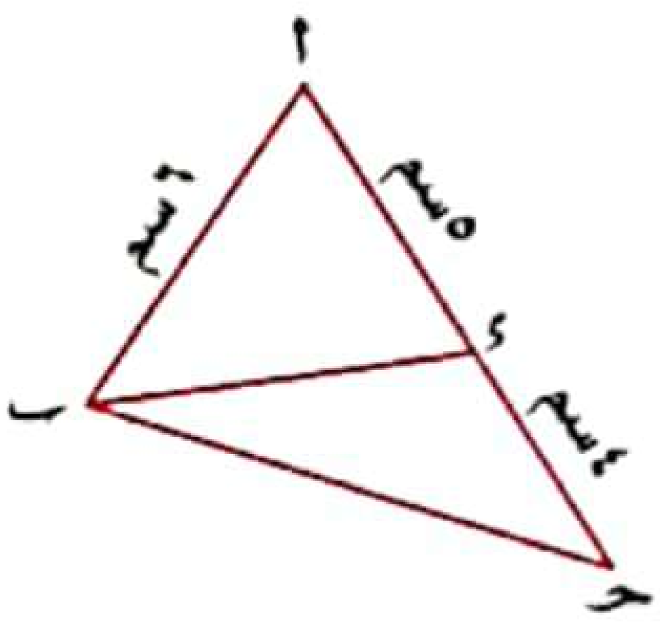



**٣** في أي من الأشكال التالية $\overline{ا ب}$ قطعة مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء :

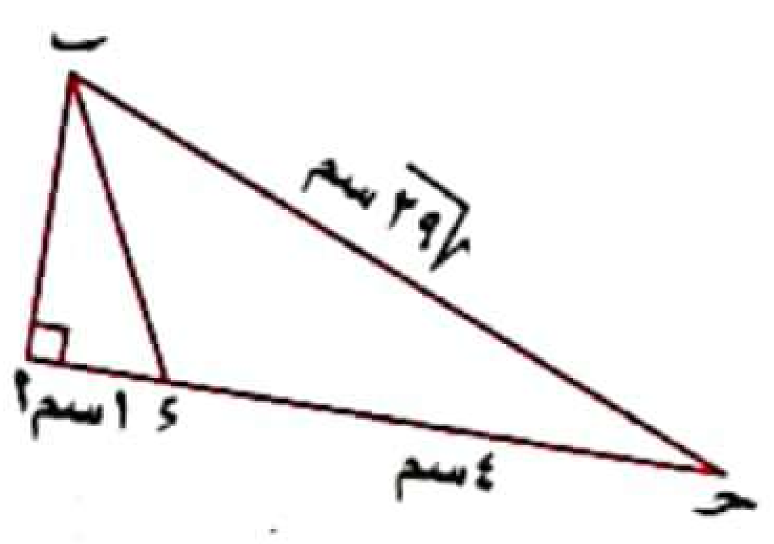
(١)



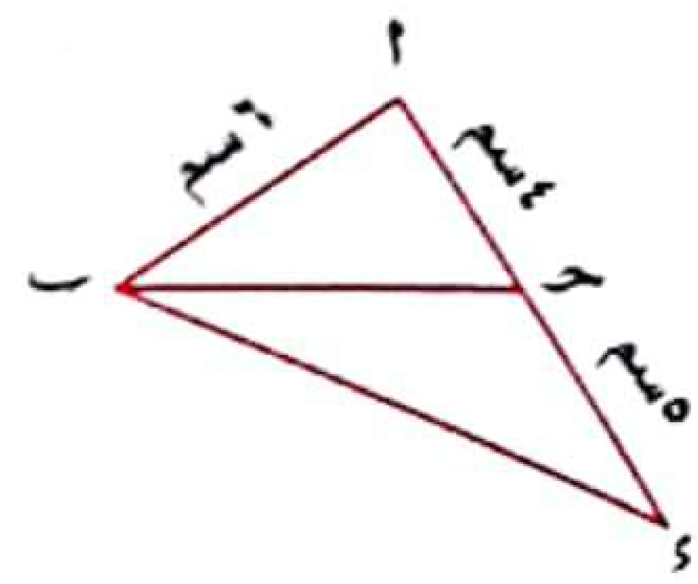

(٢)



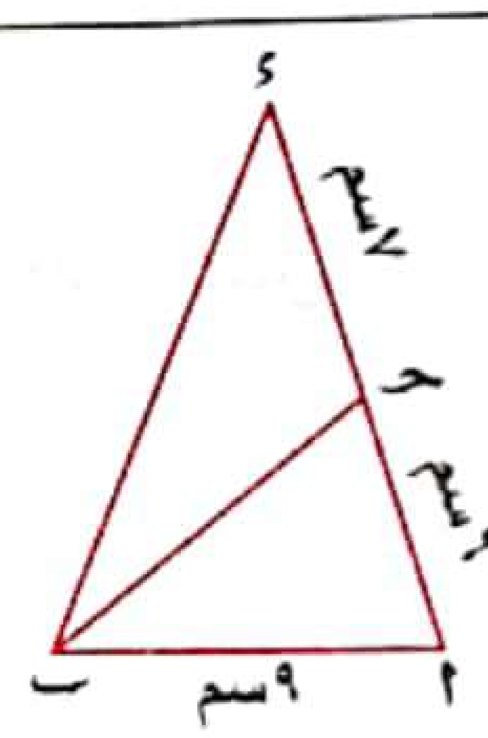

(٣)



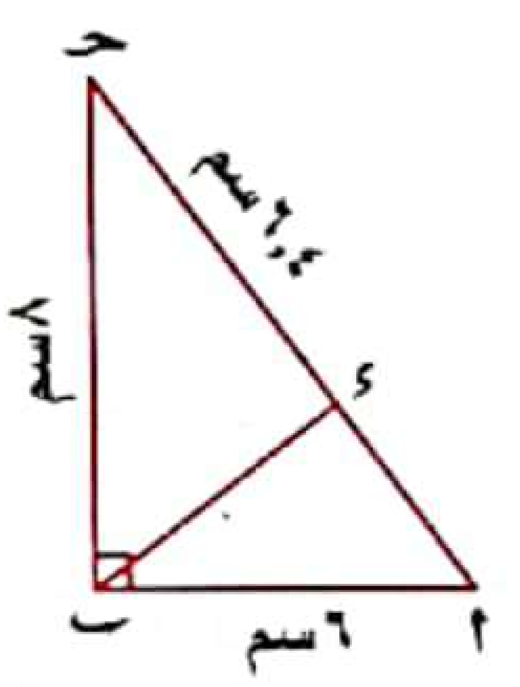

(٤)



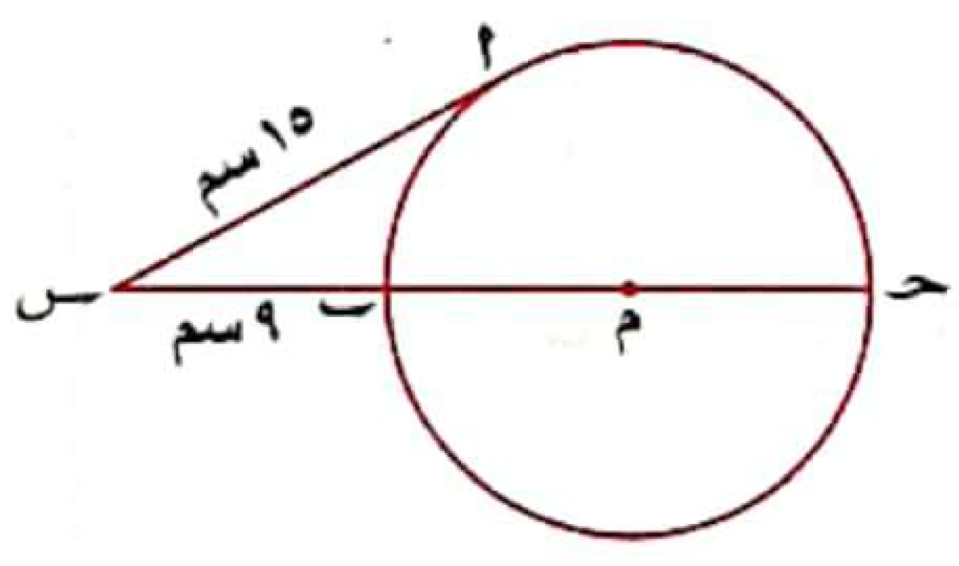

(٥)




(٦)




**٤** في الشكل المقابل :




$\overleftrightarrow{س ا}$ مماسة للدائرة م عند ا حيث س ا = ١٥ سم

فإذا كان : س ب = ٩ سم

فاحسب : طول نصف قطر الدائرة.

«٨ سم»

**٥** دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٤ سم ، فرضت نقطة م حيث م و = ٦ سم

ورسم من م قاطع للدائرة قطعها في ا ، ب حيث ا $\in$ $\overline{م ب}$ فإذا كان : م ا = ٣ سم

فأوجد : طول $\overline{ا ب}$

« $\frac{٢}{٣}$ ٣ سم»

**٦** $\overline{ا ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران في دائرة متقاطعان في هـ فإذا كانت أطوال : $\overline{ا هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{حـ ء}$

هي على الترتيب ٥ سم ، ٦ سم ، ١١,٥ سم فاحسب : طول كل من $\overline{هـ حـ}$ ، $\overline{هـ ء}$

«٧,٥ سم ، ٤ سم»

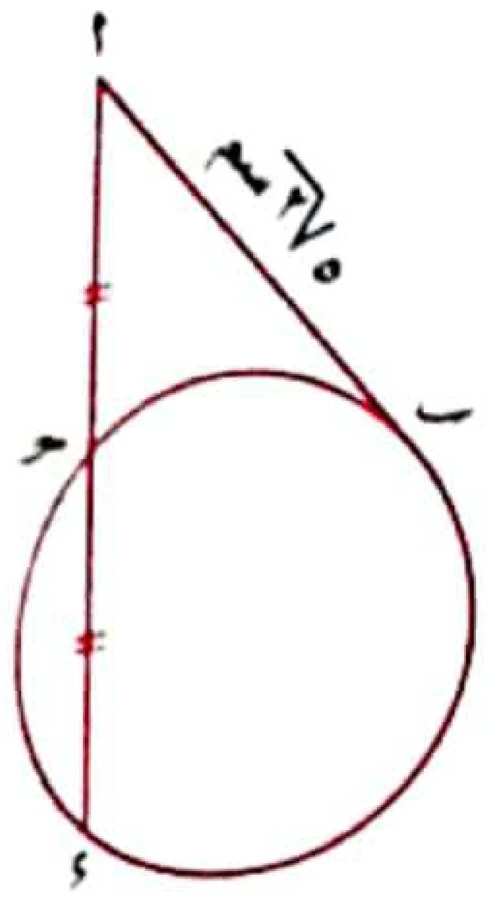
**٧** **فى الشكل المقابل :**

إذا كانت $\overline{٢ب}$ قطعة مماسة للدائرة

، حـ منتصف $\overline{٢ء}$

، طول $\overline{٢ب}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

**أوجد :** طول $\overline{٢ء}$




«١٠ سم»

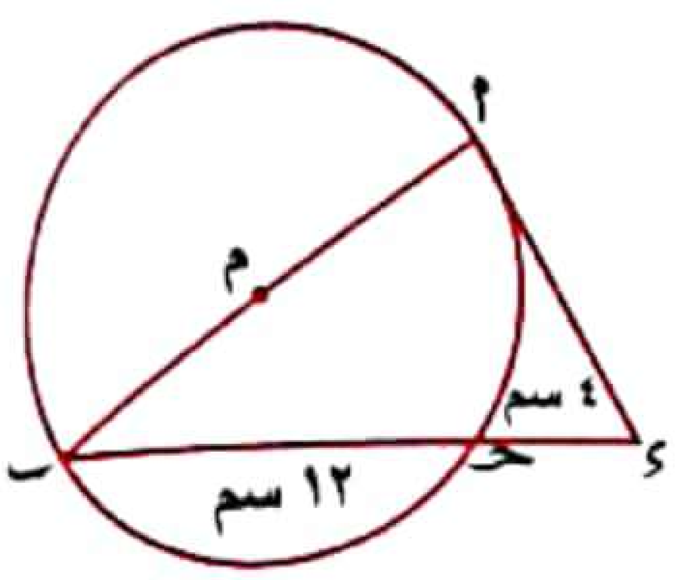
---

**٨** **فى الشكل المقابل :**

$\overline{٢ب}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{٢ء}$ مماسة للدائرة عند ٢

**أوجد :** مساحة الدائرة م




«٤٨ π سم٢»

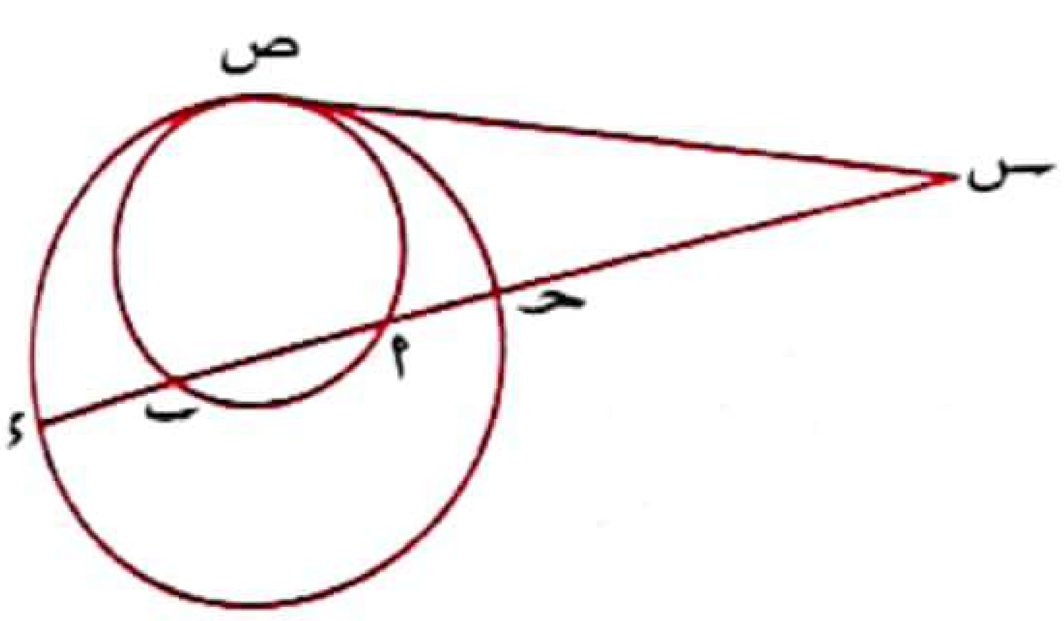
---

**٩** **فى الشكل المقابل :**

دائرتان متماستان من الداخل فى النقطة ص

، $\overleftrightarrow{صس}$ مماس مشترك للدائرتين.

**أثبت أن :** $\frac{سحـ}{سب} = \frac{س٢}{سء}$




---

**١٠** **فى الشكل المقابل :**

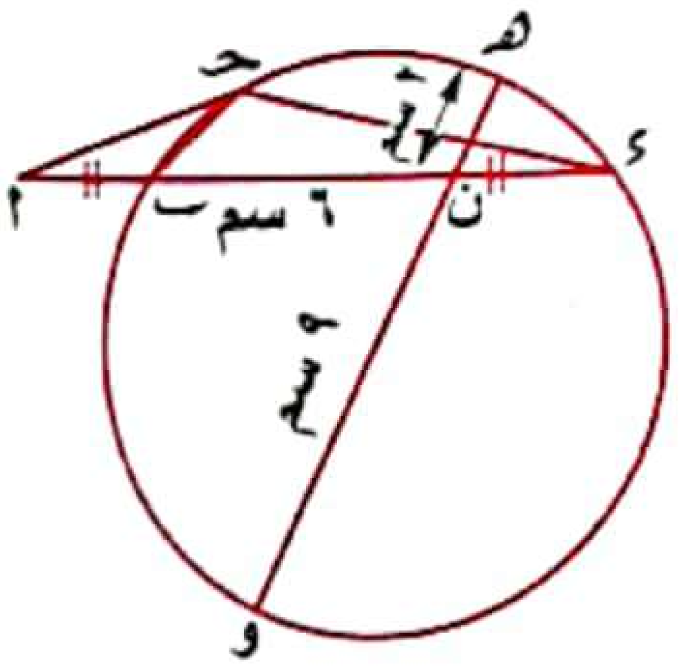
$\overline{٢حـ}$ قطعة مماسة ، ٢ب = ءن ، هـ ن = ٢ سم

، ن و = ٩ سم ، ن ب = ٦ سم

**أوجد :**

(١) طول $\overline{٢حـ}$

(٢) م (Δ ٢حـ ب) : م (Δ ٢ءحـ)




«٦ سم ، $\frac{١}{٤}$»

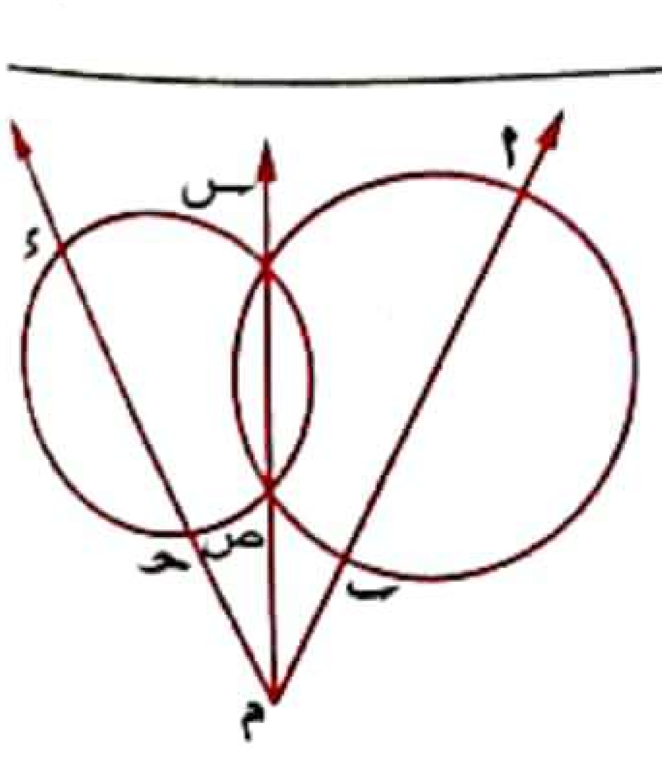
---

**١١** **فى الشكل المقابل :**

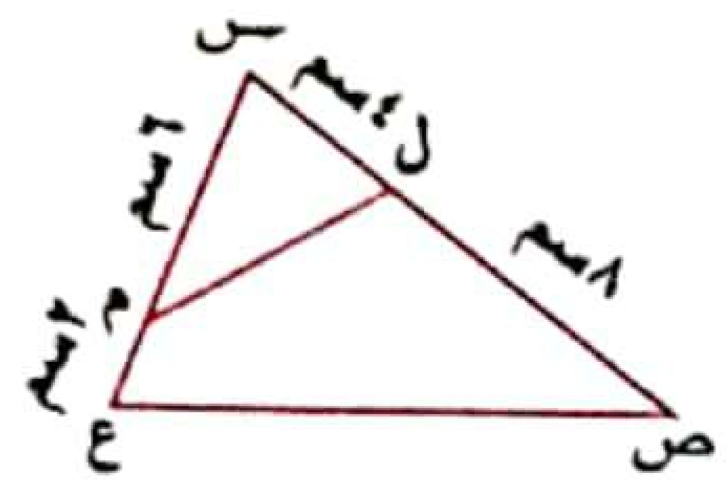
**أثبت أن :**

النقط ٢ ، ب ، حـ ، ء

تمر بها دائرة واحدة.



**١٢** 🕮 في الشكل المقابل :




ل ∈ $\overline{\text{س ص}}$ حيث س ل = ٤ سم ، ص ل = ٨ سم

، م ∈ $\overline{\text{س ع}}$ حيث س م = ٦ سم ، ع م = ٢ سم

أثبت أن : (١) Δ س ل م ~ Δ س ع ص (٢) الشكل ل ص ع م رباعي دائري.

---

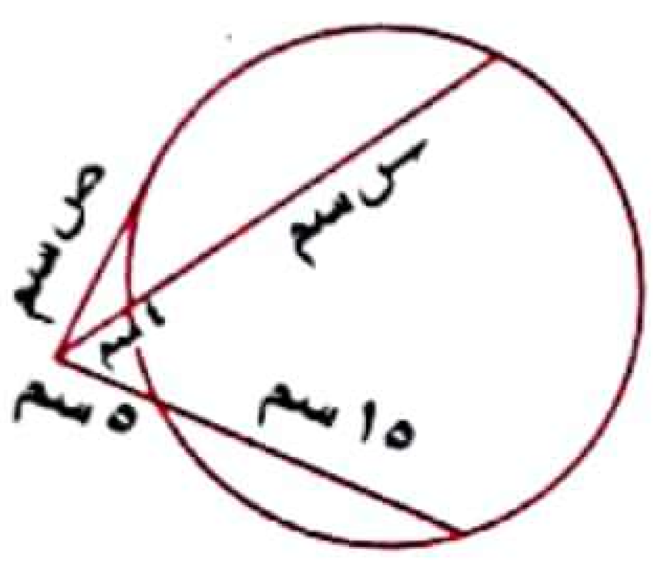
**١٣** 🕮 $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ} ، أ هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ حـ ، إذا كان ب هـ = ٦ سم ، حـ هـ = ٥ سم

أثبت أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

---

**١٤** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

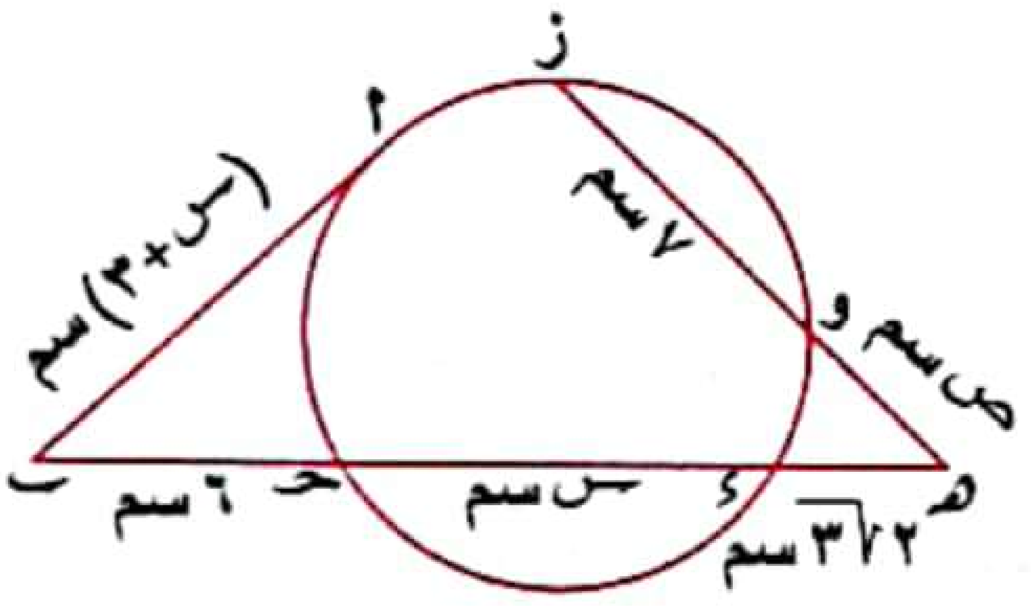
(١) في الشكل المقابل :




س + ص = ............ سم

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٢ (د) ٣١

(٢) في الشكل المقابل :

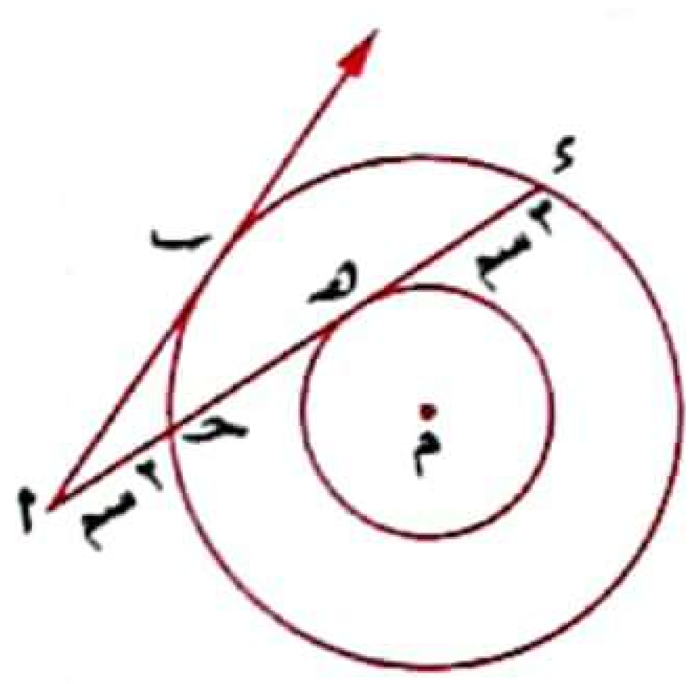



$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ............

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٣) في الشكل المقابل :

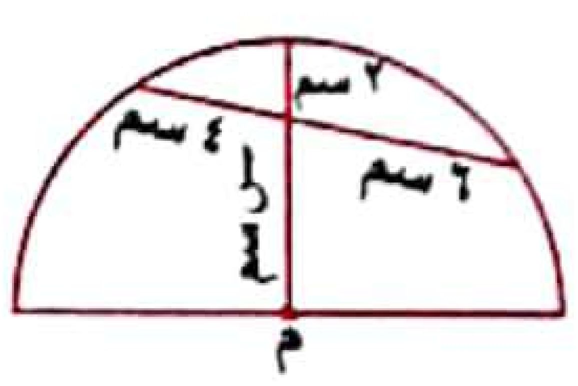



أ ب = ............ سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٤) في الشكل المقابل :

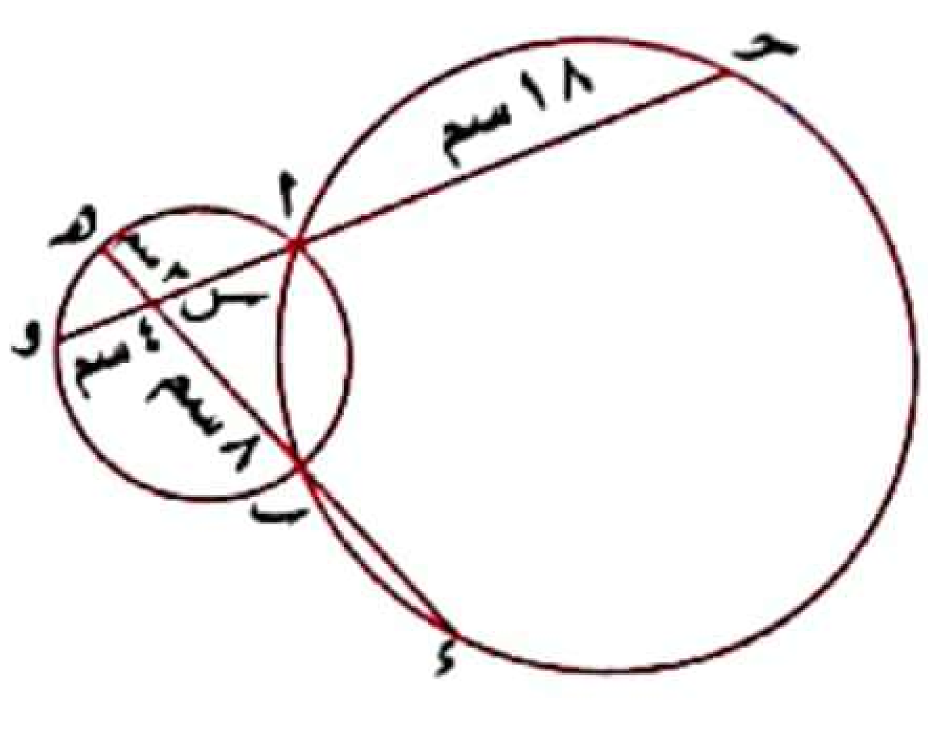



إذا كان م مركز نصف الدائرة

فإن : س = ............ سم

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٥) في الشكل المقابل :

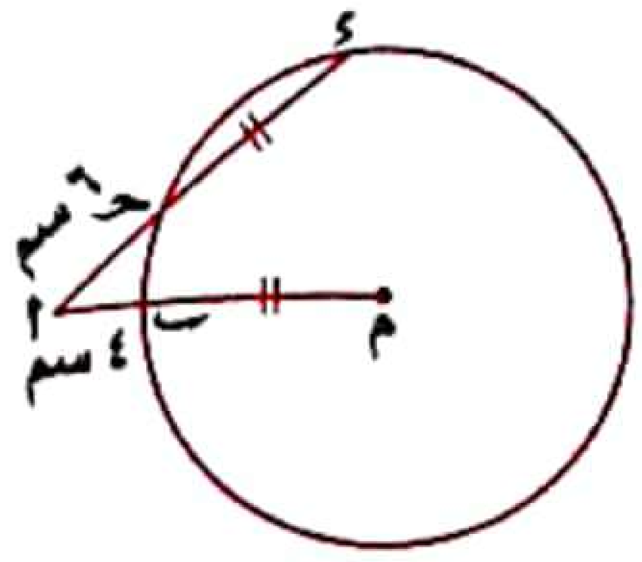



ب ء = ............ سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

(٦) في الشكل المقابل :

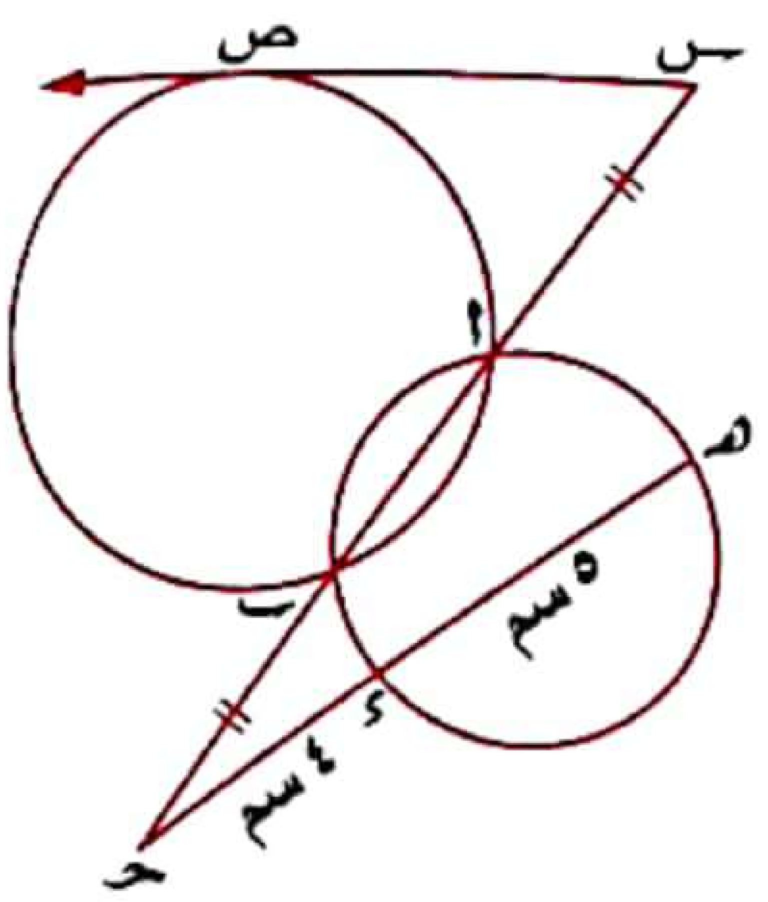



إذا كان : ءحـ = م ب

فإن : محيط الدائرة م = ............. سم

(أ) ١٥ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٠ π (د) ٢٤ π

(٧) في الشكل المقابل :




دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

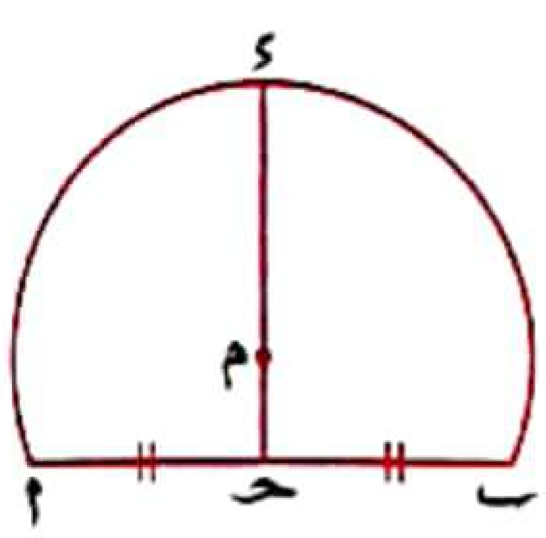
إذا كان : أس = ب حـ

فإن : س ص = ............. سم

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ٩

(٨) في الشكل المقابل :




أ ، ب ، ء ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$

، ء ، م ، حـ على استقامة واحدة

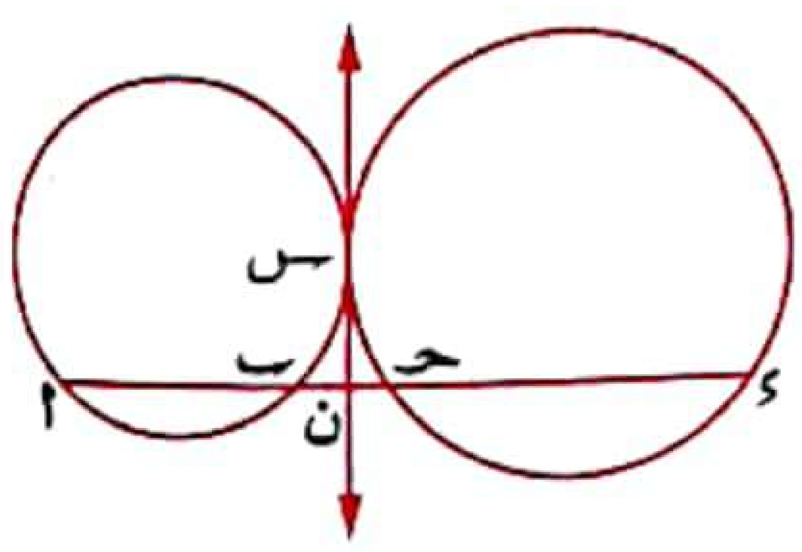
، أب = ٢٤ سم ، ءحـ = ١٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة = ............. سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٣

---

**١٥** في الشكل المقابل :




دائرتان متماستان من الخارج في س

، $\overleftrightarrow{أء}$ يقطع إحدى الدائرتين في أ ، ب ويقطع الأخرى

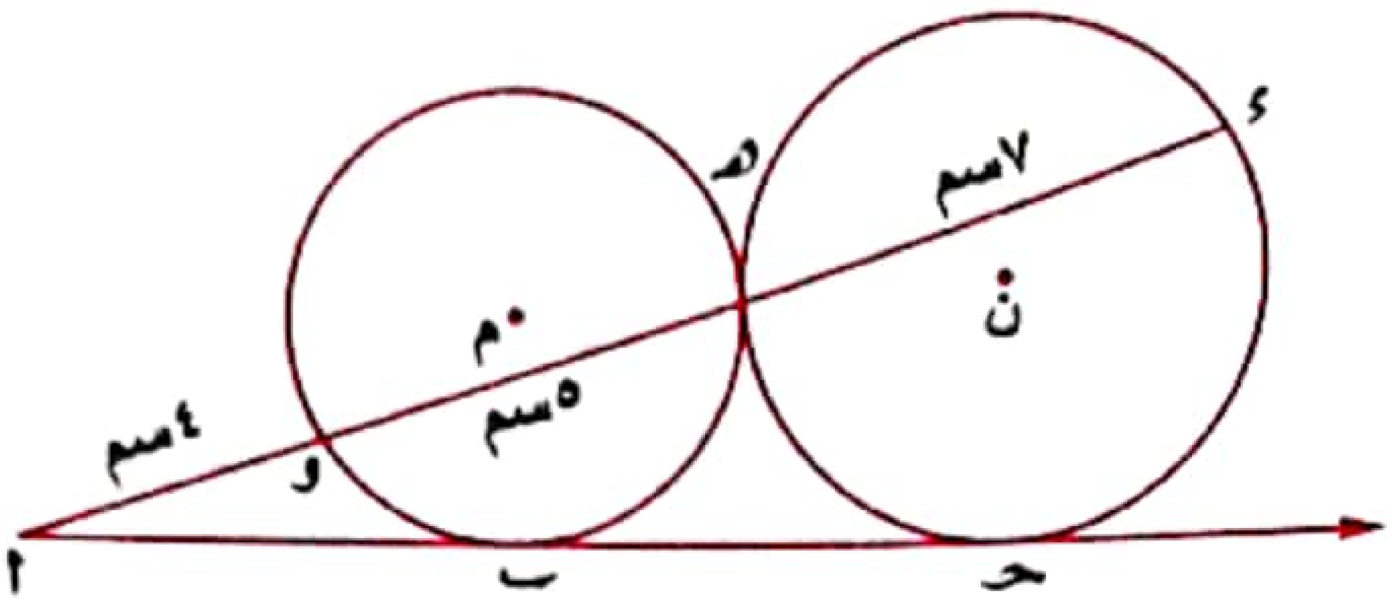
في حـ ، ء ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س في نقطة ن

**أثبت أن :** $\frac{ن ب}{ن حـ} = \frac{ن ء}{ن أ}$

---

**١٦** دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ ∉ $\overline{أب}$ ، رسم من حـ القطعتان $\overline{حـ س}$ ، $\overline{حـ ص}$ مماستين للدائرتين عند س ، ص **أثبت أن :** حـ س = حـ ص

**١٧** في الشكل المقابل :




الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ

، أجـ يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عند جـ

، أهـ يقطع الدائرتين عند و ، ء على الترتيب حيث أو = ٤ سم ، وهـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

أثبت أن : ب منتصف أجـ

---

**١٨** أ ب جـ مثلث حاد الزوايا ، أء ، ب هـ ارتفاعان فيه متقاطعان في و

أثبت أن : $\frac{\text{أهـ} \times \text{أجـ}}{\text{ب و} \times \text{و هـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{و ء}}$

---

**١٩** دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٨ سم ، م نقطة بحيث م و = ١٢ سم ، رسم من

م قاطع للدائرة يقطعها في أ ، ب حيث أ ∈ م ب فإذا كان أ ب = ١١ سم

فأوجد : (١) طول م أ

(٢) طول القطعة المماسة للدائرة من م «٥ سم ، ٤ $\sqrt{5}$ سم»

---

**٢٠** أ ب جـ مثلث ، ء ∈ ب جـ حيث ء ب = ٥ سم ، ء جـ = ٤ سم

إذا كان : أ جـ = ٦ سم

أثبت أن : (١) أ جـ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، ء

(٢) Δ أ جـ ء ~ Δ ب جـ أ

(٣) م (Δ أ ب ء) : م (Δ أ ب جـ) = ٥ : ٩

---

**٢١** دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر أء في الدائرة الكبرى

ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، جـ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب × ب ء = ٩٥

---

**٢٢** أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

، رسم ب هـ ⊥ أ جـ فقطع أ جـ في هـ ، أء في و

(١) أثبت أن : $(\text{أ ب})^2$ = أ و × أ ء

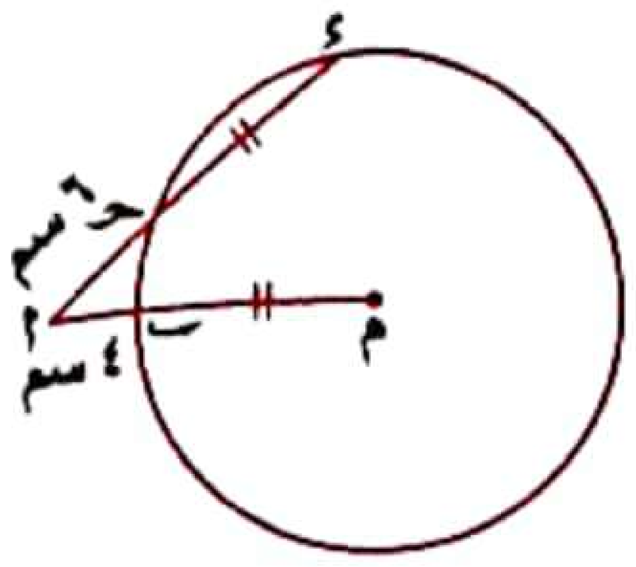
(٢) أوجد : طول أ و «٤,٥ سم»

---

**٢٣** أ ب وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، م جـ ⊥ أ ب يقطعه في جـ ويقطع الدائرة في ء

فإذا كان : جـ ء = ٢ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة. «٥ سم»

(٦) فى الشكل المقابل :

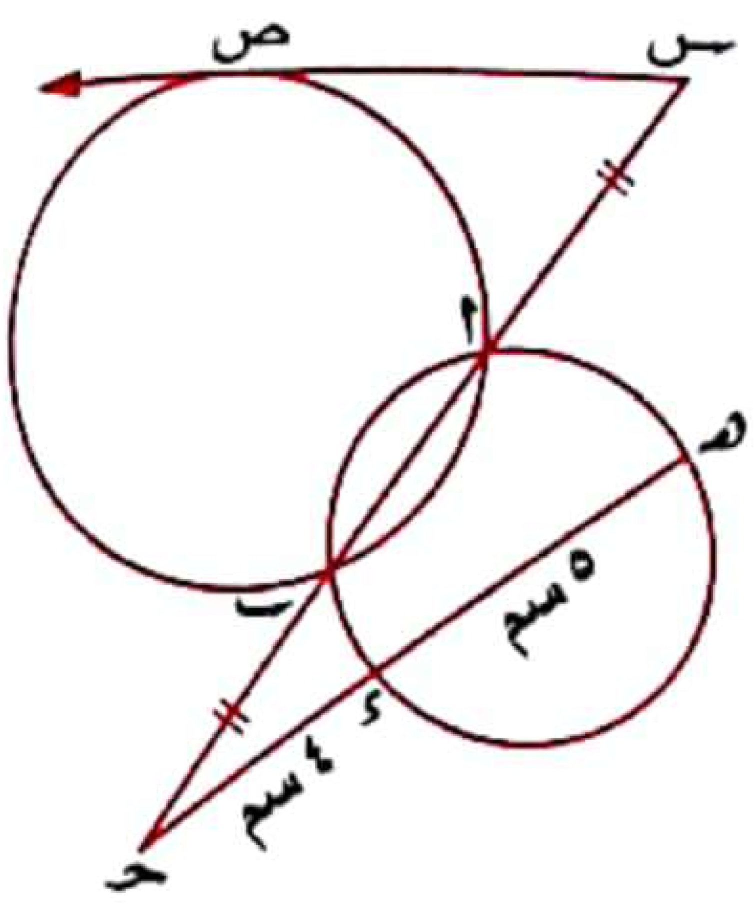



إذا كان : ءحـ = مب

فإن : محيط الدائرة م = .............. سم

(أ) ١٥ π　　(ب) ١٨ π　　(جـ) ٢٠ π　　(د) ٢٤ π

(٧) فى الشكل المقابل :




دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

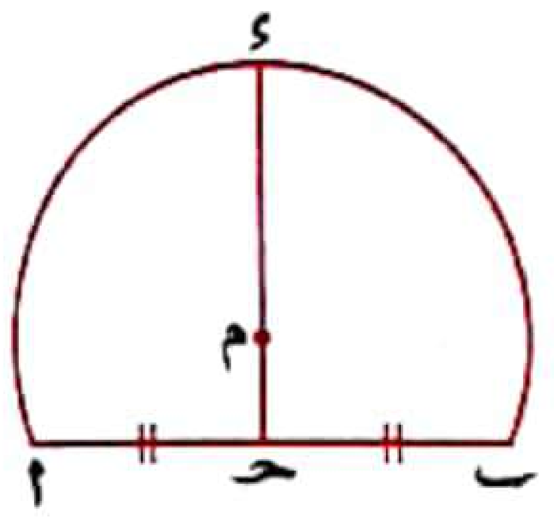
إذا كان : أس = ب حـ

فإن : س ص = .............. سم

(أ) ٤　　(ب) ٦

(جـ) ٨　　(د) ٩

(٨) فى الشكل المقابل :




أ ، ب ، ء ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

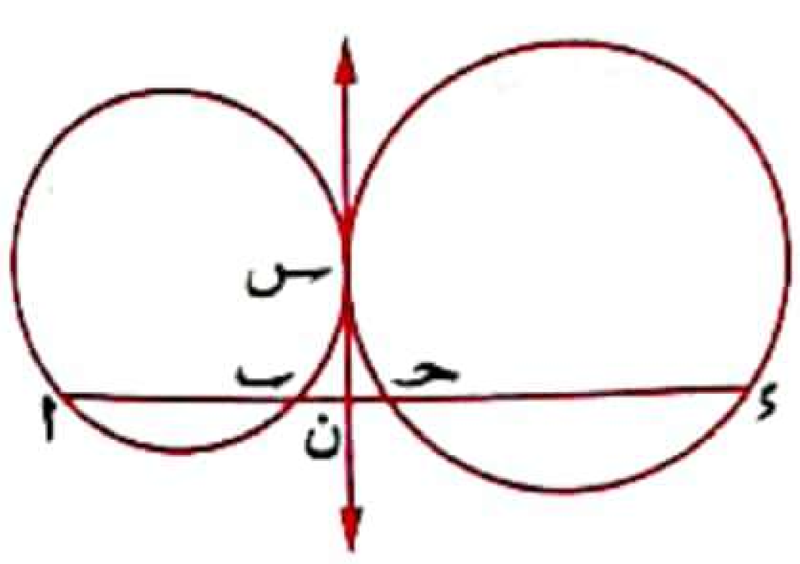
، ء ، م ، حـ على استقامة واحدة

، أب = ٢٤ سم ، ءحـ = ١٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة = .............. سم

(أ) ٩　　(ب) ٨　　(جـ) ١٢　　(د) ١٣

**١٥** فى الشكل المقابل :




دائرتان متماستان من الخارج فى س

، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يقطع إحدى الدائرتين فى أ ، ب ويقطع الأخرى

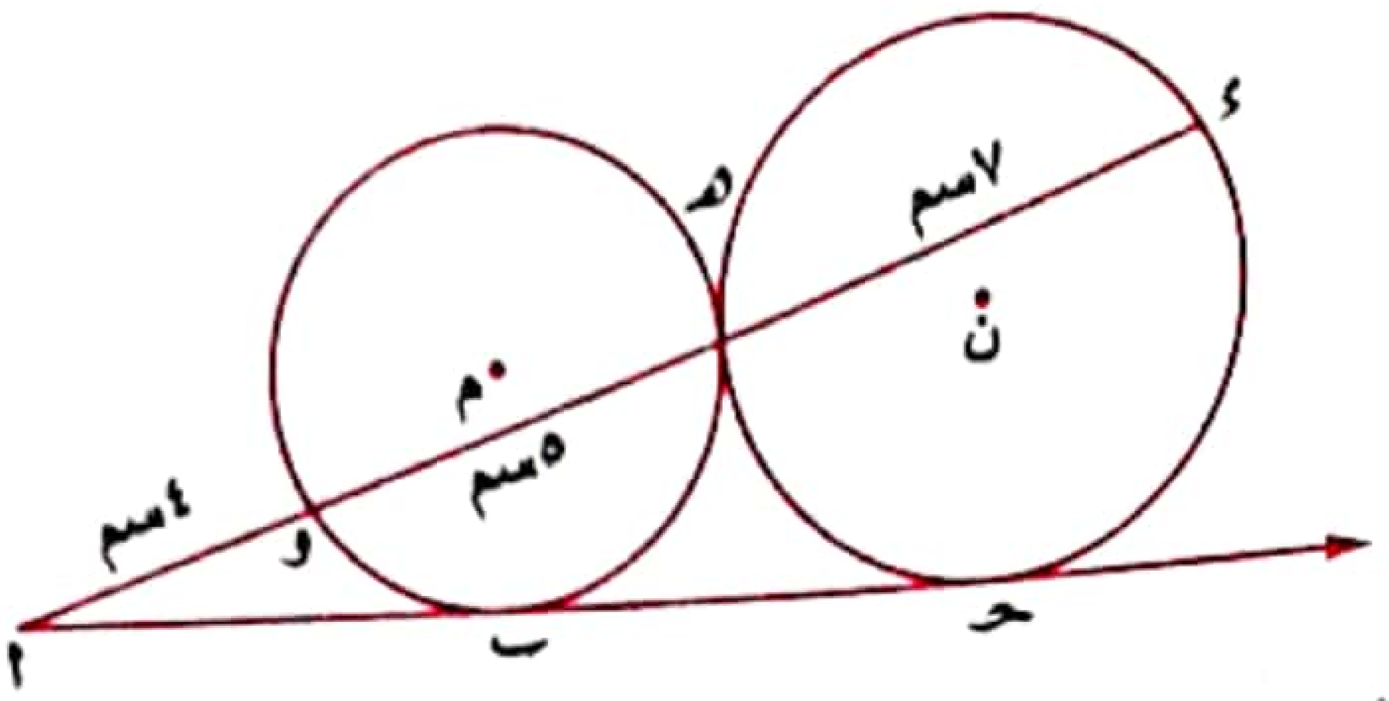
فى حـ ، ء ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س فى نقطة ن

**أثبت أن :** $\frac{\text{ن ب}}{\text{ن حـ}} = \frac{\text{ن ء}}{\text{ن أ}}$

**١٦** دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، رسم من حـ القطعتان

$\overline{\text{حـ س}}$ ، $\overline{\text{حـ ص}}$ مماستين للدائرتين عند س ، ص **أثبت أن :** حـ س = حـ ص

١٧ في الشكل المقابل :




الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ

، أحـ يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عند حـ

، أهـ يقطع الدائرتين عند و ، ء على الترتيب حيث أ و = ٤ سم ، و هـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

أثبت أن : ب منتصف أحـ

---

١٨ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا ، أء ، ب هـ ارتفاعان فيه متقاطعان في و

أثبت أن : $\frac{\text{أهـ} \times \text{أحـ}}{\text{ب و} \times \text{و هـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{و ء}}$

---

١٩ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٨ سم ، م نقطة بحيث م و = ١٢ سم ، رسم من م قاطع للدائرة يقطعها في أ ، ب حيث أ ∈ م ب فإذا كان أ ب = ١١ سم

فأوجد : (١) طول م أ

(٢) طول القطعة المماسة للدائرة من م «٥ سم ، ٤ $\sqrt{٥}$ سم»

---

٢٠ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ حيث ء ب = ٥ سم ، ء حـ = ٤ سم

إذا كان : أ حـ = ٦ سم

أثبت أن : (١) أحـ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، ء

(٢) Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

(٣) م (Δ أ ب ء) : م (Δ أ ب حـ) = ٥ : ٩

---

٢١ دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر أء في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، حـ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب × ب ء = ٩٥

---

٢٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، رسم ب هـ ⊥ أحـ فقطع أحـ في هـ ، أء في و

(١) أثبت أن : $(\text{أ ب})^2$ = أ و × أ ء (٢) أوجد : طول أ و «٤,٥ سم»

---

٢٣ أ ب وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، م حـ ⊥ أ ب يقطعه في حـ ويقطع الدائرة في ء

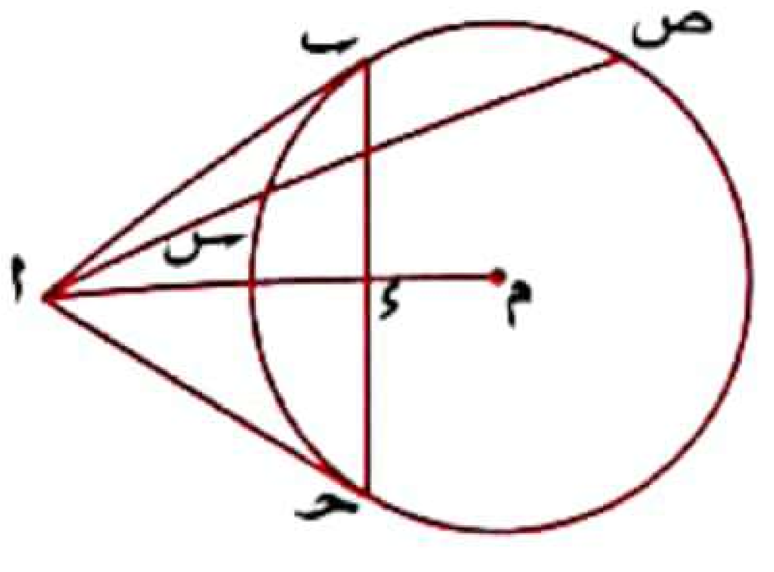
فإذا كان : حـ ء = ٢ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة. «٥ سم»

٢٤ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، حـ ∈ $\overline{أب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{حـ س}$ ⊥ $\overline{أب}$ فقطع الدائرة فى س ، رسم $\overline{ءهـ}$ وترًا فى الدائرة مارًا بالنقطة حـ أثبت أن : $(س حـ)^2$ = ء حـ × حـ هـ

٢٥ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، $\overline{حـ ء}$ وتر فيها عمودى على $\overline{أب}$ قطعه فى ن ، رسم الوتران $\overline{أهـ}$ ، $\overline{أو}$ فى جهتين مختلفتين من $\overline{أب}$ فقطعا $\overline{حـ ء}$ فى س ، ص على الترتيب.

أثبت أن : أ س × أ هـ = أ ص × أ و

٢٦ فى الشكل المقابل :




أ نقطة خارج دائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماستان للدائرة

، $\overline{أص}$ قاطعة لها فى س ، ص ، $\overline{ب حـ}$ ∩ $\overline{أم}$ = {ء}

أثبت أن : أ س × أ ص = أ ء × أ م

٢٧ $\overline{أب}$ قطر فى دائرة ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، حـ تقع خارج الدائرة بحيث ب حـ = أ ب ، رسمت $\overline{حـ ء}$ مماسة للدائرة فى ء ، ثم رسم $\overleftrightarrow{أء}$ فقطع المماس للدائرة من نقطة ب فى النقطة هـ

أثبت أن : $(حـ ء)^2$ = ٢ أ ء × أ هـ

٢٨ أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{أء}$ بحيث أ ء = ء هـ

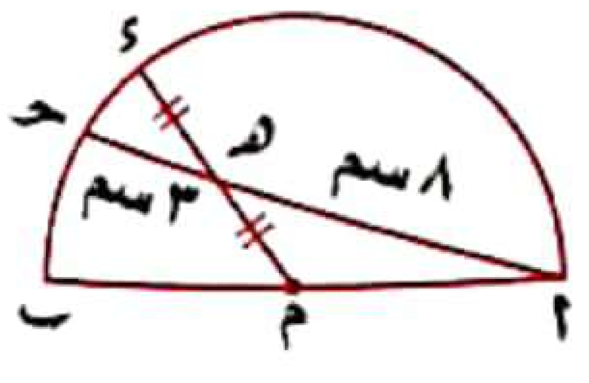
فإذا كان : $(أ ء)^2$ = ء ب × ء حـ

فأثبت أن : (١) Δ هـ حـ ء ~ Δ هـ أ حـ (٢) $(هـ حـ)^2$ = ٢ $(هـ ء)^2$

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :




نصف دائرة م

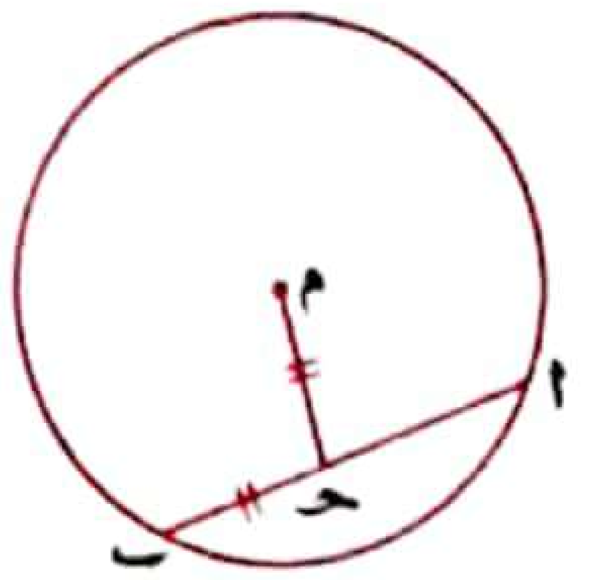
، م هـ = هـ ء ، هـ حـ = ٣ سم

، أ هـ = ٨ سم

فإن : م هـ = ............ سم

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ (د) $\frac{8}{3}$

(٢) فى الشكل المقابل :




دائرة م طول قطرها ١٢ سم

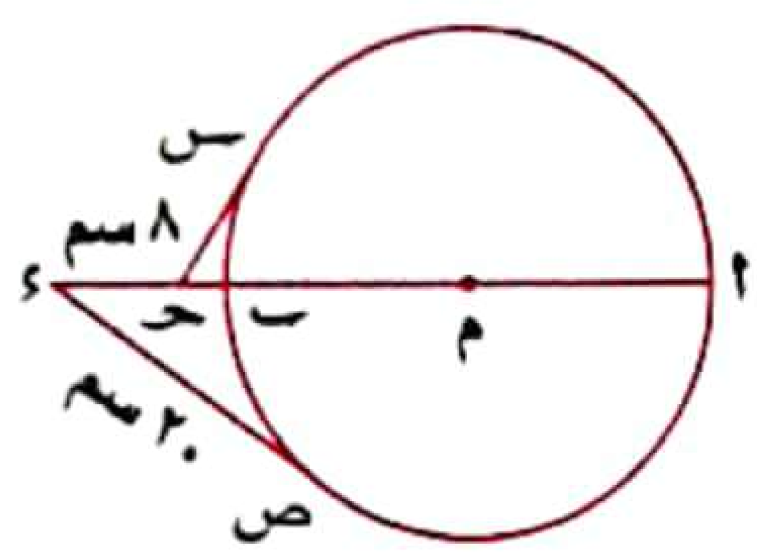
، م حـ = حـ ب

فإذا كان : ا حـ = (ب حـ + ١) سم

فإن : ا ب = .............. سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣) فى الشكل المقابل :




إذا كان $\overline{اب}$ قطراً فى دائرة م

، $\overline{حـ س}$ ، $\overline{ء ص}$ قطعتين

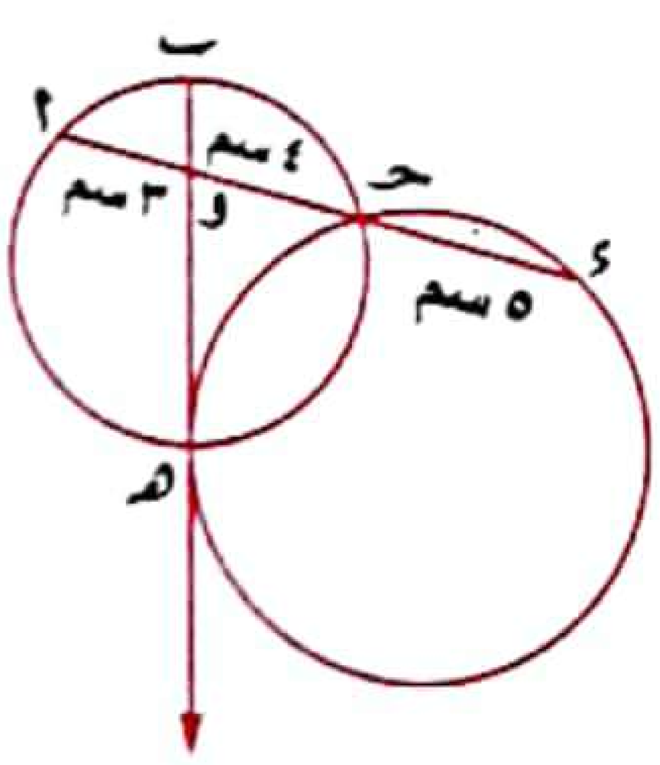
مماستين للدائرة م

، ا ب = ٣٠ سم ، حـ س = ٨ سم ، ء ص = ٢٠ سم

فإن : ء حـ = .............. سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤) فى الشكل المقابل :




دائرتان متقاطعتان فى حـ ، هـ

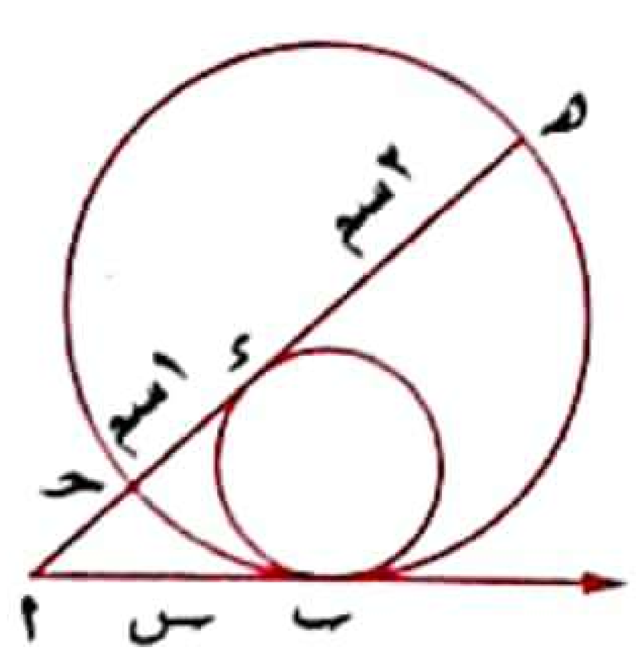
، $\overleftarrow{ب هـ}$ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

إذا كان : ا و = ٣ سم ، و حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : ب هـ = .............. سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(٥) فى الشكل المقابل :




دائرتان متماستان من الداخل فى ب

، $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اء}$ مماسان للدائرة

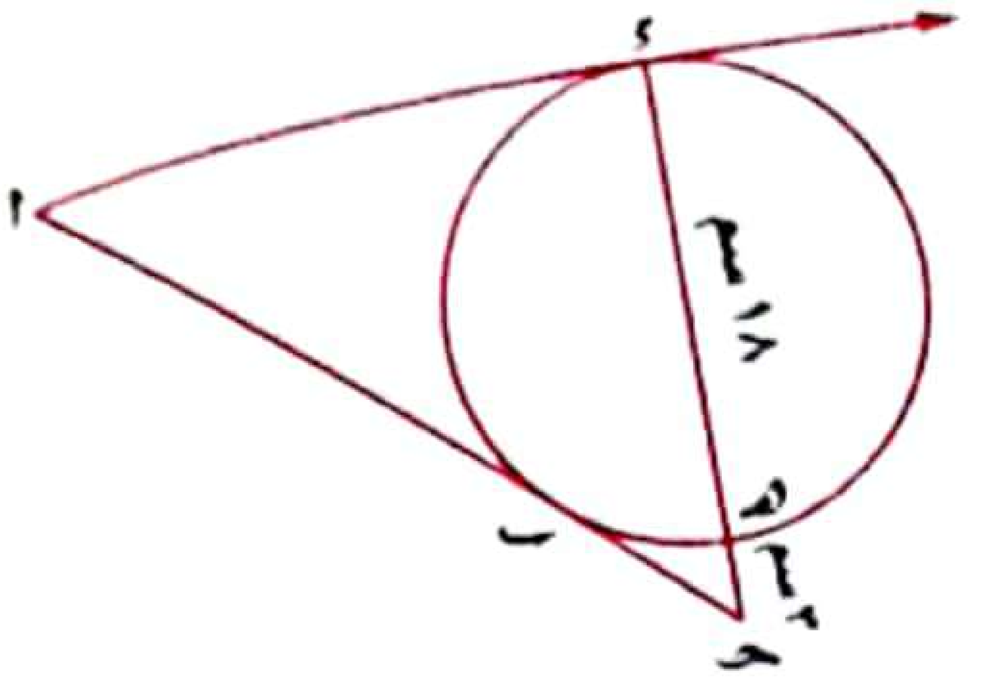
الصغرى عند ب ، ء

إذا كان : حـ ء = ١ سم ، ء هـ = ٢ سم ، ا ب = س سم

فإن : س = .............. سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢,٥ (د) ٣,٥

(٦) فى الشكل المقابل :




$\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسان لدائرة عند ء ، ب

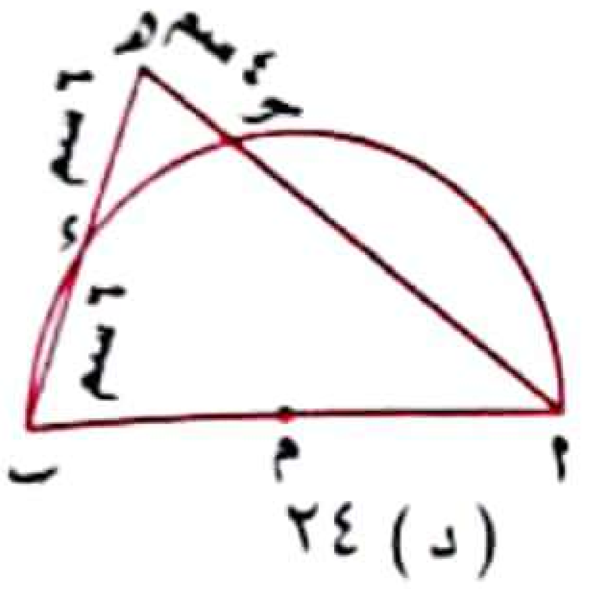
على الترتيب ، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ يقطع الدائرة فى هـ ، ء

إذا كان : جـ هـ = ٣ سم ، هـ ء = ١٨ سم

فإن : (أ جـ − أ ء) = ............ سم

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٧}$ (د) ٦ $\sqrt{٧}$

(٧) فى الشكل المقابل :

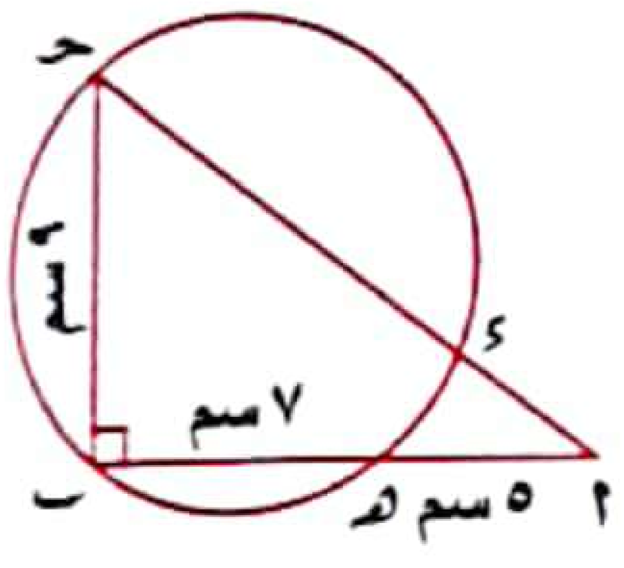



$\overline{\text{أب}}$ قطر فى نصف الدائرة م

فإن : نق = ............ سم

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٨) فى الشكل المقابل :

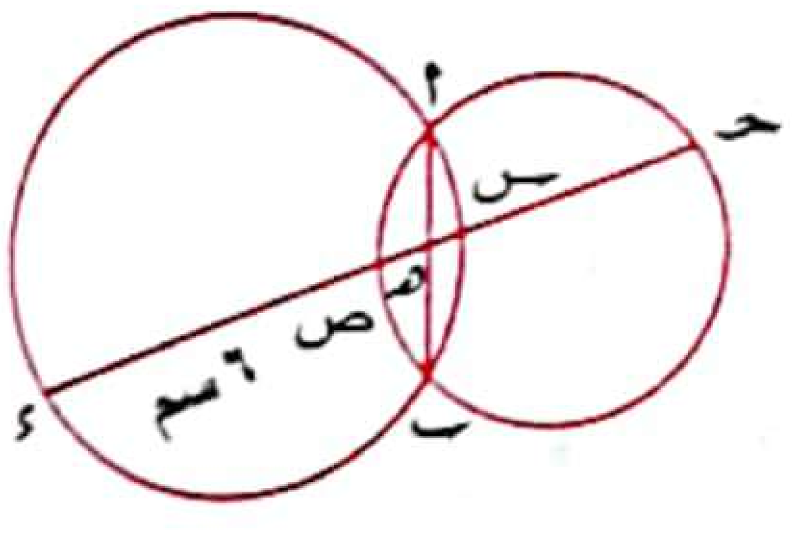



ء جـ = ............ سم

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

(٩) فى الشكل المقابل :



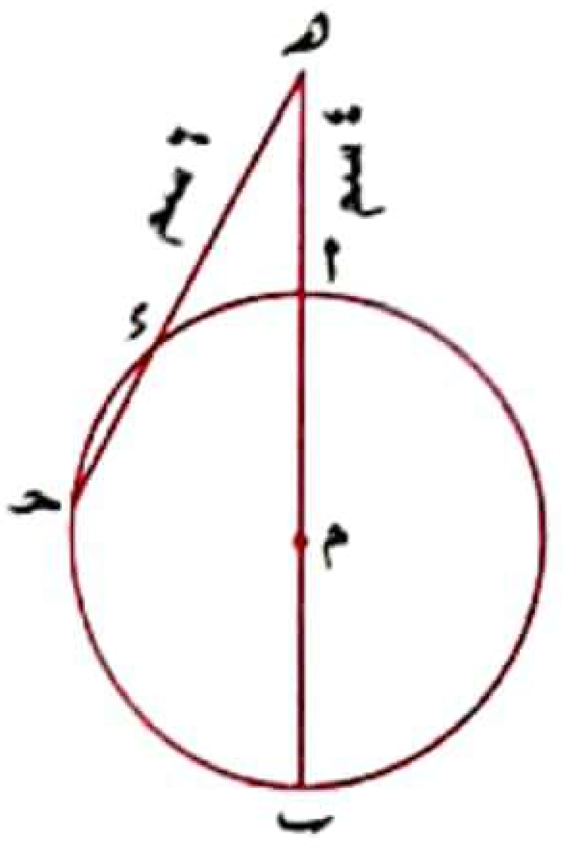

إذا كان : ء ص = ٦ سم

وكان : $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : جـ س = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٠) فى الشكل المقابل :




$\overline{\text{أب}}$ قطر فى دائرة م ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

لإيجاد طول نصف قطر الدائرة

يكون كافيًا الحصول على ............

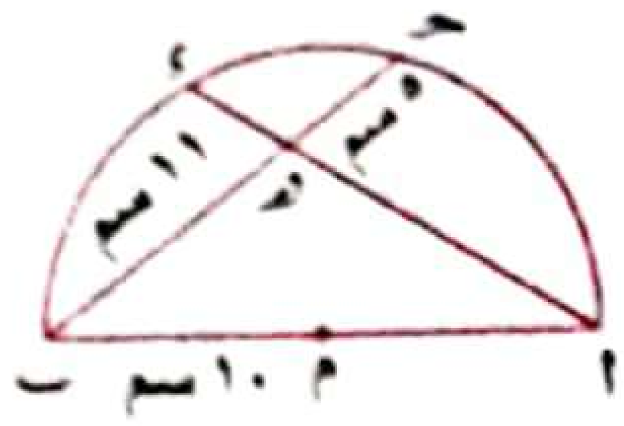
(أ) محيط Δ هـ ب جـ = ٢٦ سم فقط.

(ب) محيط Δ هـ م جـ = ٢٠ سم فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(١١) في الشكل المقابل :

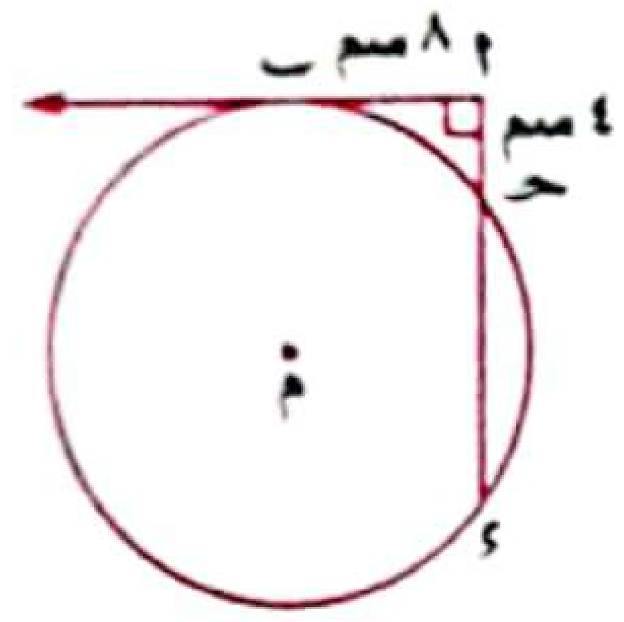



نصف دائرة م طول نصف قطر دائرته = ١٠ سم

فإن : هـ ء = .............. سم

(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(١٢) في الشكل المقابل :




$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

، أ ب = ٨ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ قاطع للدائرة م عند حـ ، ء

فإن : طول نصف قطر الدائرة م يساوي .............. سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

---

**٣٠** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦٠ مم ، أ حـ = ٤٠ مم ، ب حـ = ٤٥ مم ، أخذت نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث : أ ء = ١٦ مم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ بحيث أ هـ = ٢٤ مم

(١) أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب واحسب : طول $\overline{\text{ء هـ}}$

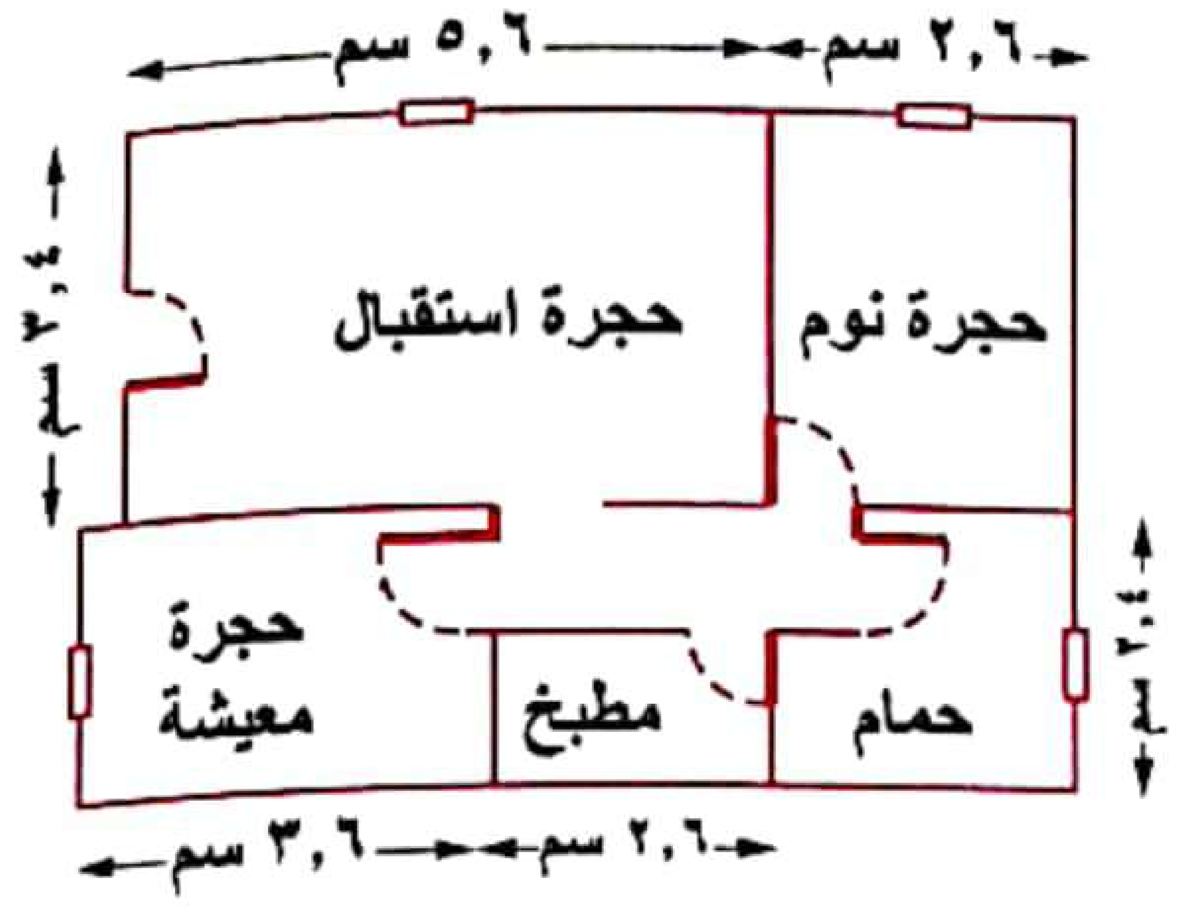
(٢) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = {ن} فأثبت أن : Δ ء ن ب ~ Δ حـ ن هـ

واحسب : طول كل من $\overline{\text{هـ ن}}$ ، $\overline{\text{ن حـ}}$ «١٨ مم ، ٢١,٦ مم ، ١٤,٤ مم»

# تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** 📖 يوضح الشكل المقابل مخططًا لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد :




(١) أبعاد حجرة الاستقبال.

(٢) أبعاد حجرة النوم.

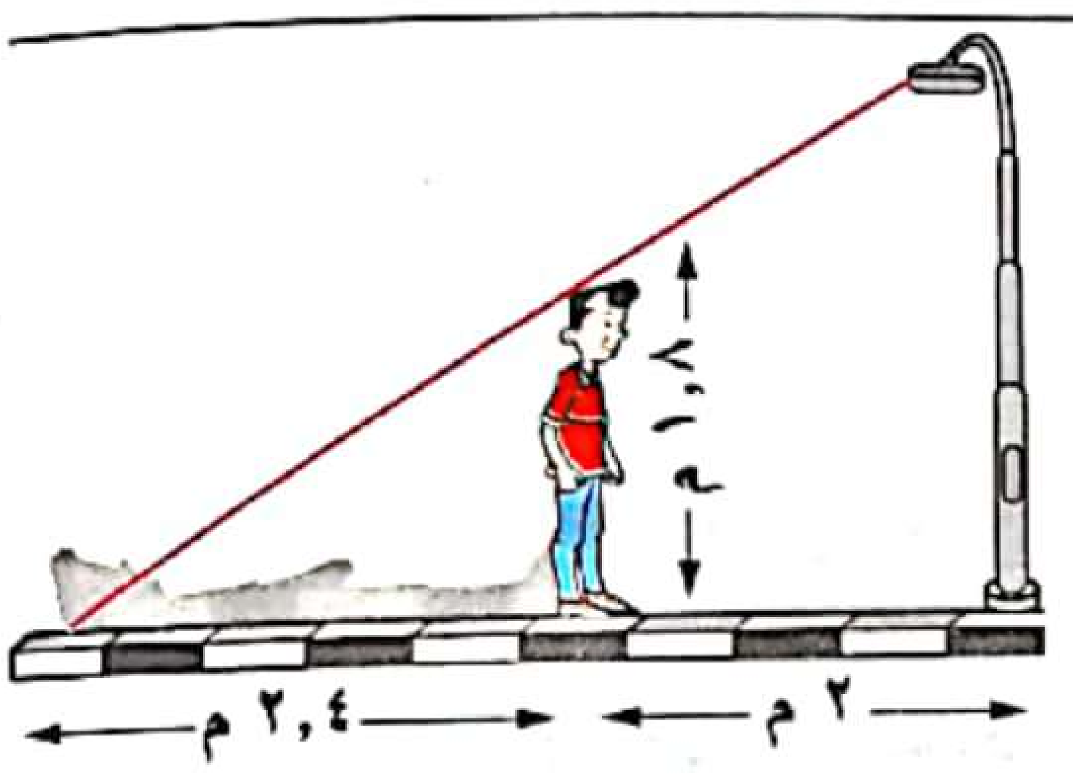
(٣) مساحة حجرة المعيشة.

(٤) مساحة الوحدة السكنية.

---

**٢** رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود إنارة وعلى بُعد ٢ متر من قاعدته فإذا وُجد أن طول ظل الرجل الناتج عن إنارة العمود هو ٢,٤ متر

فأوجد ارتفاع العمود.

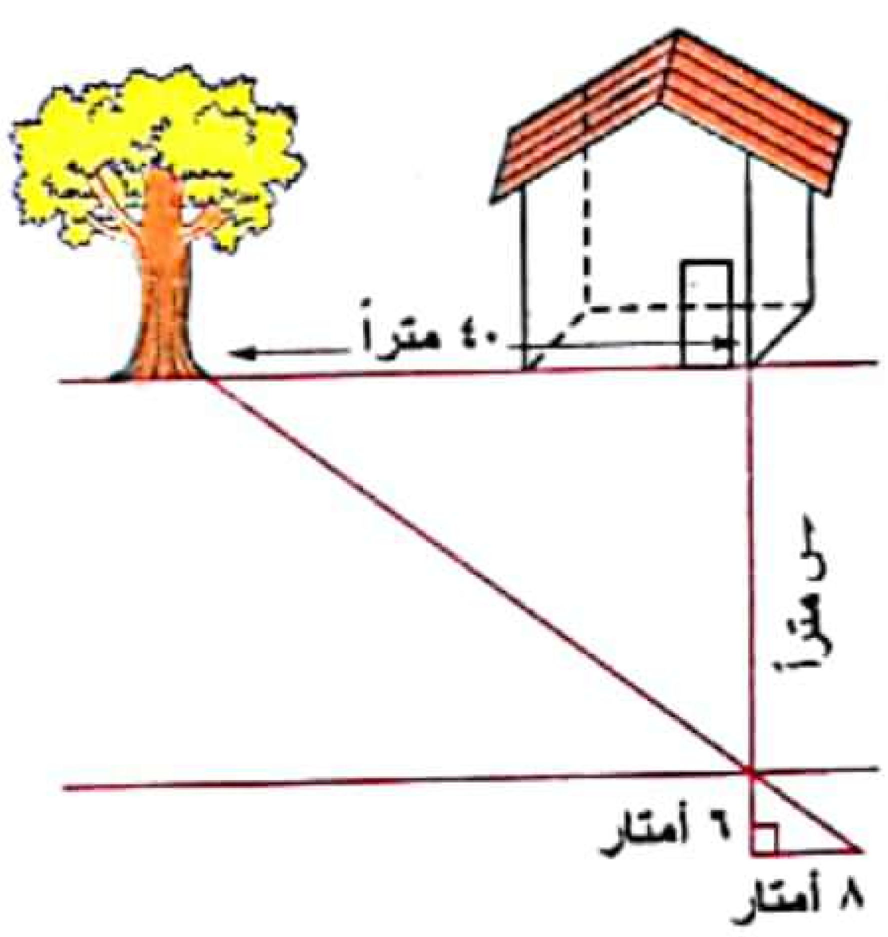



«٣,٣ متر»

---

**٣** 📖 أوجد المسافة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١)




«٣٠ مترًا»

(٢)

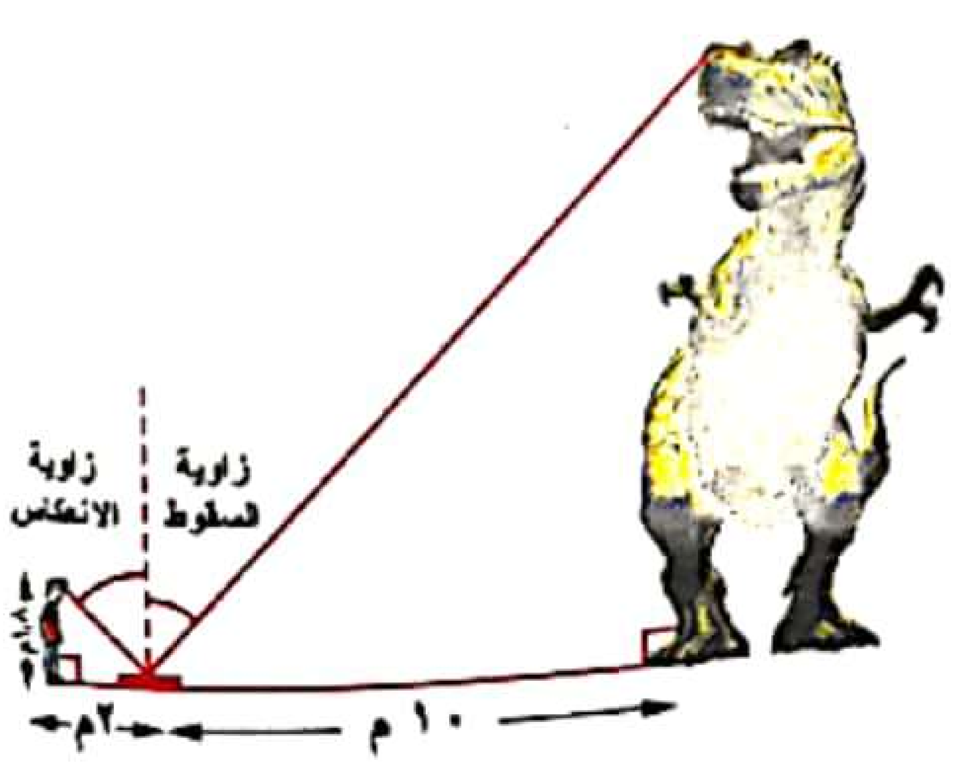



«٣٢ مترًا»

---

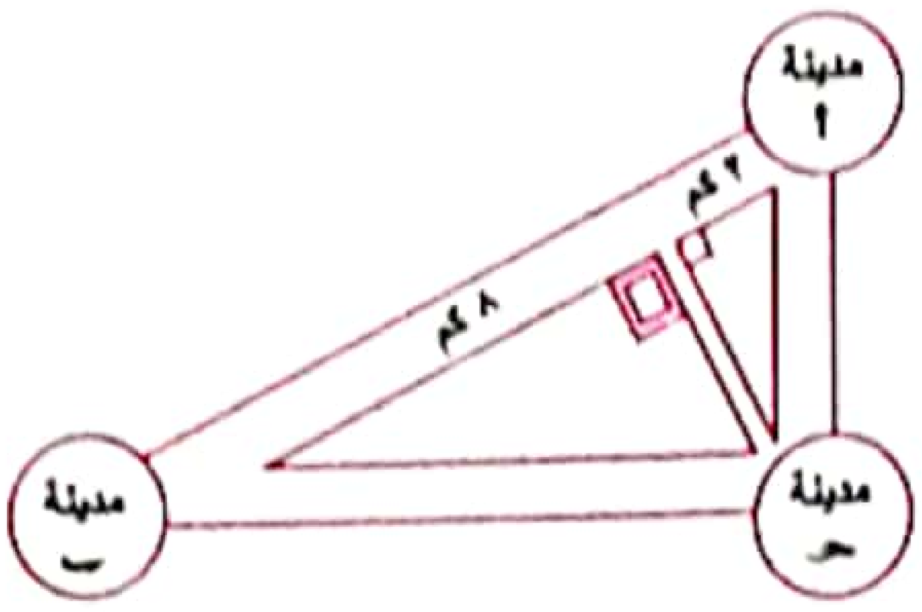
**٤** أراد رجل معرفة طول ديناصور فى أحد المتاحف ، فوضع مرآة فى وضع أفقى على الأرض على بُعد ١٠ أمتار من قدم الديناصور ورجع إلى الخلف حتى استطاع مشاهدة رأس الديناصور فى المرآة فكانت المسافة التى رجعها للخلف ٢ متر فإذا كان طول الرجل ١,٨ متر وإذا علمت أن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

فما ارتفاع الديناصور ؟




«٩ أمتار»

**٥** يبيِّن المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبى يؤدى إلى المدينة حـ عموديًا على الطريق السريع بين المدينتين أ ، ب علمًا بأن الطريق الواصل بين المدينتين أ ، حـ عمودى على الطريق الواصل بين المدينتين ب ، حـ



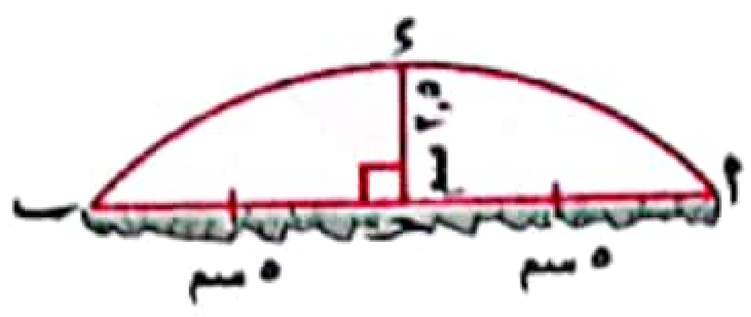

(١) كم ينبغى أن تبعد المحطة عن المدينة حـ ؟

(٢) ما البعد بين المدينتين ب ، حـ ؟

«٤ كم ، ٤ $\sqrt{5}$ كم»

---

**٦** وجد أحد مهندسى الآثار قطعة خشبية أثرية عبارة عن جزء من قرص خشبى دائرى. أراد هذا المهندس معرفة طول نصف قطر هذا القرص فعين النقطتين أ ، ب على القرص فوجد أن طول $\overline{أب}$ = ١٠ سم

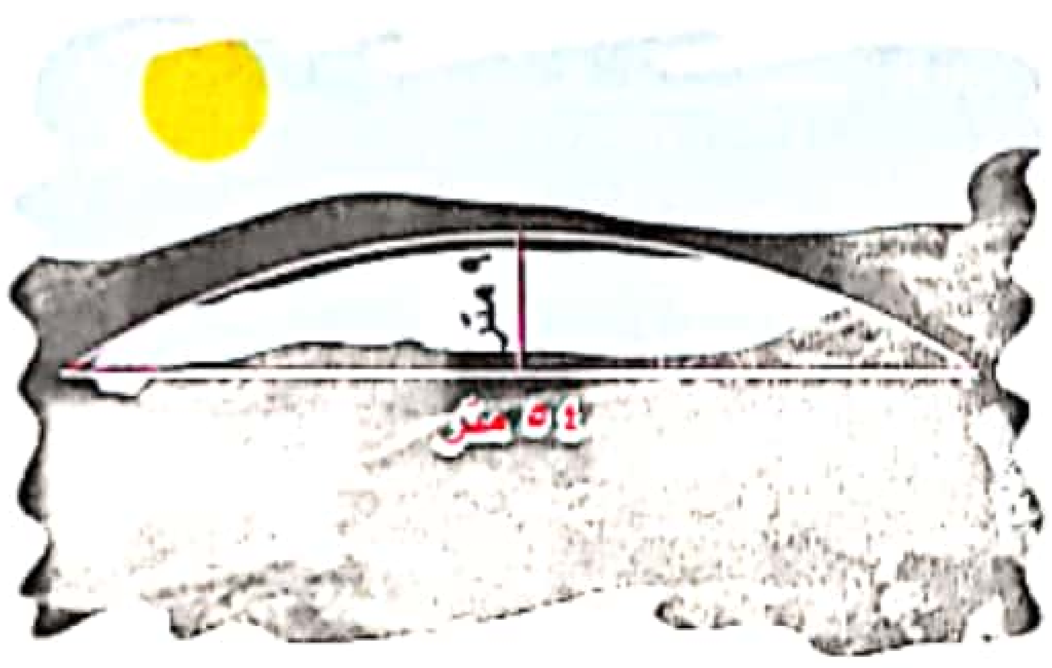



ثم رسم من النقطة حـ منتصف $\overline{أب}$ القطعة المستقيمة $\overline{ءحـ}$ بحيث $\overline{ءحـ} \perp \overline{أب}$ فوجد أن :

ءحـ = ٢,٥ سم واستطاع بذلك هندسيًا إيجاد طول نصف القطر. ترى كيف استطاع ذلك ؟! «٦,٢٥ سم»

---

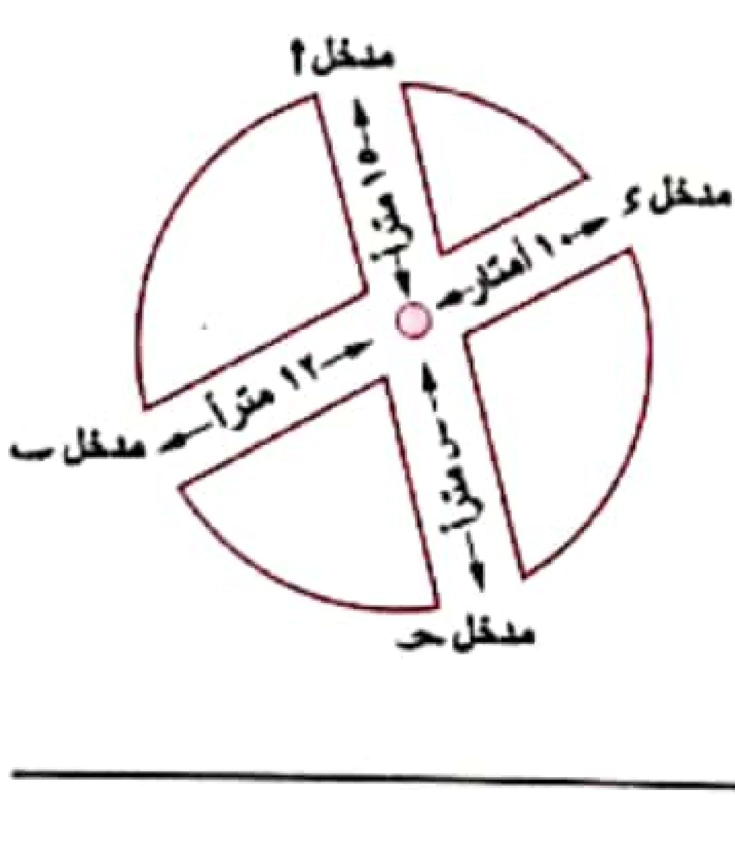
**٧** في إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعى. وجد الچيولوچيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل المقابل.



أوجد طول نصف قطر دائرة القوس. «٤٥ م»

---

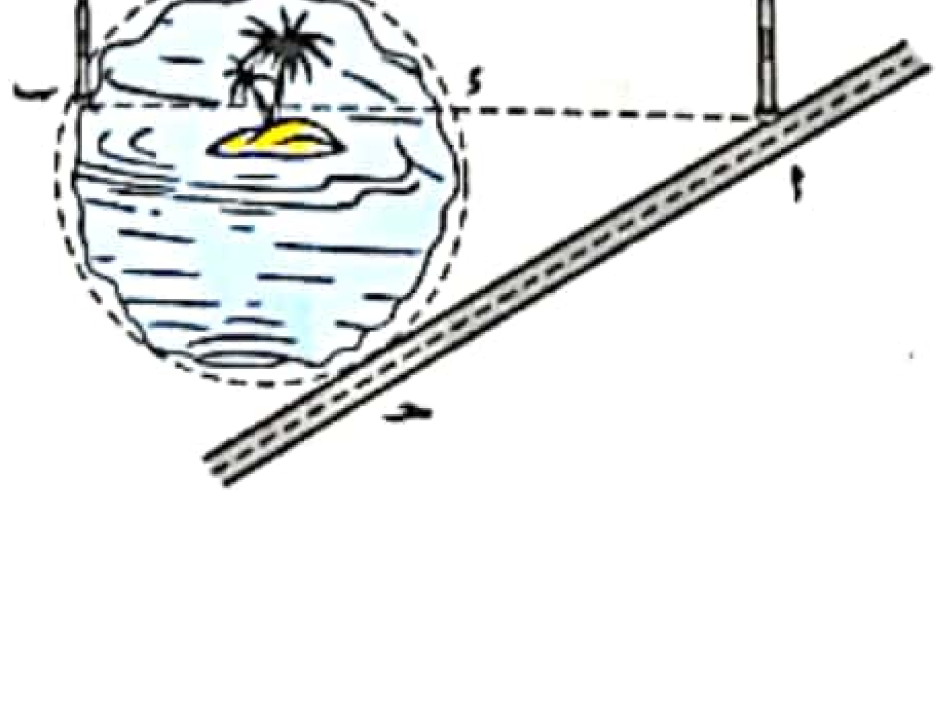
**٨** يبيِّن الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عن المدخل حـ




«٨ أمتار»

---

**٩** فى الشكل المقابل :



طريق يمس بحيرة دائرية الشكل ، ويريد أحد مهندسى شركة كهرباء وضع عمودين إنارة أحدهما على الطريق والآخر على الجهة الأخرى من البحيرة ويصل بينهما بسلك كهرباء.

فكيف يمكنك إيجاد طول هذا السلك ؟!

الوحدة **4**

# نظريات التناسب فى المثلث



## فى نهاية الوحـــدة

- تطبيقات حياتيـة على الوحدة الرابعة.

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

# دروس الوحدة

الدرس 1 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس 2 نظرية تاليس.

الدرس 3 منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الدرس 4 تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة (عكس نظرية ٣)

الدرس 5 تطبيقات التناسب فى الدائرة.

## نواتج التعلُّم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة» وعكسها ، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة وحالات خاصة منها.
- يحل تطبيقات وتمارين على نظرية تاليس العامة ونظرية تاليس الخاصة.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين» وعكسها.
- يوجد طول كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.
- يتعرف حقيقة أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.

## تمهيد ..

قبل البدء فى دراسة الوحدة الرابعة (نظريات التناسب فى المثلث) من المفيد والضرورى أن نستعرض مفهوم التناسب وبعض خواصه التى سوف نستخدمها أثناء دراستنا لهذه الوحدة :

◂ **يقال إن** ٢ ، ب ، حـ ، ٤ ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة إذا كان :

$$\frac{٢}{ب} = \frac{حـ}{٤} = \frac{هـ}{و} = ...$$

◂ **يقال إن** ٢ ، ب ، حـ ، ٤ ، ... فى تناسب متسلسل إذا كان :

$$\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{٤} = ...$$

وفى هذه الحالة يسمى ب الوسط المتناسب للعددين ٢ ، حـ حيث $ب^{٢} = ٢\,حـ$

كما يسمى حـ الوسط المتناسب للعددين ب ، ٤ حيث $حـ^{٢} = ب\,٤$ وهكذا ...

◂ **إذا كان** $\frac{٢}{ب} = \frac{حـ}{٤}$ حيث كل من ٢ ، حـ يسمى مقدم النسبة وكل من ب ، ٤ يسمى تالى النسبة فإن :

[١] $٢ \times ٤ = ب \times حـ$

[٢] $\frac{ب}{٢} = \frac{٤}{حـ}$ (مقلوبات النسبة تكون متساوية)

[٣] $\frac{٢}{حـ} = \frac{ب}{٤}$ $\left(\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}\right)$

[٤] $\frac{٢ + ب}{ب} = \frac{حـ + ٤}{٤}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}} \text{ للنسبة الأولى} = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}} \text{ للنسبة الثانية}\right)$

[٥] $\frac{٢ + ب}{٢} = \frac{حـ + ٤}{حـ}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}} \text{ للنسبة الأولى} = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}} \text{ للنسبة الثانية}\right)$

◂ **إذا كان** $\frac{٢}{ب} = \frac{حـ}{٤} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن :

[١] $\frac{٢ + حـ + هـ + ...}{ب + ٤ + و + ...}$ = إحدى النسب $\left(\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}\right)$

[٢] $\frac{٢ك + حـ م + هـ ن + ...}{ب ك + ٤ م + و ن + ...}$ = إحدى النسب

حيث ك ، م ، ن ، ... أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

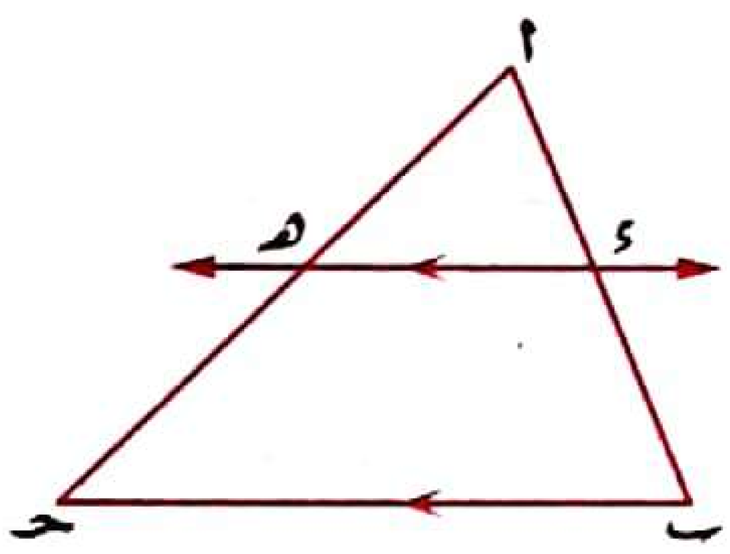


الدرس 1

# المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

**نظرية ١**

**إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.**




**المعطيات** $\triangle$ أ ب جـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

**المطلوب** إثبات أن : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

**البرهان** $\because \overleftrightarrow{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \triangle$ أ ب جـ $\sim \triangle$ أ د هـ (مسلمة التشابه)

ويكون : $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (١)

، $\because$ د $\in \overline{\text{أب}}$ ، هـ $\in \overline{\text{أجـ}}$

$\therefore$ أب = أد + دب ، أجـ = أهـ + هـجـ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أد} + \text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أهـ} + \text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

ويكون : $\frac{\text{أد}}{\text{أد}} + \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أهـ}} + \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

$\therefore 1 + \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = 1 + \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

$\therefore \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

ومن خواص التناسب نجد أن : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (وهو المطلوب)

### ملاحظة

من الشكل السابق :

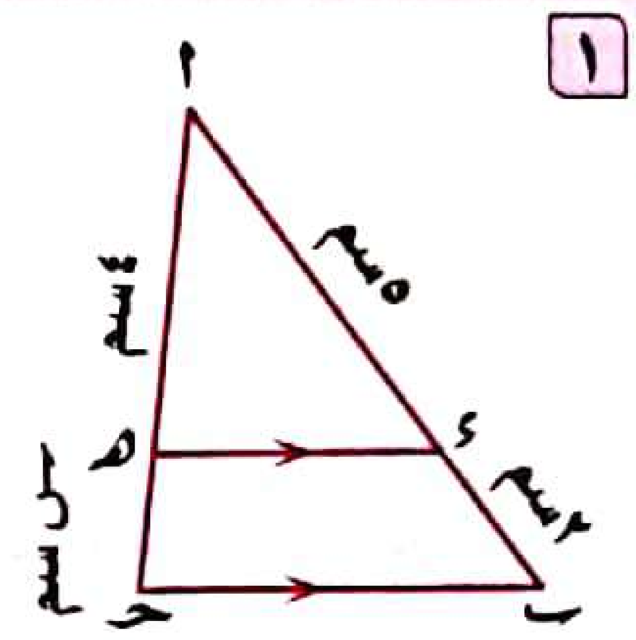
$\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ (نظرية) $\therefore \frac{\text{أء}+\text{ءب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}+\text{هـحـ}}{\text{هـحـ}}$ (راجع خواص التناسب)

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{هـحـ}}$

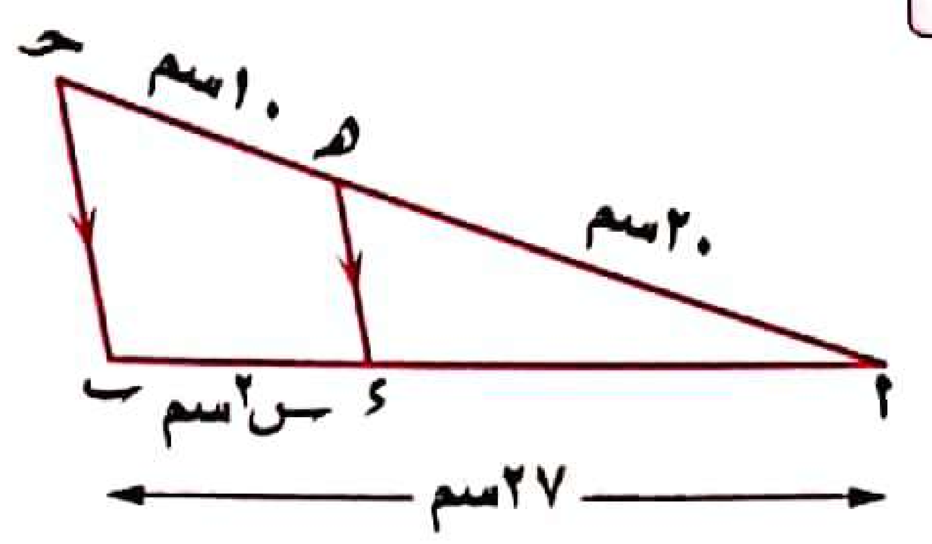
## مثال ١

فى كل من الأشكال الآتية : $\overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ أوجد قيمة س العددية :

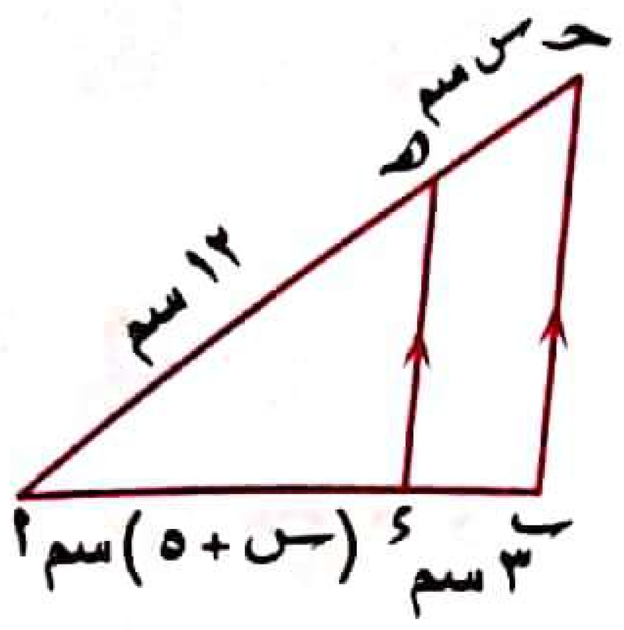
١




٢




٣




### الحل

١ $\because \overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ $\therefore \frac{٥}{٢} = \frac{٤}{\text{س}}$ $\therefore$ س = ١,٦ سم

٢ $\because \overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ $\therefore \frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{هـحـ}}$ $\therefore \frac{٢٧}{\text{س}^٢} = \frac{٣٠}{١٠}$ $\therefore \text{س}^٢ = ٩$

$\therefore$ س = ٣ سم

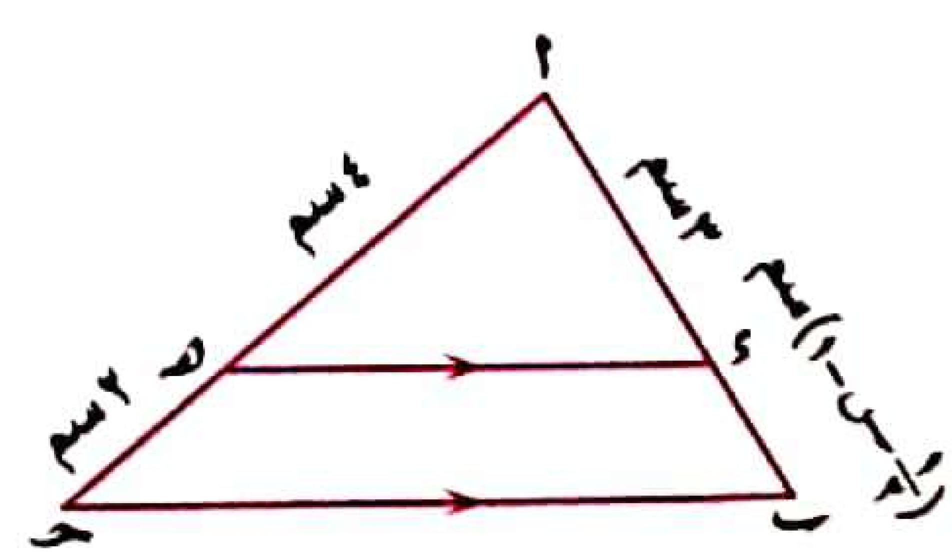
٣ $\because \overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$ $\therefore \frac{١٢}{\text{س}} = \frac{\text{س}+٥}{٣}$

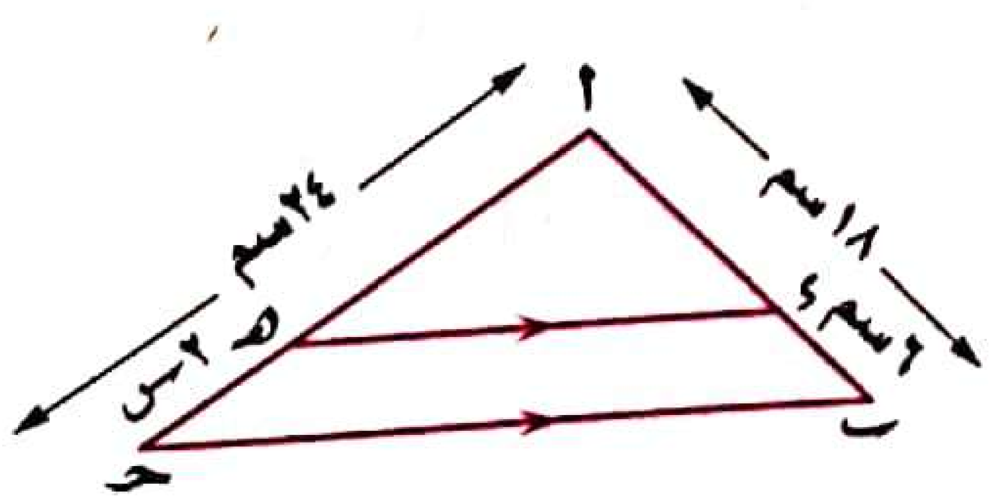
$\therefore \text{س}^٢ + ٥\text{س} = ٣٦$ $\therefore \text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣٦ = ٠$

$\therefore (\text{س}+٩)(\text{س}-٤) = ٠$ $\therefore$ س = −٩ (مرفوض) أ، س = ٤ سم

## حاول بنفسك

فى كل من الشكلين الآتيين : $\overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ أوجد قيمة س العددية :



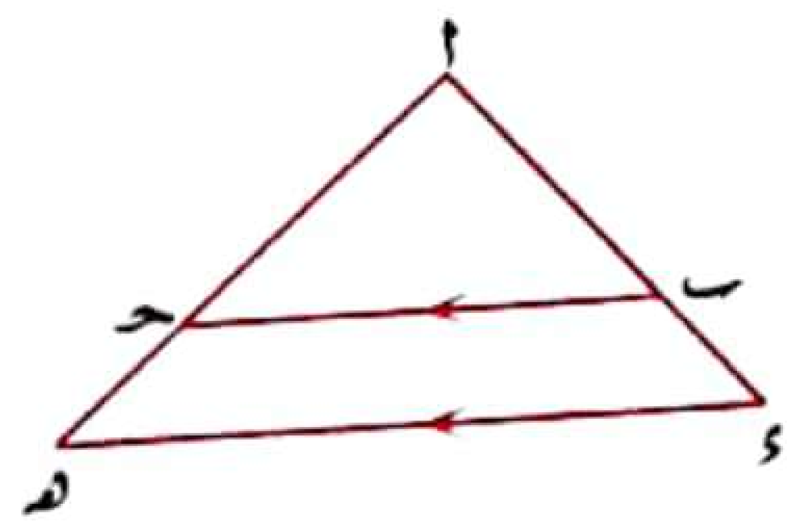



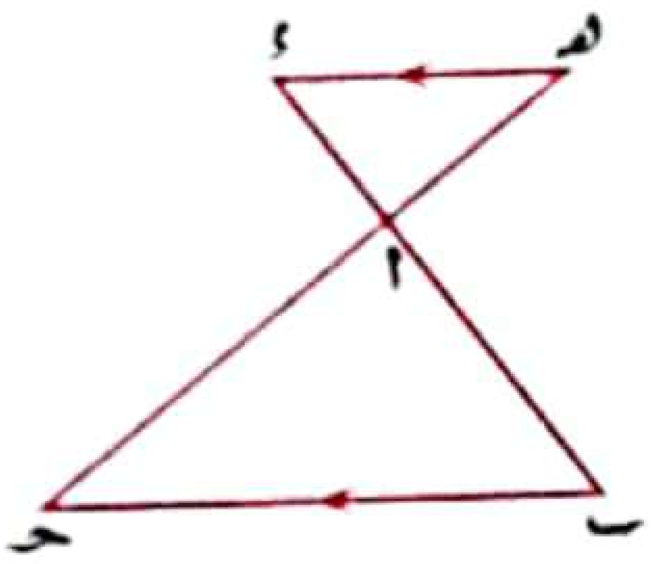
**نتيجة**

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب حـ يوازى ضلعًا من أضلاعه ، وليكن $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ فى ء ، هـ على الترتيب فإن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ هـ}}$ (كما فى الشكل)

• بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن :

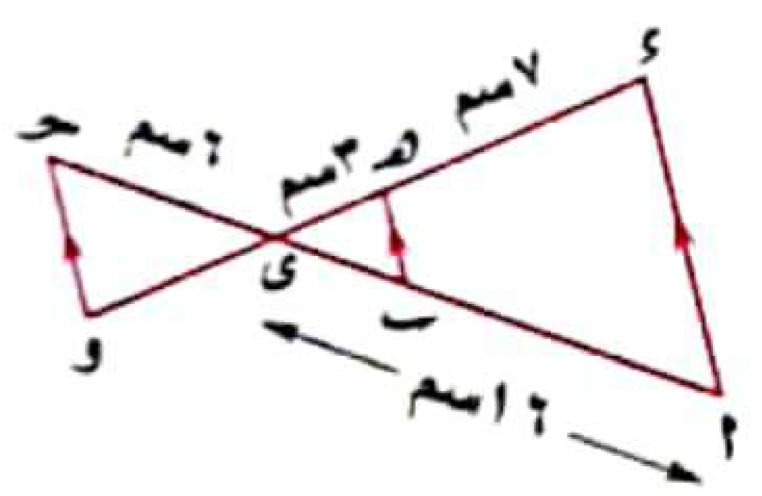
$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{حـ هـ}}$




**مثال ٢**

فى الشكل المقابل :




$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{و حـ}}$

، $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ء و}} = \{\text{ى}\}$ ، ء هـ = ٧ سم

، هـ ى = ٣ سم ، ى حـ = ٦ سم ، أ ى = ١٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ى و}}$ ، $\overline{\text{ى ب}}$

**الحل**

$\because$ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{و حـ}}$ $\quad$ $\therefore \frac{\text{أ ى}}{\text{ى حـ}} = \frac{\text{ء ى}}{\text{ى و}}$

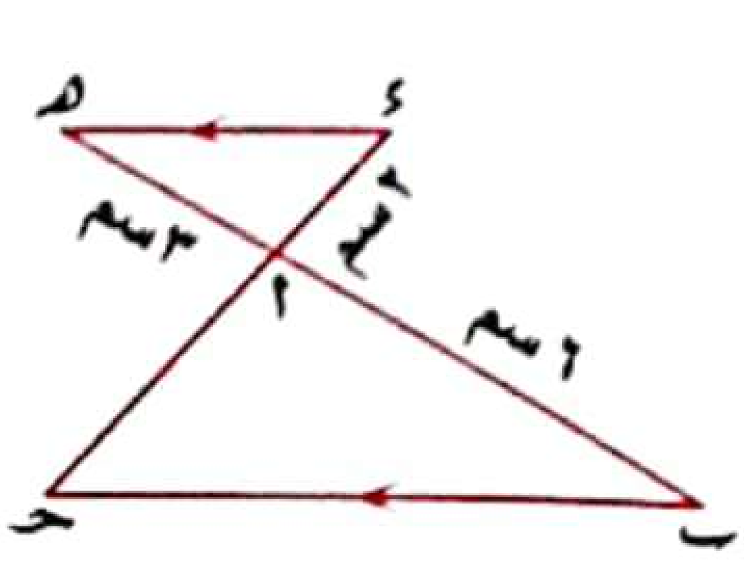
$\therefore \frac{١٦}{٦} = \frac{١٠}{\text{ى و}}$ $\quad$ $\therefore$ ى و $= \frac{٦ \times ١٠}{١٦} =$ ٣٫٧٥ سم

، $\because$ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ $\quad$ $\therefore \frac{\text{ى ب}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ى ء}}$

$\therefore \frac{\text{ى ب}}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$ $\quad$ $\therefore$ ى ب $= \frac{٣ \times ١٦}{١٠} =$ ٤٫٨ سم (وهو المطلوب)

**حاول بنفسك**

فى الشكل المقابل :



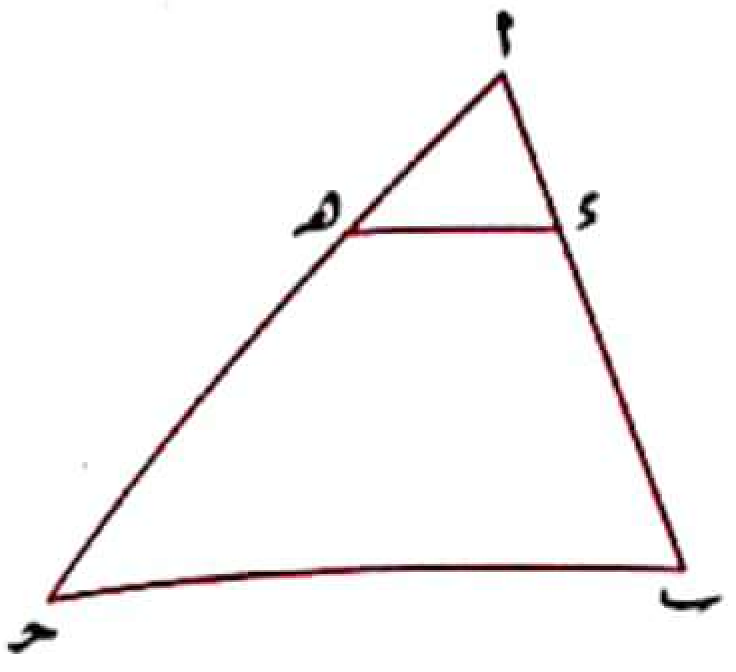

$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{أ}\}$ ، أ هـ = ٣ سم

، أ ب = ٦ سم ، أ ء = ٢ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$

## عكس نظرية ١

**إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.**



فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{ء هـ}$ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ فى ء ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ فى هـ ، أ ب حـ مثلث ، $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ حـ}$

**فإن :** $\frac{أ ء + ء ب}{أ ء} = \frac{أ هـ + هـ حـ}{أ هـ}$

( **لأن** $\frac{مقدم + تالى}{مقدم} = \frac{مقدم + تالى}{مقدم}$ )

$\therefore \frac{أ ب}{أ ء} = \frac{أ حـ}{أ هـ}$ ، $\because$ ∠ أ مشتركة

$\therefore \Delta$ أ ب حـ $\sim \Delta$ أ ء هـ $\therefore$ ∠ ب ≡ ∠ أ ء هـ وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overleftrightarrow{ء هـ} \parallel \overleftrightarrow{ب حـ}$

### ملاحظة

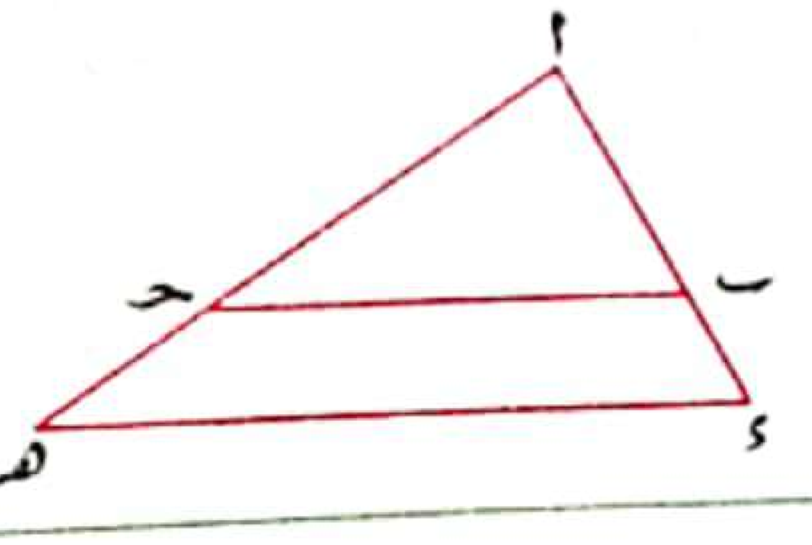
إذا رسم مستقيم (وليكن $\overleftrightarrow{ء هـ}$) خارج مثلث أ ب حـ ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ فى ء ، هـ على الترتيب

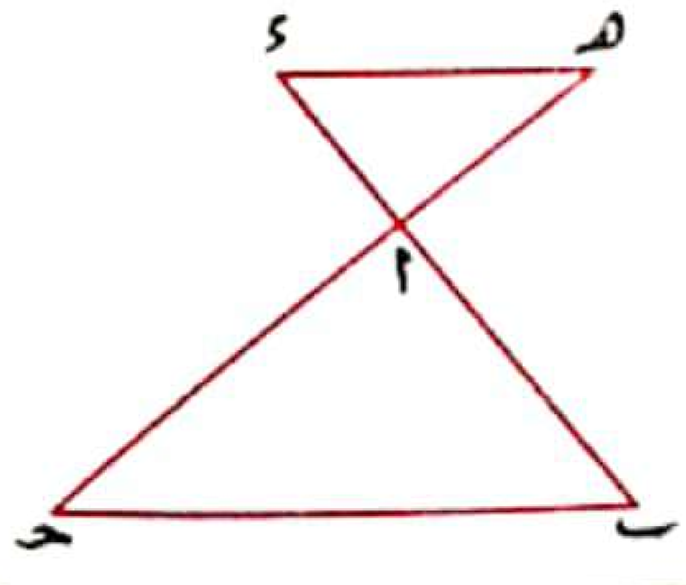
وكان $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ حـ}$ فإن : $\overleftrightarrow{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$

ففى الشكل المقابل :

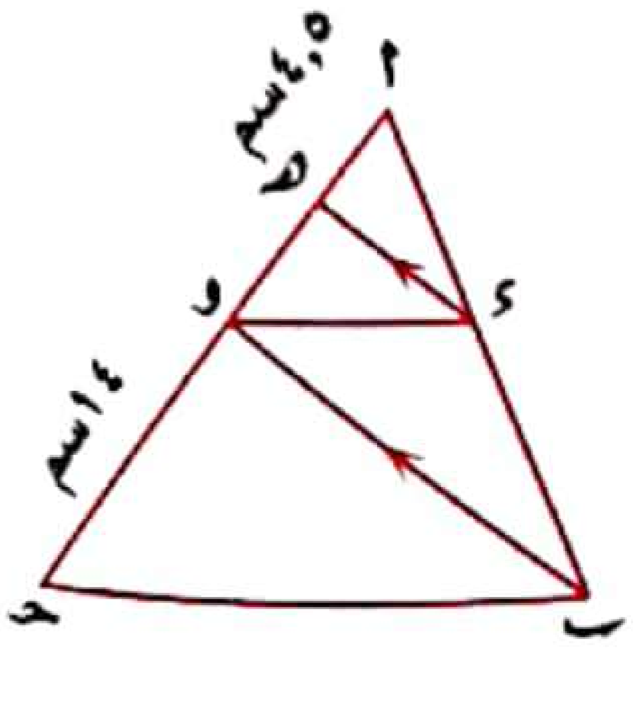
إذا كان : $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ حـ}$

فإن : $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$





## مثال ٣




فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب و}$ ، أ ء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب

، أ هـ = ٤,٥ سم ، و حـ = ١٤ سم فأثبت أن : $\overline{ء و} \parallel \overline{ب حـ}$

### الحل

$\because$ أ ء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب $\therefore \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{٣}{٤}$

، $\because \overline{ء هـ} \parallel \overline{ب و}$ $\therefore \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ و}$

$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٥}{هـ و}$ $\therefore$ هـ و = $\frac{٤,٥ \times ٤}{٣}$ = ٦ سم

∴ أو = ٤,٥ + ٦ = ١٠,٥ سم

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وحـ}} = \frac{١٠,٥}{١٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ **(وهو المطلوب)**

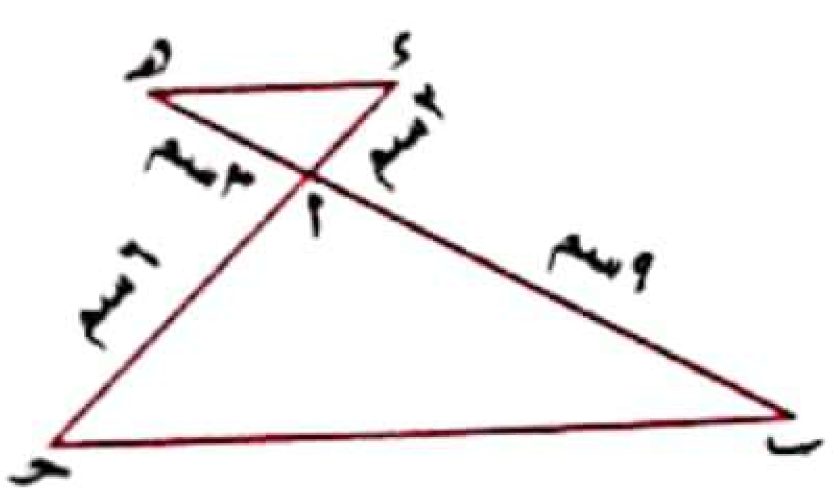
## حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ءحـ}} \cap \overline{\text{بهـ}} = \{\text{أ}\}$ ، أء = ٢ سم ، أهـ = ٣ سم

، أب = ٩ سم ، أحـ = ٦ سم

حدد ما إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ ولماذا ؟




## مثال ٤

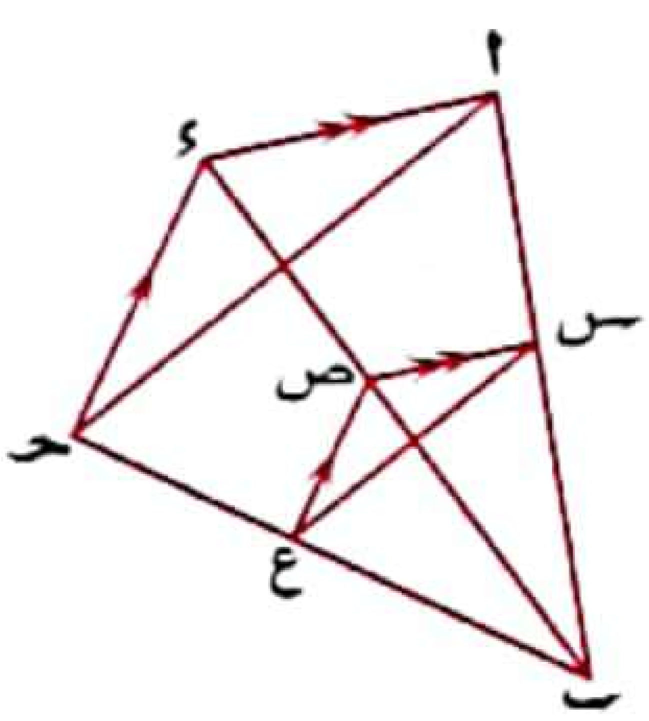
في الشكل المقابل :

أبحـء شكل رباعي ، ص ∈ $\overline{\text{بء}}$

، رسم $\overline{\text{صس}}$ // $\overline{\text{ءأ}}$ فقطع $\overline{\text{أب}}$ في س

، ورسم $\overline{\text{صع}}$ // $\overline{\text{ءحـ}}$ فقطع $\overline{\text{بحـ}}$ في ع

أثبت أن : $\overline{\text{سع}}$ // $\overline{\text{أحـ}}$




### الحل

في Δ أبء : ∵ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ∴ $\frac{\text{بس}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بص}}{\text{بء}}$ (١)

، في Δ بحـء : ∵ $\overline{\text{صع}}$ // $\overline{\text{حـء}}$ ∴ $\frac{\text{بع}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{بص}}{\text{بء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{بس}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بع}}{\text{بحـ}}$ ∴ في Δ أبحـ : $\overline{\text{سع}}$ // $\overline{\text{أحـ}}$ **(وهو المطلوب)**

## حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

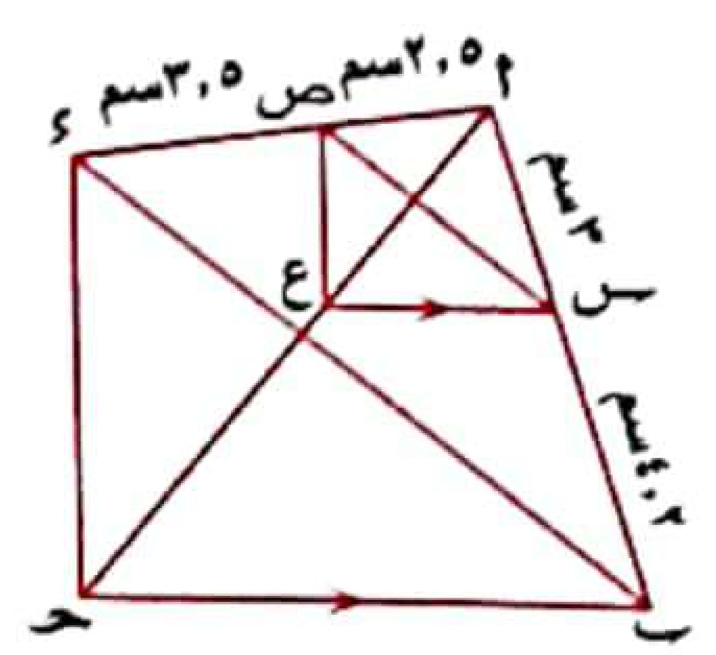
أبحـء شكل رباعي ، رسم قطراه $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$

، س ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث : أس = ٣ سم ، سب = ٤,٢ سم

، ص ∈ $\overline{\text{أء}}$ حيث : أص = ٢,٥ سم ، صء = ٣,٥ سم

، رسم $\overleftrightarrow{\text{سع}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أحـ}}$ في ع

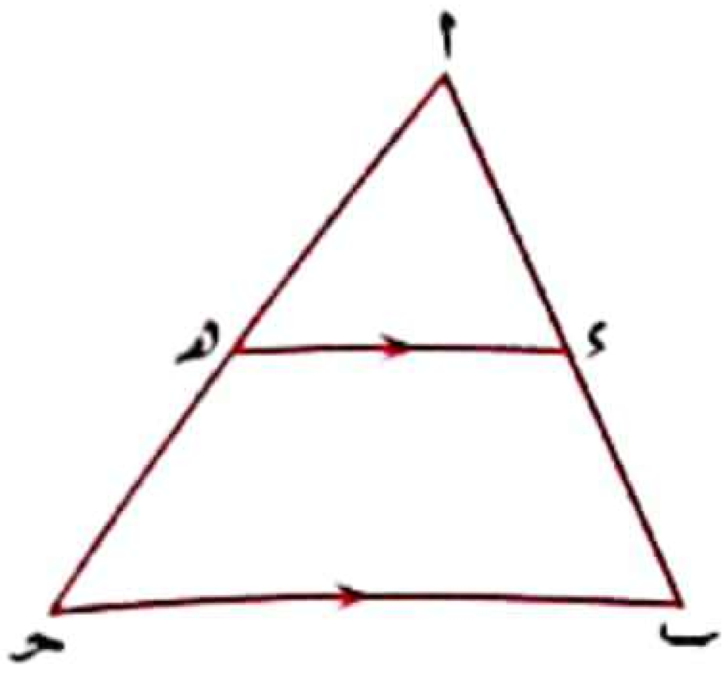
أثبت أن : [١] $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بء}}$ [٢] $\overline{\text{صع}}$ // $\overline{\text{حـء}}$



# 5 أسئلة على المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

**١** باستخدام الشكل المقابل اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :




(١) إذا كان : $\frac{أء}{ءب} = \frac{٥}{٣}$ فإن : $\frac{أب}{ءب} =$ ..............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

(٢) إذا كان : $\frac{أهـ}{أحـ} = \frac{٤}{٧}$ فإن : $\frac{حـهـ}{هـأ} =$ ..............

(أ) $\frac{٧}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣) إذا كان : $\frac{ءهـ}{بحـ} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أء}{ءب} =$ ..............

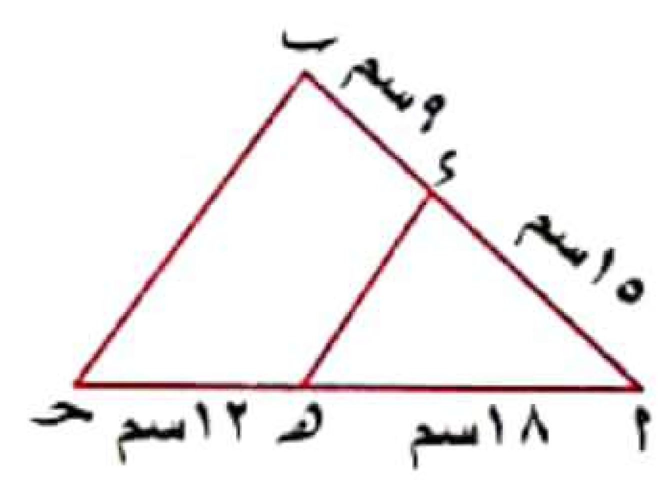
(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) ١,٥

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

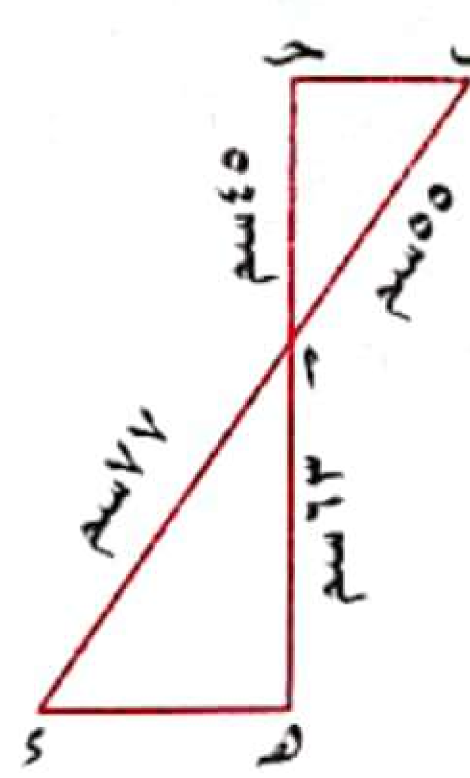
---

**٢** 📖 فى كل من الأشكال التالية ، حدد ما إذا كان $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ :

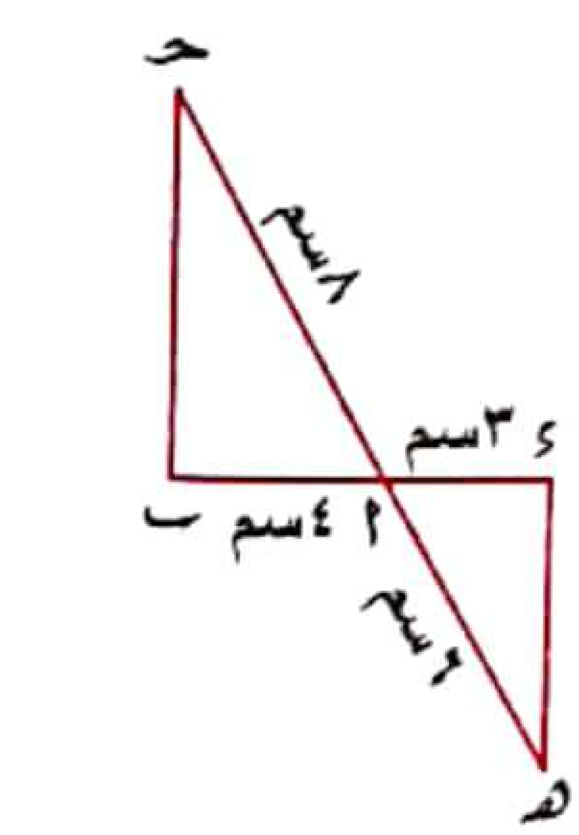
(١)



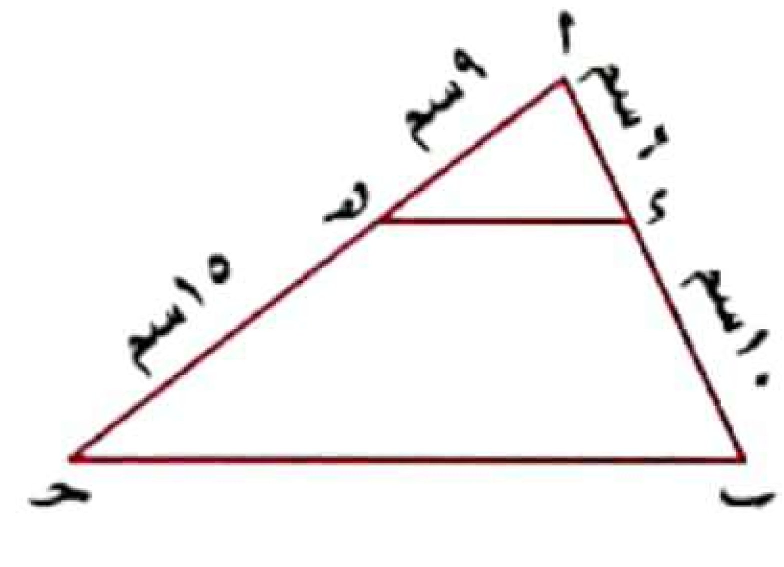

(٢)



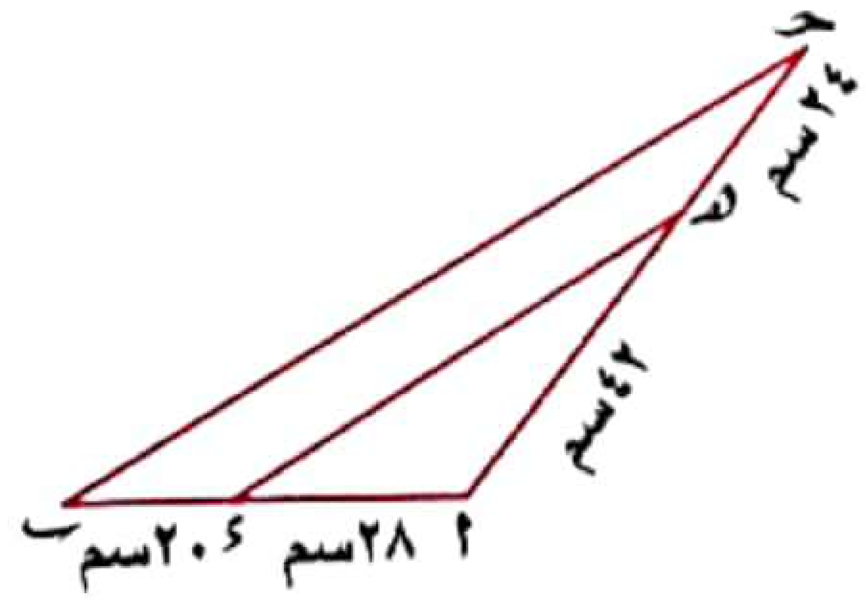

(٣)



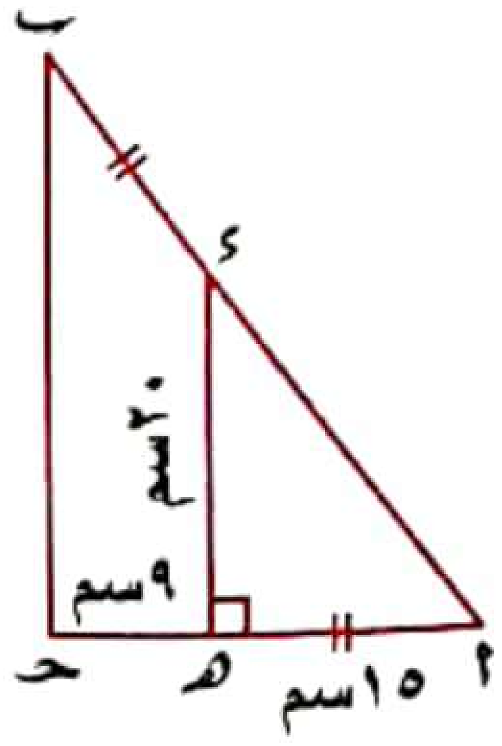

(٤)




(٥)

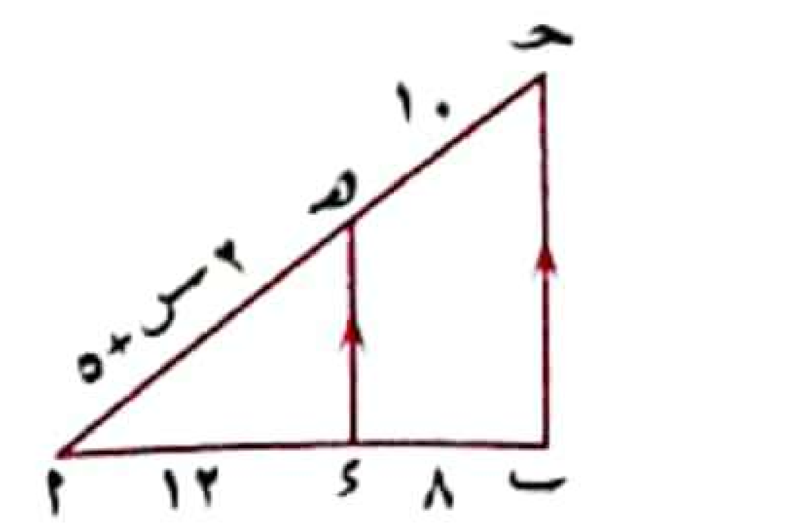



(٦)

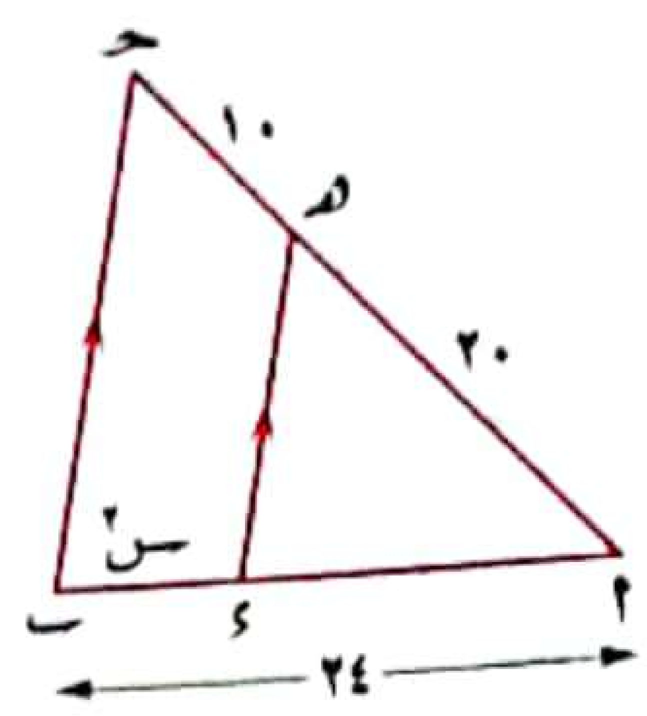


**٣** في كل من الأشكال التالية : ءهـ // ب حـ أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

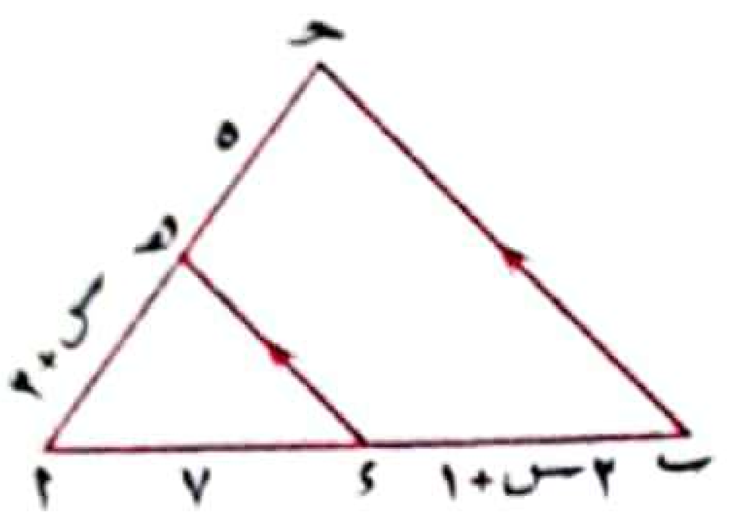
(١)




(٢)




(٣)

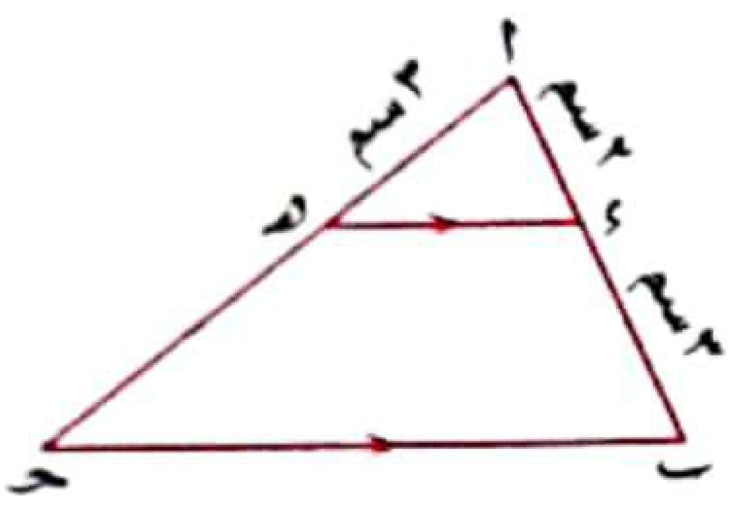



**٤** في الشكل المقابل :

إذا كان : ءهـ // ب حـ

، أء = ٢ سم ، أهـ = ءب = ٣ سم

أوجد : طول هـ حـ



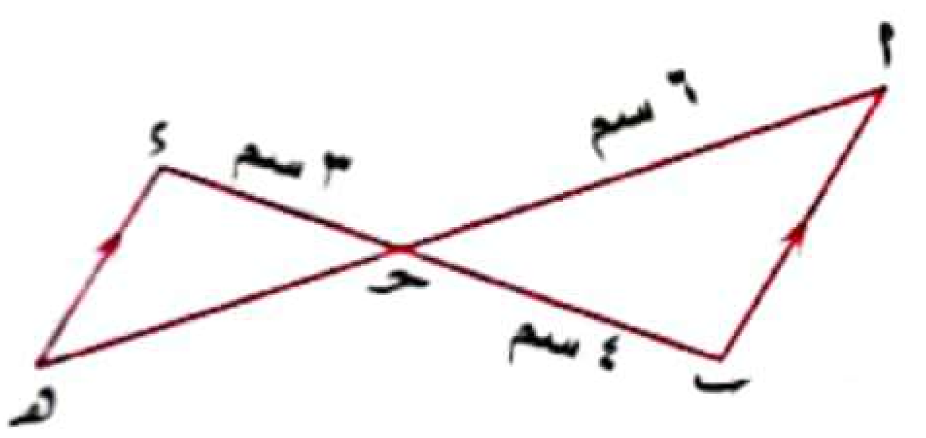

«٤٫٥ سم»

**٥** في الشكل المقابل :

أب // ءهـ ، أهـ ∩ ب ء = {حـ}

، أحـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٣ سم

أوجد : طول حـ هـ



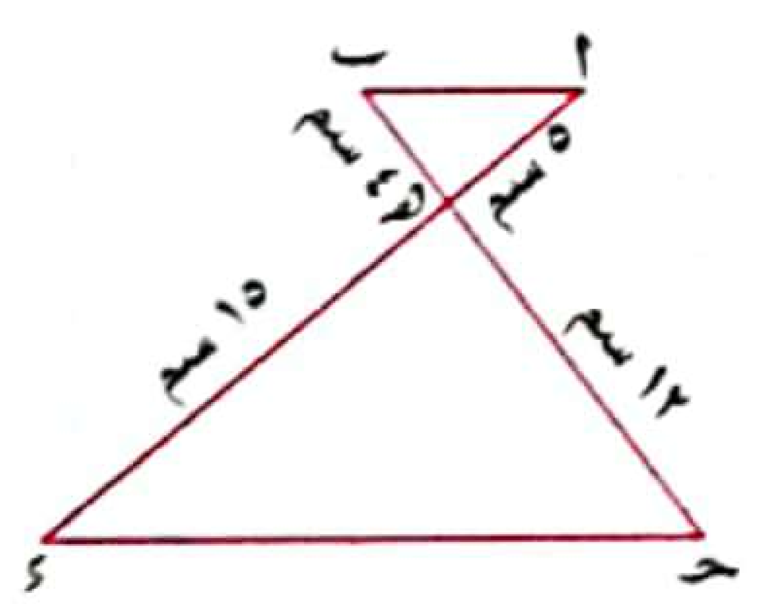

«٤٫٥ سم»

**٦** في الشكل المقابل :

إذا كان : أء ∩ ب حـ = {هـ} ، أهـ = ٥ سم

، ب هـ = ٤ سم ، حـ هـ = ١٢ سم ، ء هـ = ١٥ سم

أثبت أن : أب // حـ ء




**٧** س ص ∩ ع ل = {م} ، حيث س ع // ل ص ، فإذا كان : س م = ٩ سم

، ص م = ١٥ سم ، ع ل = ٣٦ سم أوجد : طول ع م

«١٣٫٥ سم»

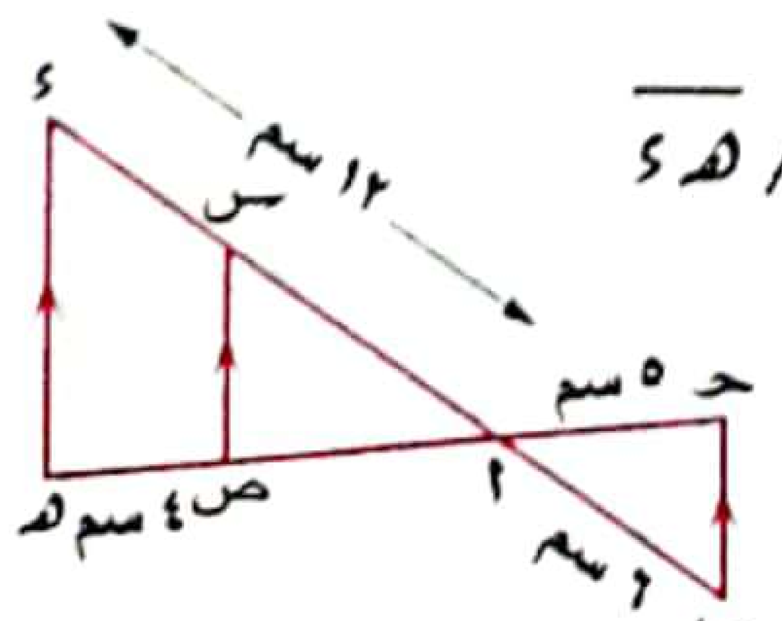
**٨** في الشكل المقابل :

حـ هـ ∩ ب ء = {أ} ، س ∈ أء ، ص ∈ أهـ حيث س ص // ب حـ // هـ ء

فإذا كان : أب = ٦ سم ، أحـ = ٥ سم

، أء = ١٢ سم ، هـ ص = ٤ سم

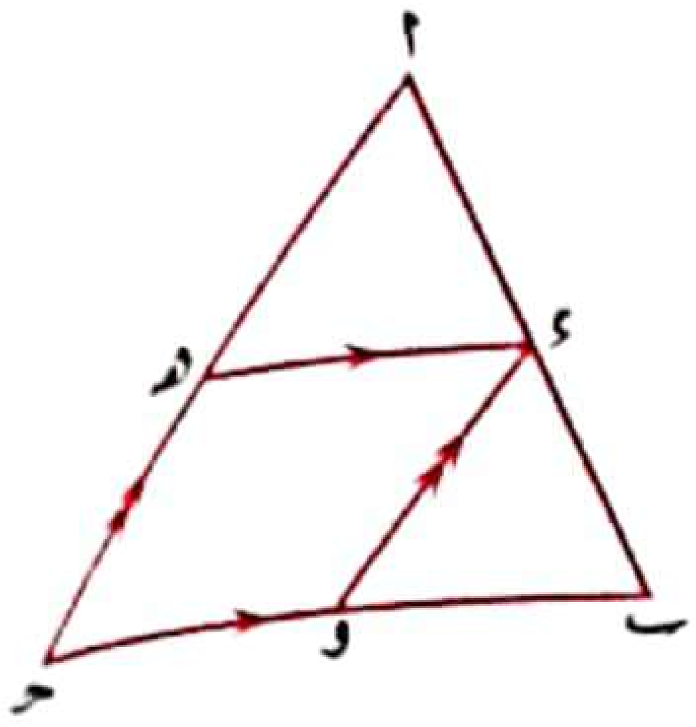
أوجد : طول كل من أهـ ، ء س




«١٠ سم ، ٤٫٨ سم»

**٩** لكل مما يأتى :

استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س (الأطوال بالسنتيمترات) :




(١) أء = ٤ ، ب ء = ٨ ، حـ هـ = ٦ ، أ هـ = س

(٢) أ هـ = س ، هـ حـ = ٥ ، أء = س - ٢ ، ء ب = ٣

(٣) أ ب = ٢١ ، ب و = ٨ ، و حـ = ٦ ، أء = س

(٤) أء = س ، ب و = س + ٥ ، ٢ ء ب = ٣ و حـ = ١٢

---

**١٠** س ص ع مثلث فيه : س ص = ١٤ سم ، س ع = ٢١ سم ، ل ∈ $\overline{\text{س ص}}$ بحيث

س ل = ٥,٦ سم ، م ∈ $\overline{\text{س ع}}$ حيث س م = ٨,٤ سم أثبت أن : $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

---

**١١** فى المثلث أ ب حـ ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ٥ أ هـ = ٤ هـ حـ إذا كان :

أء = ١٠ سم ، ء ب = ٨ سم حدد ما إذا كان : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ فسِّر إجابتك.

---

**١٢** أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، تقاطع قطراه $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ فى م فإذا كان :

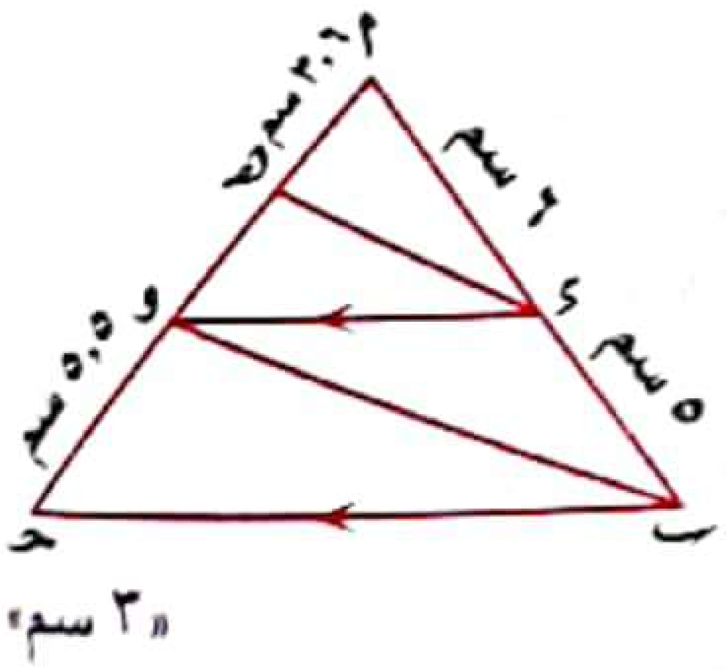
أ م = ٢,٥ سم ، ء ب = $٧\frac{١}{٣}$ سم ، م حـ = ٣ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

« $٣\frac{١}{٣}$ سم ، ٤ سم »

---

**١٣** فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أء = ٦ سم

، ب ء = ٥ سم ، أ هـ = ٣,٦ سم ، و حـ = ٥,٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـ و}}$ ثم أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$

« ٣ سم »

---

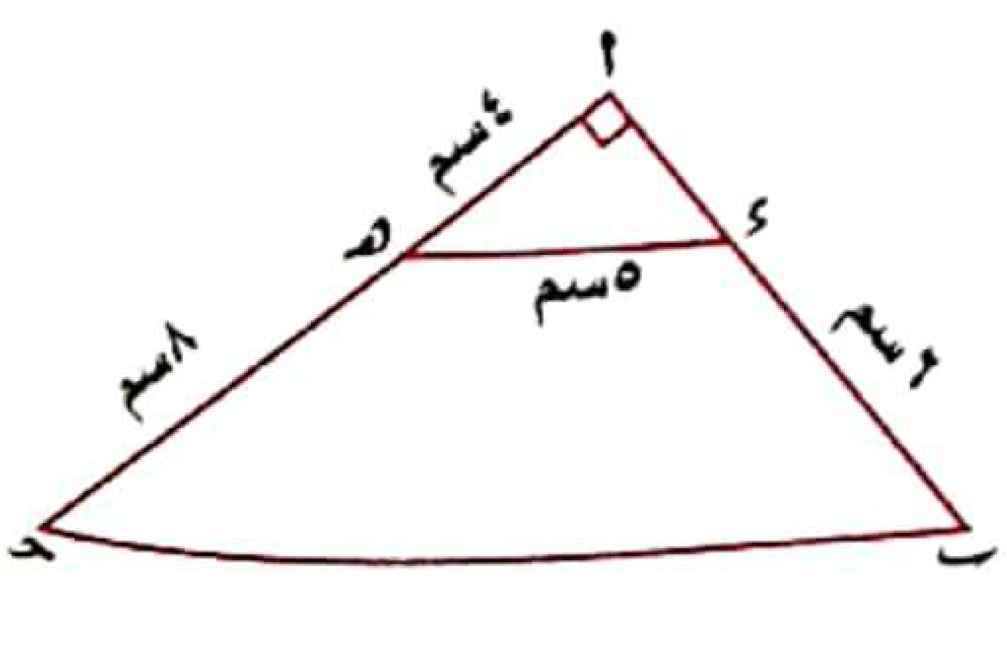
**١٤** أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ فإذا كان :

أ هـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ حـ = ١٠ سم ، هـ ء = ٧,٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

---

**١٥** فى الشكل المقابل :



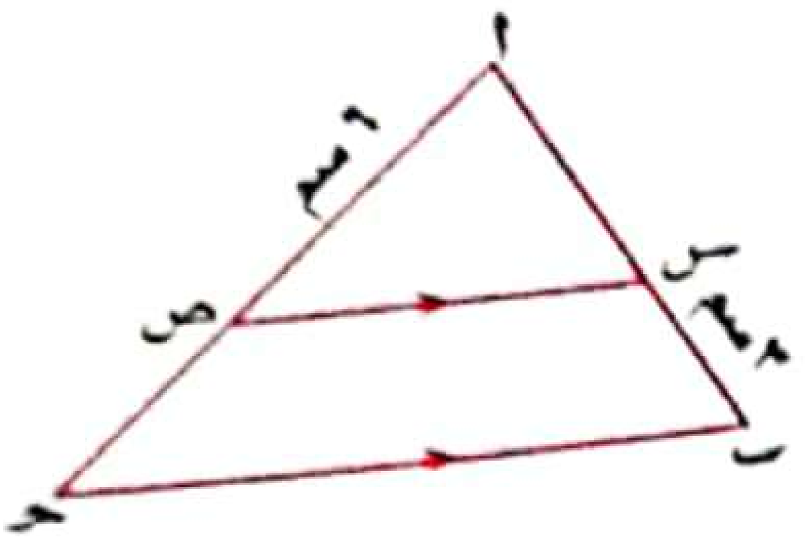

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

(١) أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

(٢) أوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$

« ١٥ سم »

**١٦** في الشكل المقابل :




أ ب ج مثلث فيه : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

فإذا كان : ب س = ٣ سم ، أ ص = ٦ سم

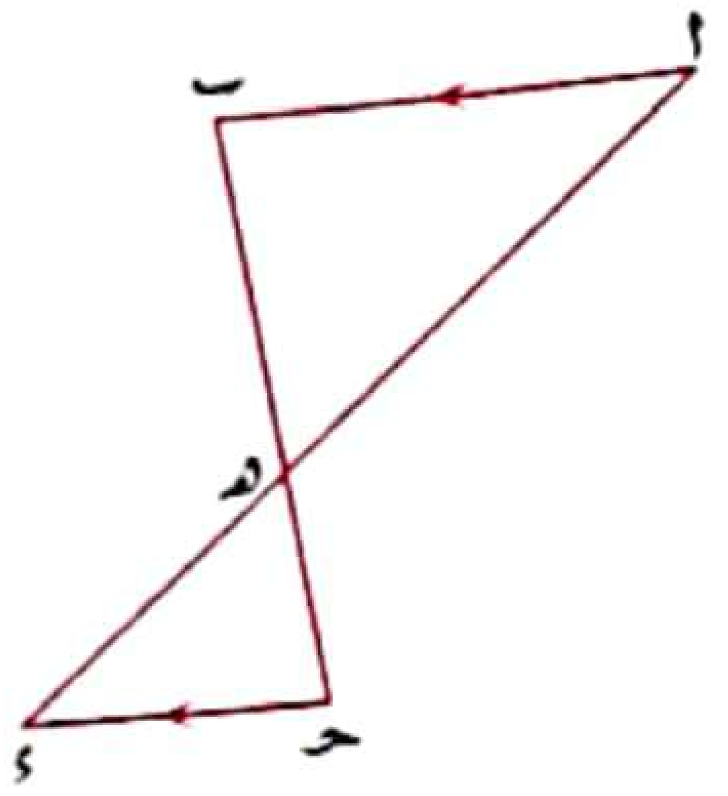
، وكان $\frac{\text{أ س + أ ص}}{\text{أ ب + أ ج}} = \frac{3}{5}$

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{ج ص}}$

«٤.٥ سم ، ٤ سم»

**١٧** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :




إذا كانت : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ج ء}}$

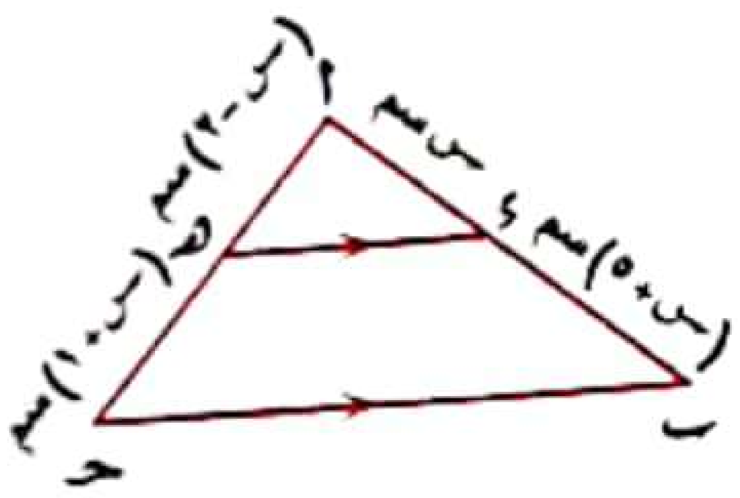
، ٢ أ هـ = ٣ ء هـ ، ب هـ - ج هـ = ٤ سم

فإن : ب ج = ............ سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٠

(ج) ٢٤ (د) ٢٥

(٢) في الشكل المقابل :

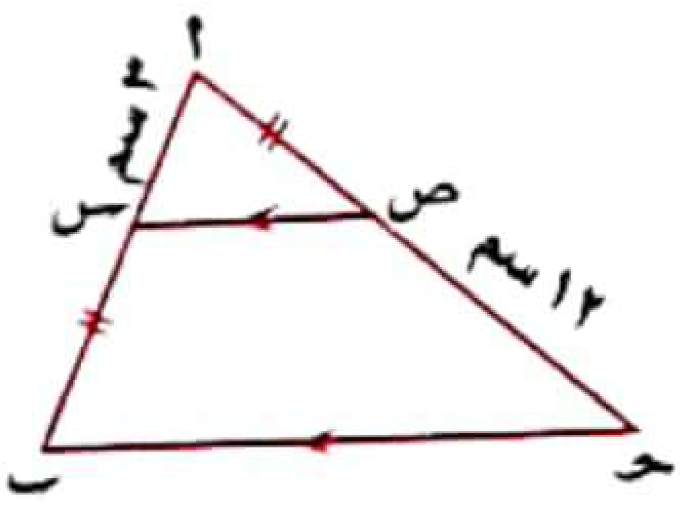



س = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(ج) ٤ (د) ٥

(٣) في الشكل المقابل :

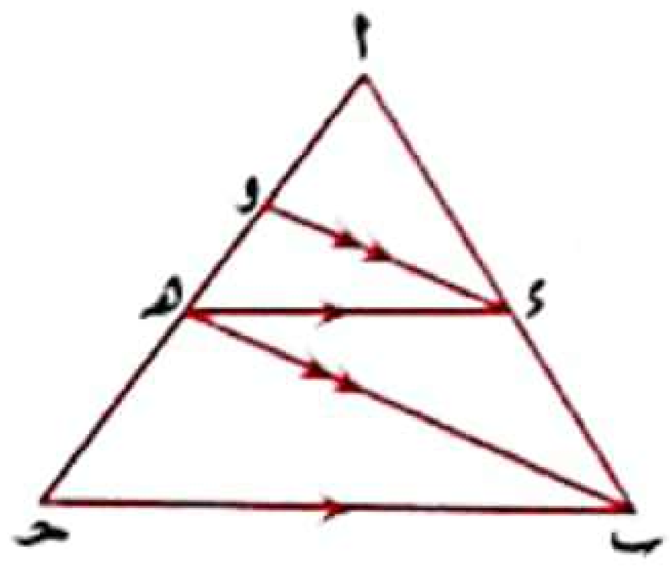



أ ج = ............ سم

(أ) ١٥ (ب) ١٦

(ج) ١٨ (د) ٢٠

(٤) في الشكل المقابل :



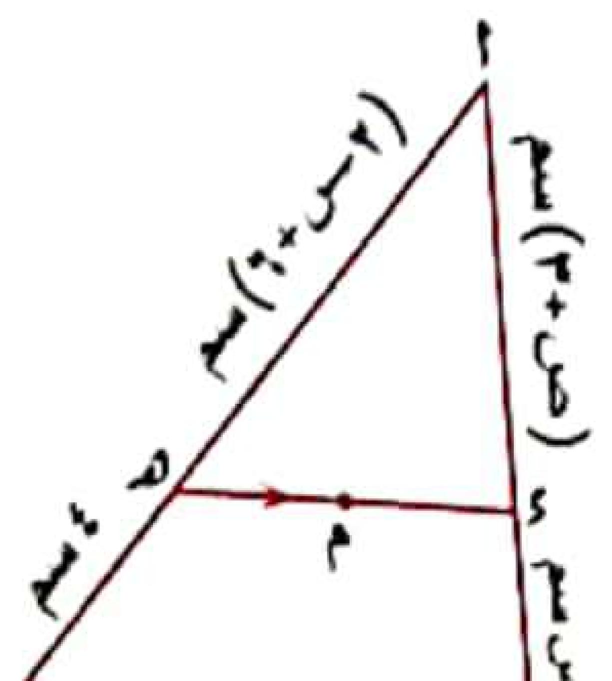

إذا كانت : $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

فإن : أ و × أ ج = ............

(أ) أ هـ (ب) $(\text{أ هـ})^2$

(ج) $(\text{ء هـ})^2$ (د) و هـ × هـ ج

(٥) في الشكل المقابل :



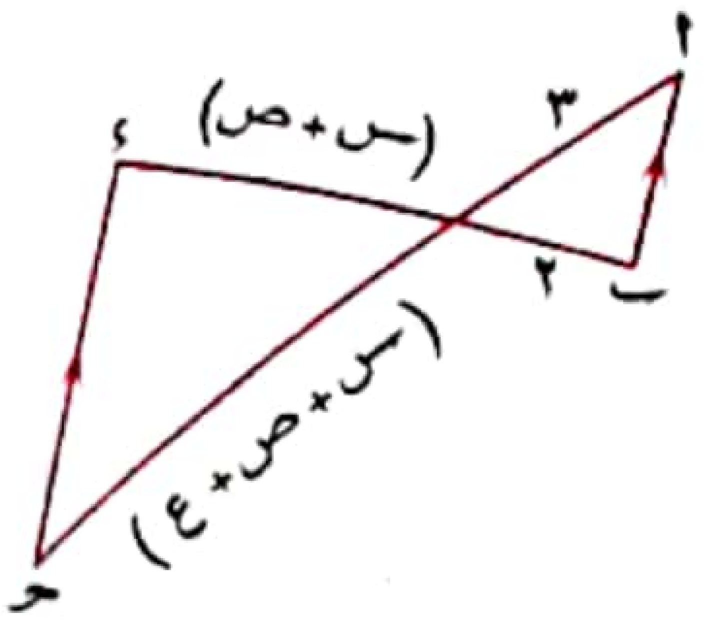

إذا كانت م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب ج

فإن : ٢ س + ص = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(ج) ٤ (د) ٥

(٦) فى الشكل المقابل :




إذا كان : أب // حـء

فإن : ع = ...............

(أ) $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$ (ب) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$

(جـ) ٥ س + ٥ ص (د) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥}$

**١٨** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أب ، رسم ءهـ // ب حـ ويقطع أحـ فى هـ ثم رسم هـ و // حـ ء ويقطع أب فى و **أثبت أن :** $(\text{أء})^٢$ = أ و × أ ب

**١٩** أ ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ أحـ ، رسم هـ و // حـ ب ويقطع أ ب فى و ، ورسم هـ ن // حـ ء ويقطع أ ء فى ن **أثبت أن :** و ن // ب ء

**٢٠** أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى ضلعه الثالث ، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

**٢١** أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ ب أ ، هـ ∉ أ ب ، رسم هـ حـ فقطع أ ء فى و ، ب ء فى م **أثبت أن :** $(\text{حـ م})^٢$ = م و × م هـ

**٢٢** أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ حـ ب ، هـ ∉ حـ ب ، رسم ء هـ فقطع أ ب فى ن ثم رسم ب ى // هـ ء فقطع حـ ء فى ى **أثبت أن :** $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{حـ ى}}{\text{ى ء}}$

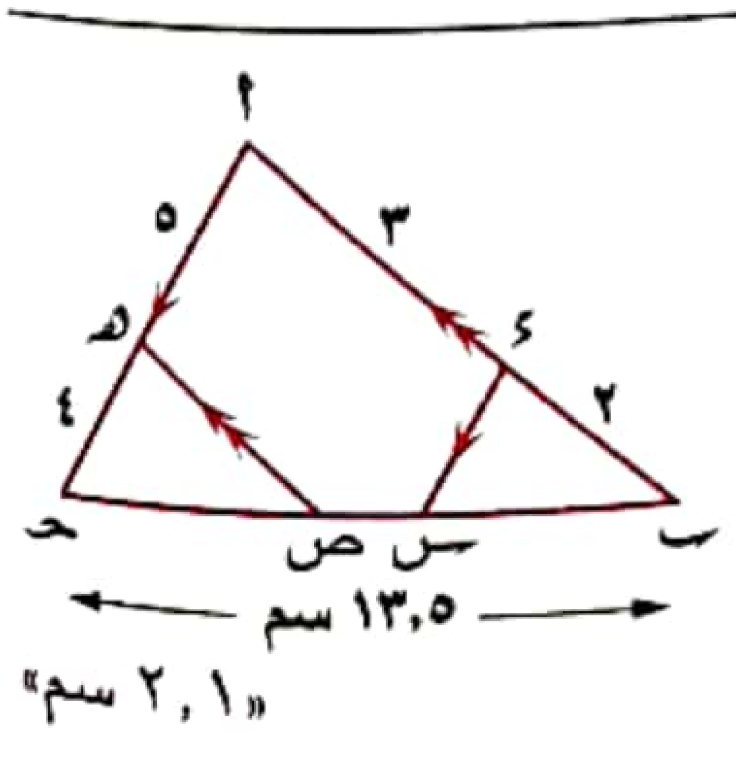
**٢٣** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أ ب حيث ٣ أ ء = ٢ ء ب ، هـ ∈ أ حـ حيث ٥ حـ هـ = ٣ أ حـ ، رسم أ س يقطع ب حـ فى س فإذا كان : أ و = ٨ سم ، أ س = ٢٠ سم ، حيث و ∈ أ س **أثبت أن :** النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة.

**٢٤** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ بحيث $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ أ ء بحيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ء}} = \frac{٣}{٧}$ ، رسم حـ هـ فقطع أ ب فى س ، رسم ء ص // حـ س فقطع أ ب فى ص **أثبت أن :** أ س = ب ص

**٢٥** فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ء س // أ حـ ، هـ ص // أ ب ، ب حـ = ١٣,٥ سم ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، هـ حـ = $\frac{٤}{٥}$ أ هـ

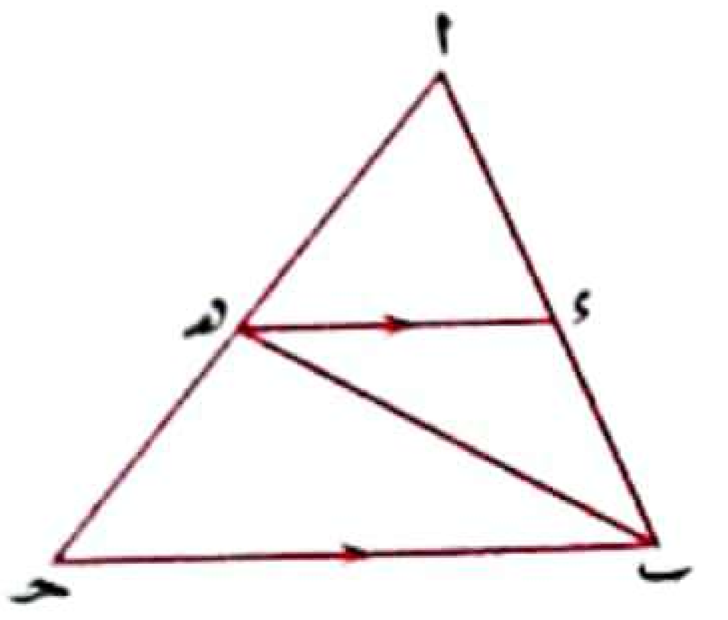
**أوجد :** طول س ص




«٢,١ سم»

**٢٦** أ ب جـ مثلث ، ء منتصف بجـ ، م ∈ أء ، رسم مهـ // أب ويقطع بجـ فى هـ ، رسم مو // أجـ ويقطع بجـ فى و أثبت أن : ء منتصف هـو ، وإذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ فأثبت أن : هـ و = $\frac{١}{٣}$ ب جـ

**٢٧** فى الشكل المقابل :



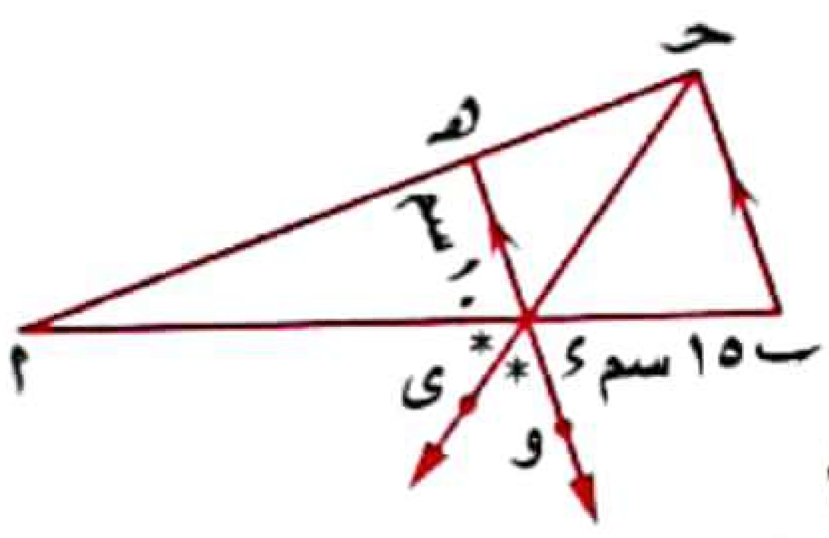
أ ب جـ مثلث فيه : ءهـ // بجـ

أثبت أن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءهـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أبهـ}} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أبهـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أبجـ}}$

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٢٨** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

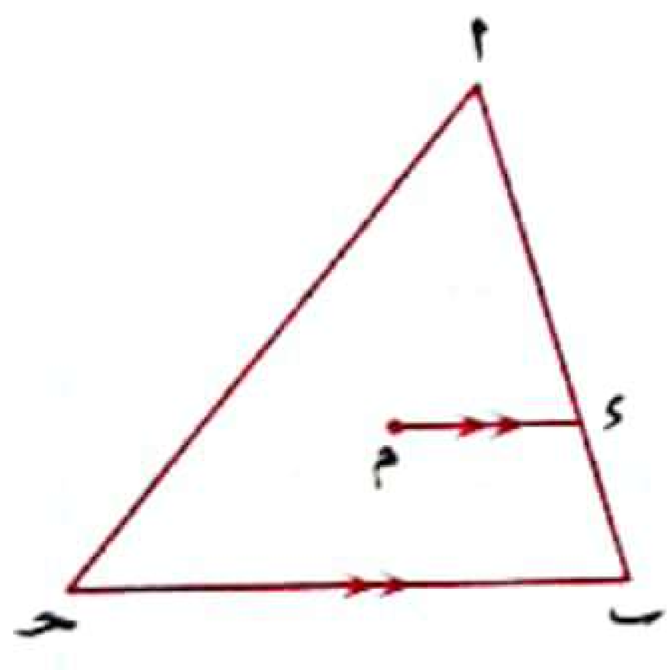


إذا كانت : ءهـ // بجـ ، ق (∠ و ء ى) = ق (∠ أ ء ى)

وكان : ءهـ = ١٠ سم ، ب ء = ١٥ سم فإن : أء = ............ سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(٢) فى الشكل المقابل :

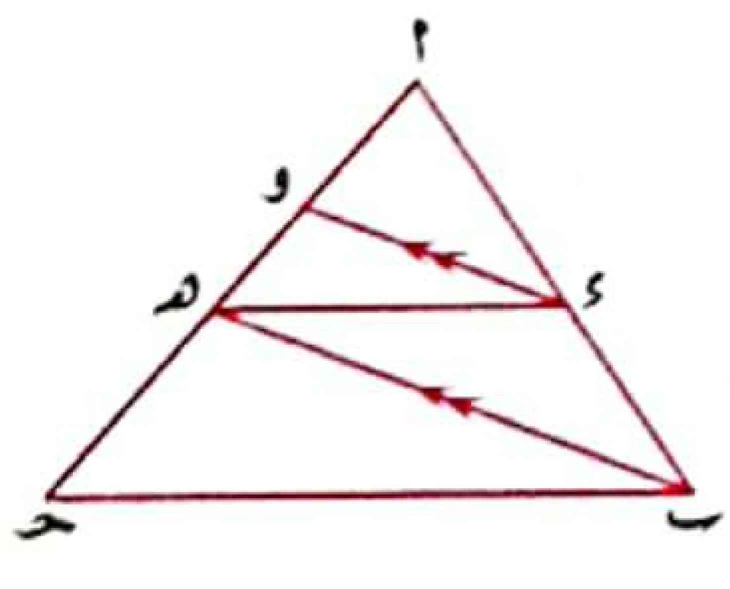


إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ

، وكانت : ءم // بجـ فإن : $\frac{\text{ءم}}{\text{بجـ}}$ = ............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٣) فى الشكل المقابل :



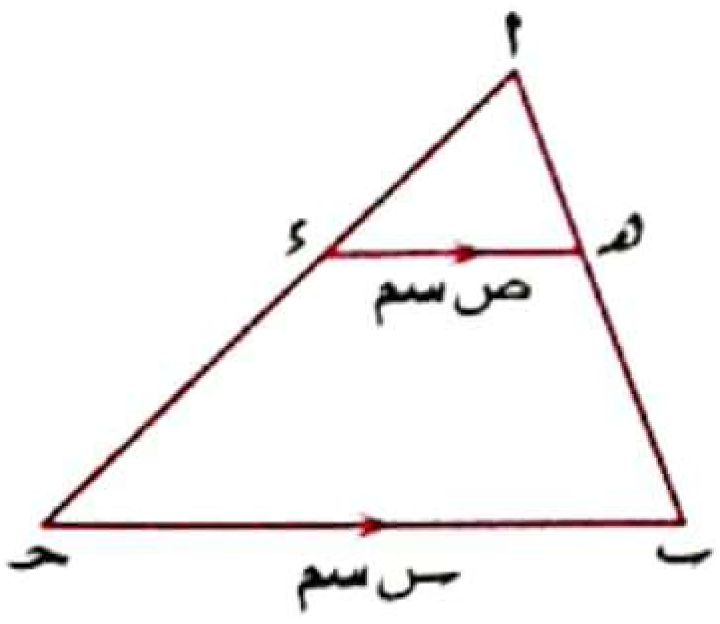
إذا كانت : ءو // بهـ لإثبات أن ءهـ // بجـ يكون كافيًا

الحصول على ............

(أ) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٣}{٤}$ فقط. (ب) أو × أجـ = $(\text{أهـ})^{٢}$ فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شىء مما سبق.

(٤) فى الشكل المقابل :

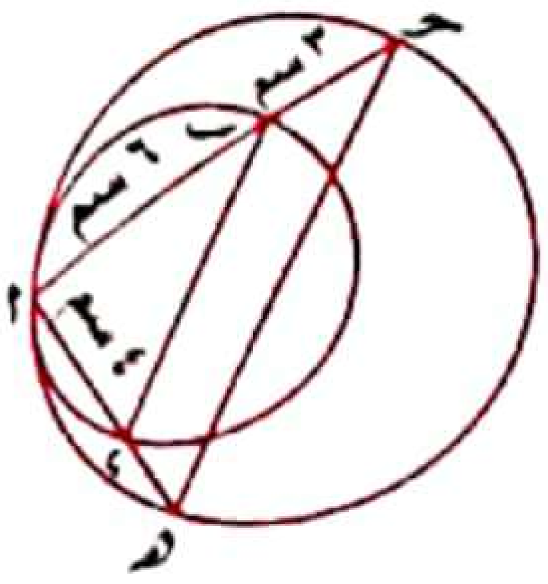


إذا كانت : ءهـ // بجـ ، ءهـ = ص سم ، بجـ = س سم

وكان : ٢ $\text{س}^{٢}$ − ٣ س ص − ٥ $\text{ص}^{٢}$ = ٠ وكان : أب = ١٠ سم

فإن : هـب = ............ سم

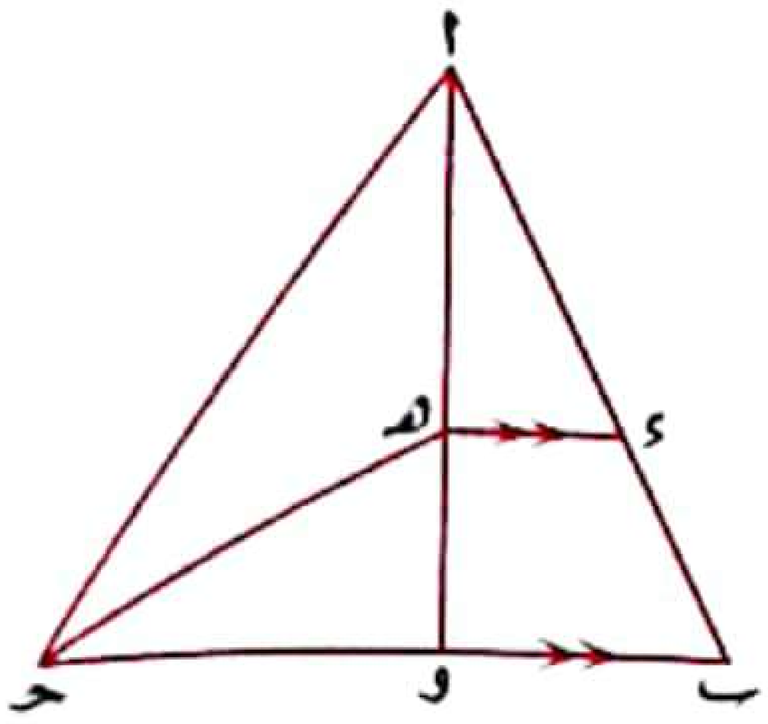
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨




(٥) **فى الشكل المقابل :**

دائرتان متماستان من الداخل فى أ فإن : هـ ء = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤



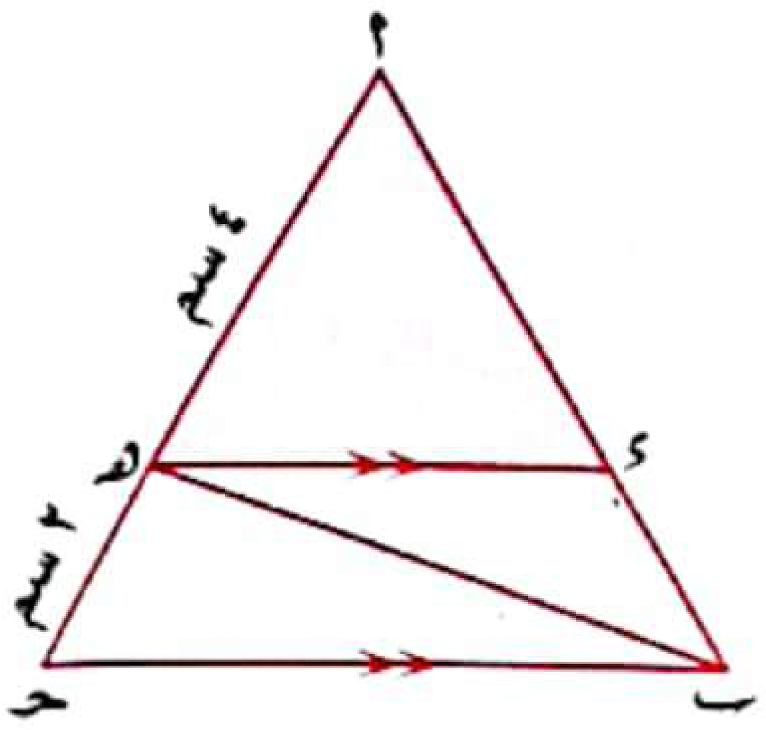

(٦) **فى الشكل المقابل :**

إذا كانت : مساحة (△ أ هـ حـ) = ١٥ سم٢

، مساحة (△ و هـ حـ) = ٩ سم٢ ، أب = ١٦ سم

فإن : أء = ............ سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣




(٧) **فى الشكل المقابل :**

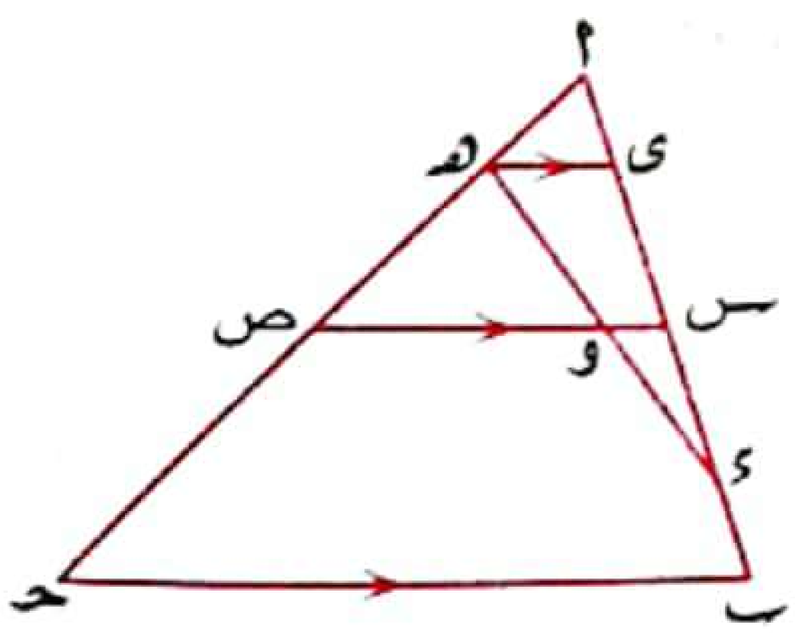
إذا كان : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$

وكانت مساحة (△ هـ ب حـ) = ٩ سم٢

فإن : مساحة (△ أ ء هـ) = ............ سم٢

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

---




**٢٩** **فى الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث ، س منتصف $\overline{أب}$

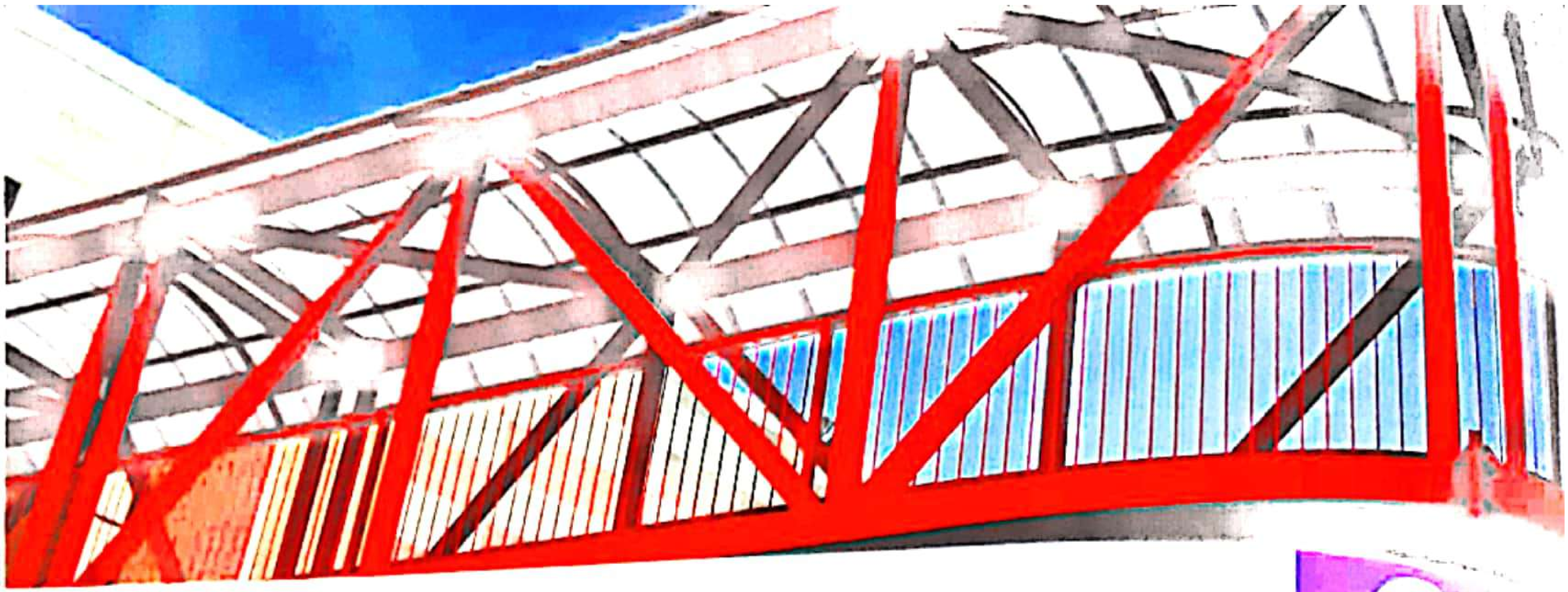
، ص منتصف $\overline{أحـ}$ ، ء ∈ $\overline{بس}$ ، هـ ∈ $\overline{أص}$ بحيث $\frac{أء}{ءب} = \frac{حـهـ}{هـأ}$

، $\overline{ىهـ}$ // $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

**أثبت أن :** و منتصف $\overline{ءهـ}$

---

**٣٠** 📖 أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{أم}$ ، و منتصف $\overline{مـحـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ءهـ}$ يقطع $\overline{أب}$ فى س ، ورسم $\overleftrightarrow{ءو}$ يقطع $\overline{بحـ}$ فى ص **أثبت أن :** $\overline{سص}$ // $\overline{أحـ}$

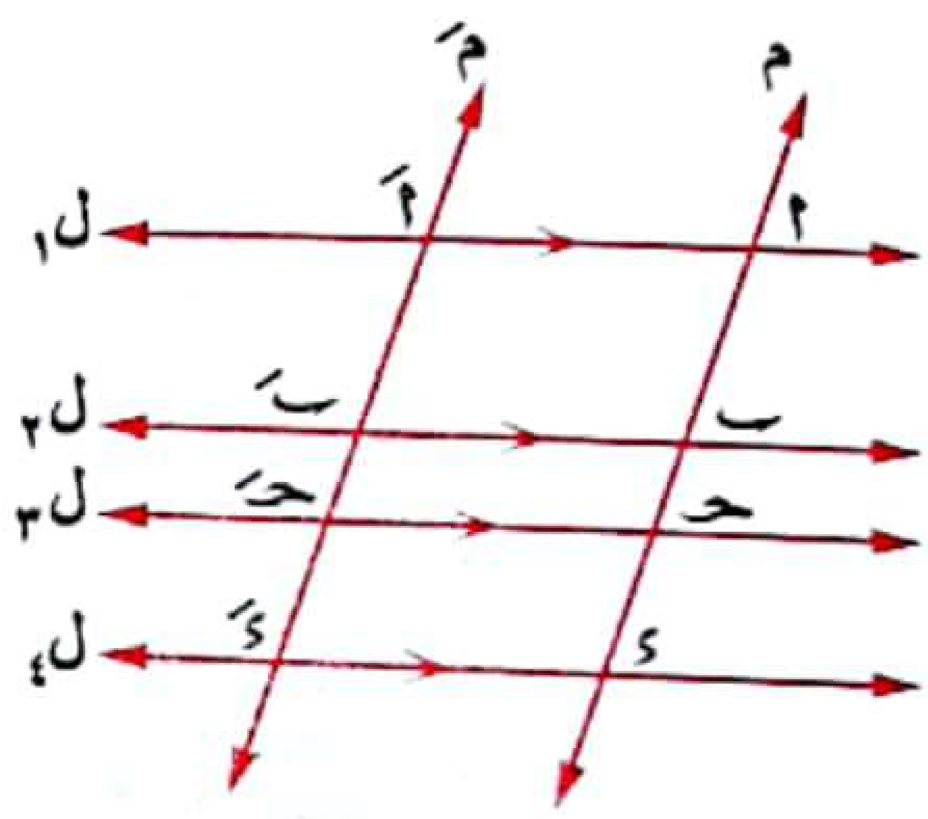


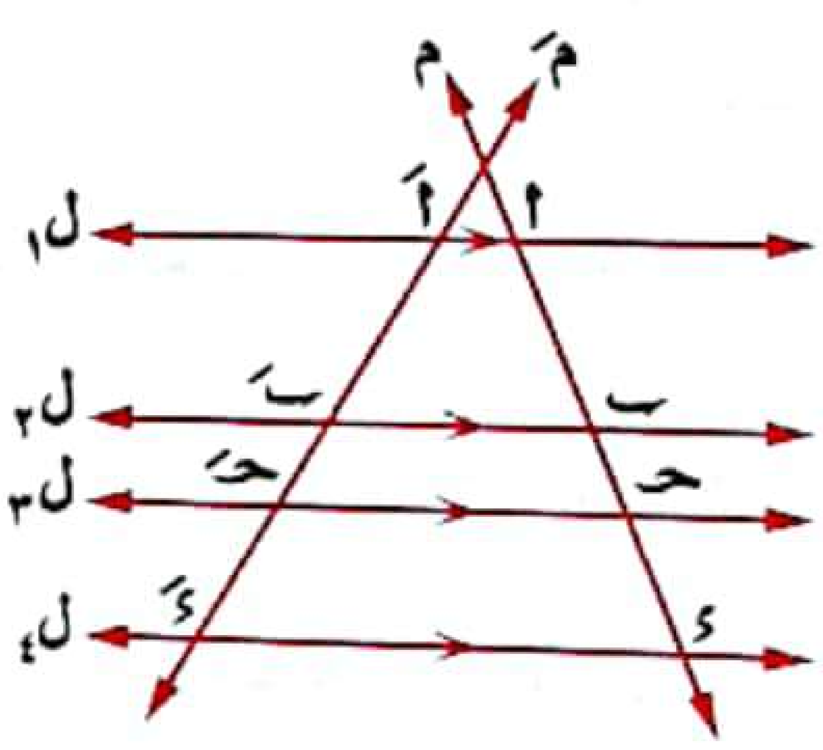
الدرس 2

# نظريـة تاليـس

**نظرية ٢** (نظرية تاليس العامة)

**إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.**



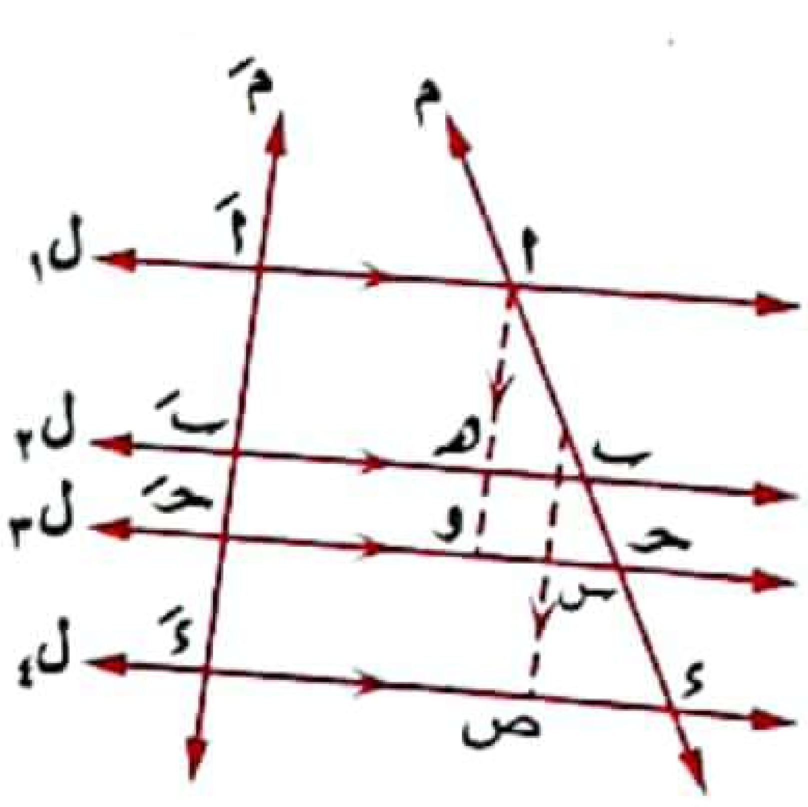


ففى الشكلين السابقين :

إذا كان : $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$ ، م ، مَ قاطعين لهم

فإن : $\frac{أب}{أَبَ} = \frac{بحـ}{بَحـَ} = \frac{حـ ء}{حـَ ءَ} = \frac{أحـ}{أَحـَ}$

وفيما يلى إثبات صحة هذه النظرية :



**المعطيات** $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$ ، م ، مَ قاطعان لهم

**المطلوب** إثبات أن : أب : بحـ : حـ ء = أَبَ : بَحـَ : حـَ ءَ

**العمل** ارسم $\overleftrightarrow{أو}$ // مَ ، ويقطع $ل_2$ فى هـ ، $ل_3$ فى و

، $\overleftrightarrow{بص}$ // مَ ، ويقطع $ل_3$ فى س ، $ل_4$ فى ص

◂ **البرهان** ∵ $\overline{أأ'} // \overline{هـ ب'}$ ، $\overline{أهـ} // \overline{أ'ب'}$

∴ أهـ ب' أ' متوازى أضلاع ويكون : أهـ = أ'ب'

بالمثل : هـ و = ب'جـ' ، ب س = ب'جـ' ، س ص = جـ'ء'

فى $\Delta$ أجـ و : ∵ $\overline{ب هـ} // \overline{جـ و}$ ∴ $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{أهـ}{هـ و}$

ويكون : $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{أ'ب'}{ب'جـ'}$ ، $\frac{أب}{أ'ب'} = \frac{ب جـ}{ب'جـ'}$ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل $\Delta$ ب ء ص :

∴ $\frac{ب جـ}{جـ ء} = \frac{ب'جـ'}{جـ'ء'}$ ، $\frac{ب جـ}{ب'جـ'} = \frac{جـ ء}{جـ'ء'}$ (إبدال الوسطين) (٢)

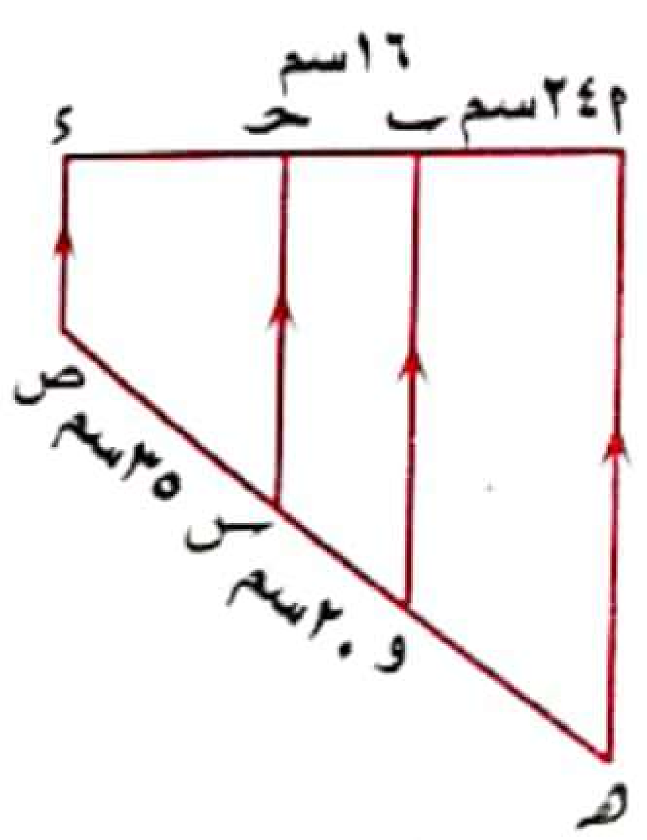
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{أب}{أ'ب'} = \frac{ب جـ}{ب'جـ'} = \frac{جـ ء}{جـ'ء'}$

∴ أب : ب جـ : جـ ء = أ'ب' : ب'جـ' : جـ'ء' **(وهو المطلوب)**

**فى الشكل السابق لاحظ أن :**

- $\frac{أجـ}{جـ ء} = \frac{أ'جـ'}{جـ'ء'}$
- $\frac{أجـ}{جـ ب} = \frac{أ'جـ'}{جـ'ب'}$
- $\frac{ب ء}{ء أ} = \frac{ب'ء'}{ء'أ'}$ وهكذا

**فمثلًا** فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{أهـ} // \overline{ب و} // \overline{جـ س} // \overline{ء ص}$

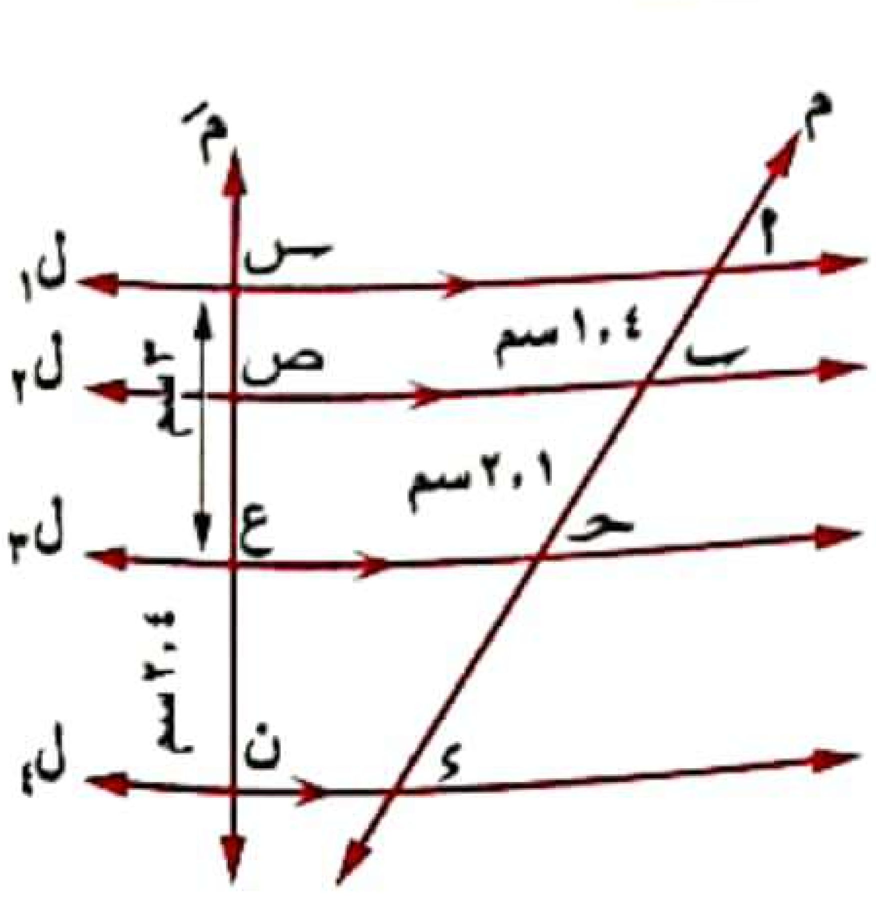
وكان : أب = ٢٤ سم ، ب جـ = ١٦ سم

، و س = ٢٠ سم ، س ص = ٣٥ سم فإن : $\frac{أب}{هـ و} = \frac{ب جـ}{و س} = \frac{جـ ء}{س ص}$

**أى أن** $\frac{٢٤}{هـ و} = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{جـ ء}{٣٥}$ ومنها :

هـ و = $\frac{٢٠ \times ٢٤}{١٦}$ = ٣٠ سم ، جـ ء = $\frac{١٦ \times ٣٥}{٢٠}$ = ٢٨ سم

## مثال ١




**فى الشكل المقابل :**

ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، م' قاطعان لهم

**استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب :**

طول كل من $\overline{س ص}$ ، $\overline{جـ ء}$

## الحــل

∴ $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$ ، م ، مَ قاطعان لهم.

$$\therefore \frac{أب}{س ص} = \frac{حء}{ع ن} = \frac{أح}{س ع}$$

$$\therefore \frac{١,٤}{س ص} = \frac{حء}{٢,٤} = \frac{١,٤ + ٢,١}{٣} = \frac{٣,٥}{٣}$$

$$\therefore س ص = \frac{١,٤ \times ٣}{٣,٥} = ١,٢ \text{ سم}$$ (المطلوب أولًا)

$$، حء = \frac{٢,٤ \times ٣,٥}{٣} = ٢,٨ \text{ سم}$$ (المطلوب ثانيًا)

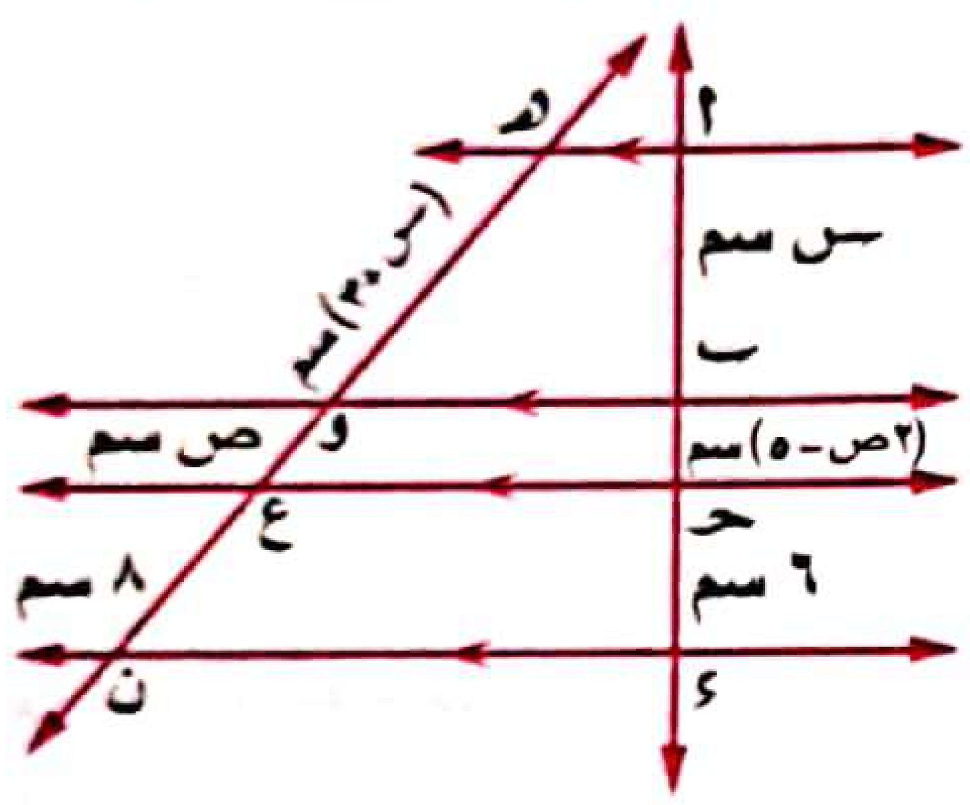
## مثــال ٢

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أهـ} // \overleftrightarrow{ب و} // \overleftrightarrow{ح ع} // \overleftrightarrow{ء ن}$

احسب قيمة كل من س ، ص

العددية علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.




## الحــل

∵ $\overleftrightarrow{أهـ} // \overleftrightarrow{ب و} // \overleftrightarrow{ح ع} // \overleftrightarrow{ء ن}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ قاطعان لهم.

$$\therefore \frac{أب}{هـ و} = \frac{ب ح}{و ع} = \frac{حء}{ع ن} \qquad \therefore \frac{س}{س + ٣} = \frac{٢ ص - ٥}{ص} = \frac{٦}{٨}$$

∴ ٨ س = ٦ (س + ٣) ∴ ٨ س = ٦ س + ١٨ ∴ س = ٩

، ٦ ص = ٨ (٢ ص − ٥) ∴ ٦ ص = ١٦ ص − ٤٠ ∴ ص = ٤ (وهو المطلوب)

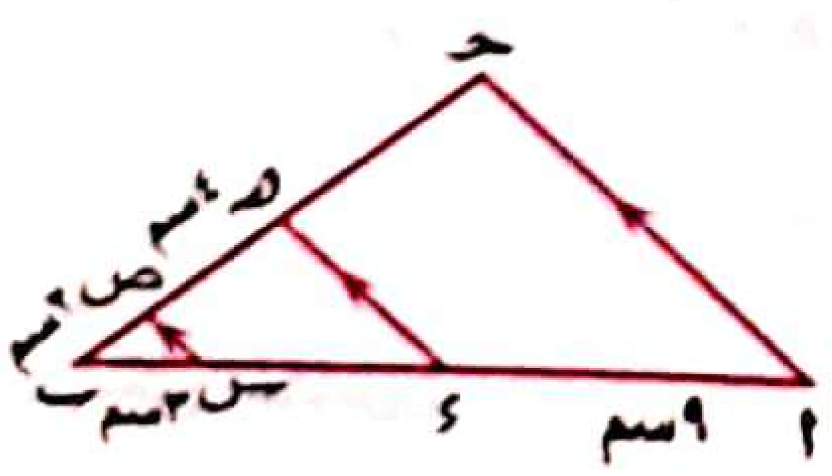
## حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

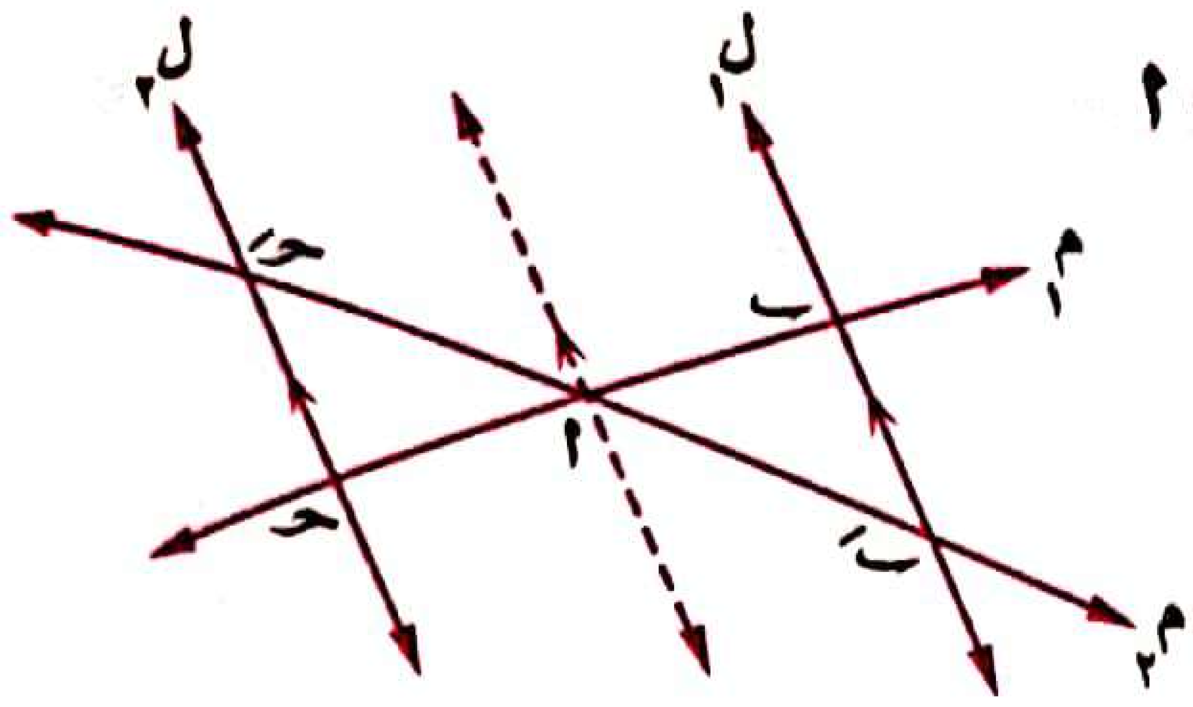
أ ب ح مثلث ، $\overline{أح} // \overline{ءهـ} // \overline{س ص}$ ، أء = ٩ سم

، س ب = ٣ سم ، ب ص = ٢ سم ، هـ ص = ٤ سم

أوجد : ح هـ ، ء س



## حالتان خاصتان

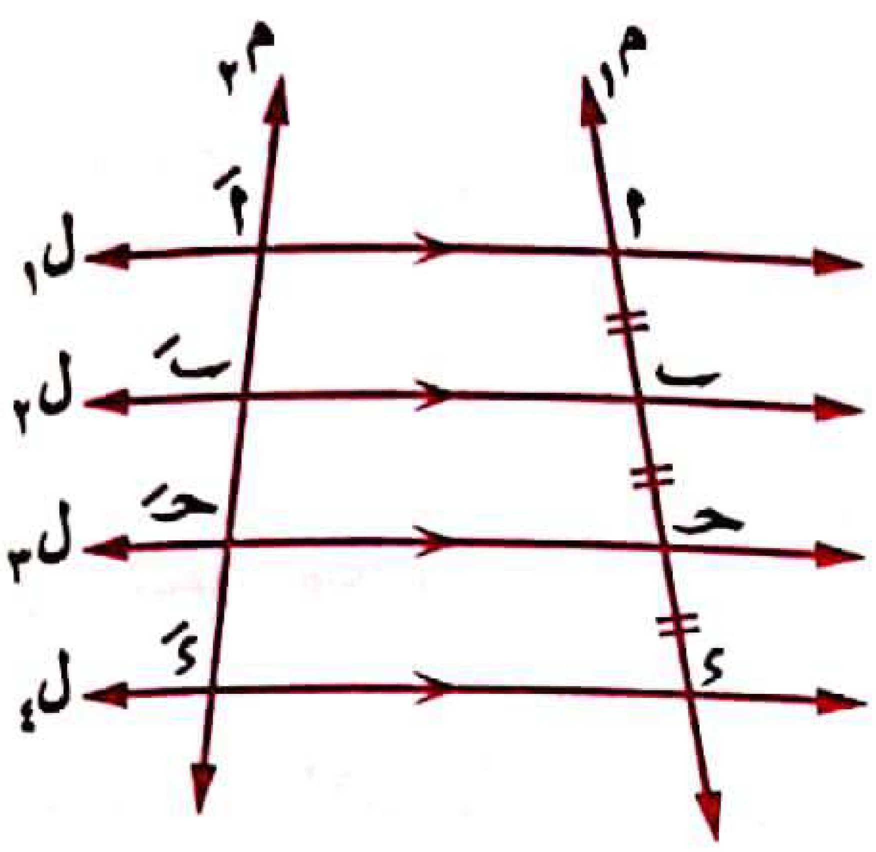


**١** إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$ ، م$_1$ ، م$_2$ قاطعين لهما متقاطعين فى النقطة أ

فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أحـَ}}$

وبالعكس إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أحـَ}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{ببَ}} // \overleftrightarrow{\text{حـحـَ}}$



**٢ نظرية تاليس الخاصة :**

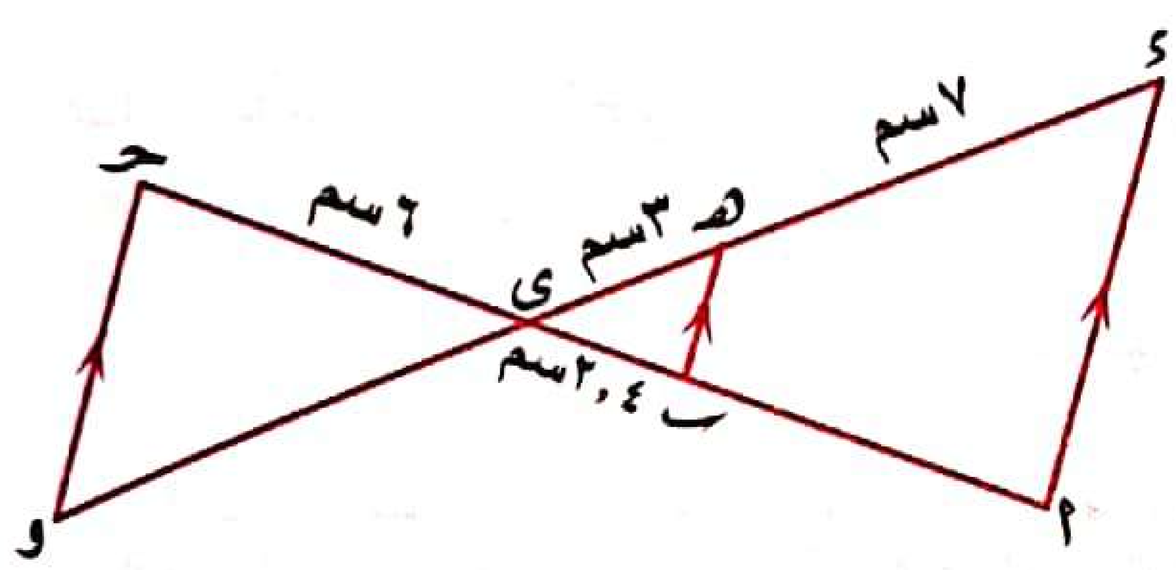
إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك فى الطول.

**ففى الشكل المقابل :**

إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$ // ل$_3$ // ل$_4$ ، قطعها المستقيمان م$_1$ ، م$_2$

وكان : أب = بحـ = حـء فإن : أَبَ = بَحـَ = حـَءَ

## مثال ٣




**فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أء}} // \overline{\text{بهـ}} // \overline{\text{وحـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى

**استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب :** طول كل من $\overline{\text{ىو}}$ ، $\overline{\text{ىأ}}$

### الحل

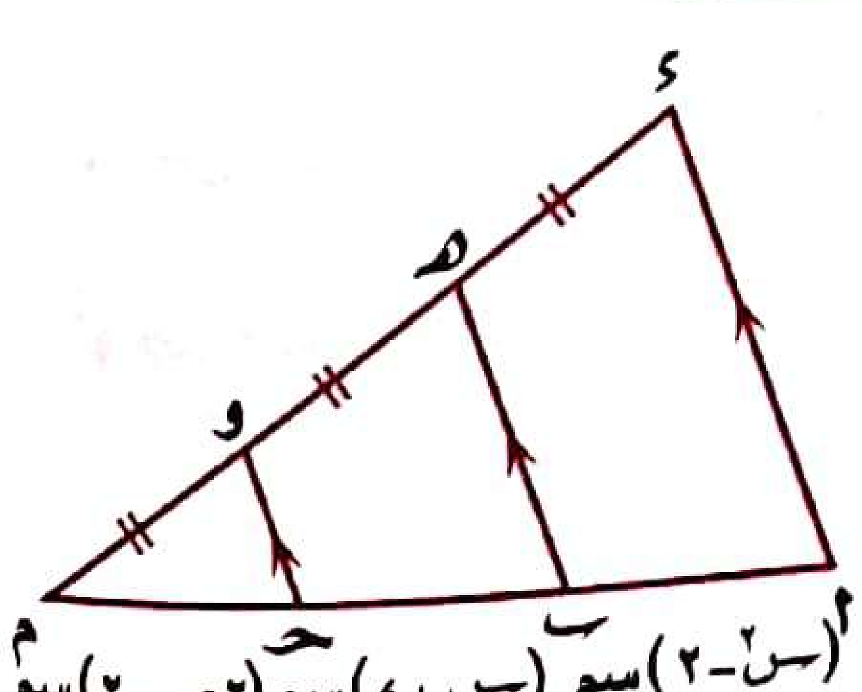
∵ $\overline{\text{أء}} // \overline{\text{بهـ}} // \overline{\text{وحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى

∴ $\frac{\text{ى و}}{\text{ى حـ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ى ء}}{\text{ى أ}}$ ∴ $\frac{\text{ى و}}{٥} = \frac{٣}{٢,٤} = \frac{١٠}{\text{ى أ}}$

∴ ى و $= \frac{٦ \times ٣}{٢,٤} = ٧,٥$ سم **(المطلوب أولاً)**

، ى أ $= \frac{٢,٤ \times ١٠}{٣} = ٨$ سم **(المطلوب ثانيًا)**

## مثال ٤




**فى الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أء}} // \overline{\text{بهـ}} // \overline{\text{حـو}}$ ، ءهـ = هـو = وم

**أوجد :** قيم س ، ص علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

**الحـــل**

∵ $\overleftrightarrow{أ ء} // \overleftrightarrow{ب هـ} // \overleftrightarrow{حـ و}$ ، ء هـ = هـ و = و م

∴ أ ب = ب حـ = حـ م

∴ $س^2 - س - 6 = 0$

∴ س = −٢ أ، س = ٣

، عند س = −٢ : ∴ ب حـ = ٢ سم

، عند س = ٣ : ∴ ب حـ = ٧ سم

، ∵ ب حـ = حـ م

∴ عند ب حـ = ٢ سم : ∴ ٢ ص − ٢ = ٢ ومنها ص = ٢

، عند ب حـ = ٧ سم : ∴ ٢ ص − ٢ = ٧ ومنها ص = ٤,٥ **(وهو المطلوب)**

∴ $س^2 - 2 = س + 4$

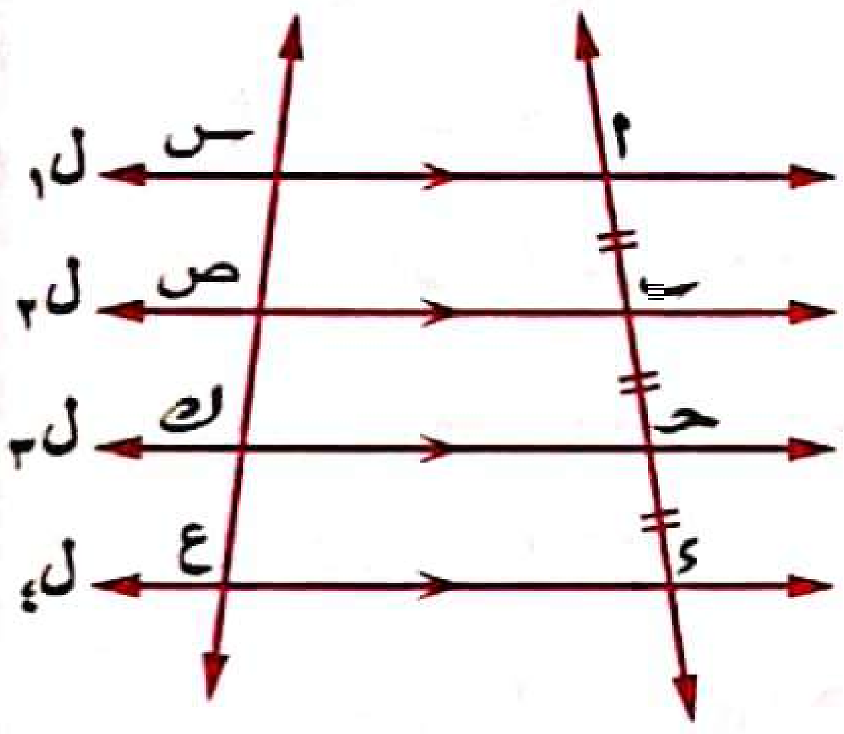
∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

**حاول بنفسك**

**فى الشكل المقابل :**

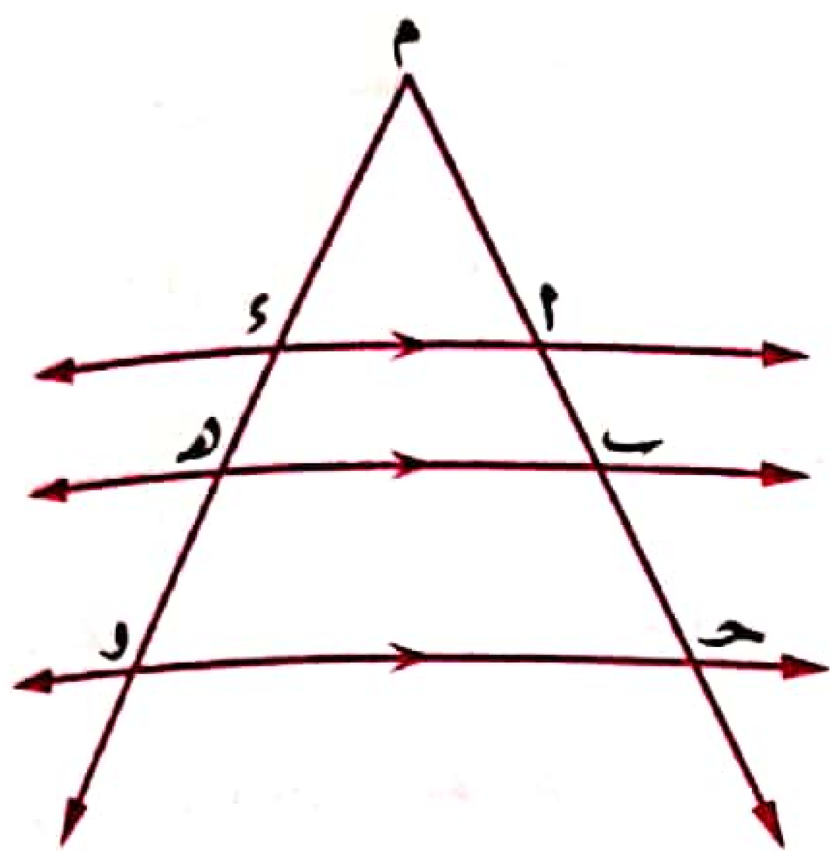
إذا كان : س ك = ٦ سم

**أوجد :** طول $\overline{ص ك}$



من أسئلة الكتاب المدرسي

**١** اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل :




(١) $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{.........}}$ (٢) $\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{.........}}{\text{هـ و}}$

(٣) $\frac{\text{م أ}}{\text{أب}} = \frac{\text{م د}}{\text{.........}}$ (٤) $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{.........}}{\text{د هـ}}$

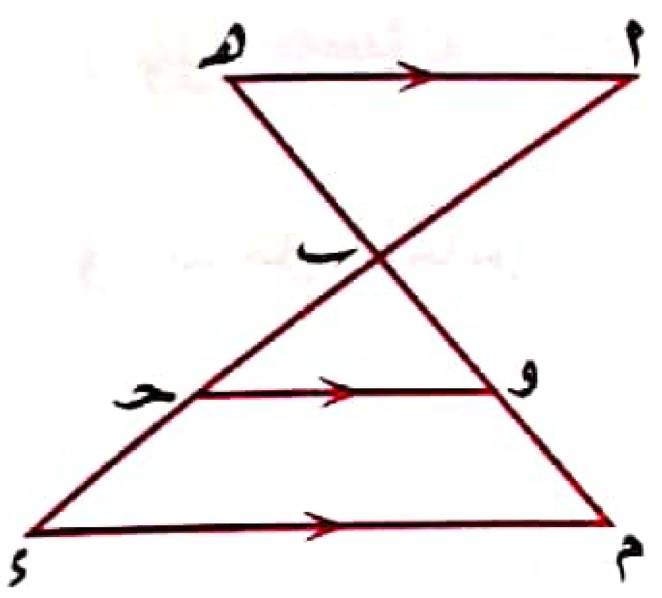
(٥) $\frac{\text{م ب}}{\text{أب}} = \frac{\text{.........}}{\text{د هـ}}$ (٦) $\frac{\text{م جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{م و}}{\text{.........}}$

(٧) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{.........}}$ (٨) $\frac{\text{د و}}{\text{م و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{.........}}$

---

**٢** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

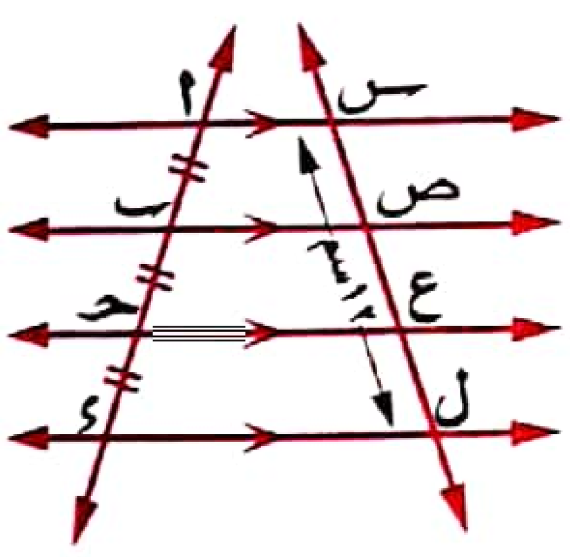



أب : ب جـ : جـ د = ............

(أ) أهـ : و جـ : م د (ب) هـ ب : ب و : و م

(جـ) هـ ب : ب جـ : جـ د (د) هـ ب : هـ و : هـ م

(٢) فى الشكل المقابل :

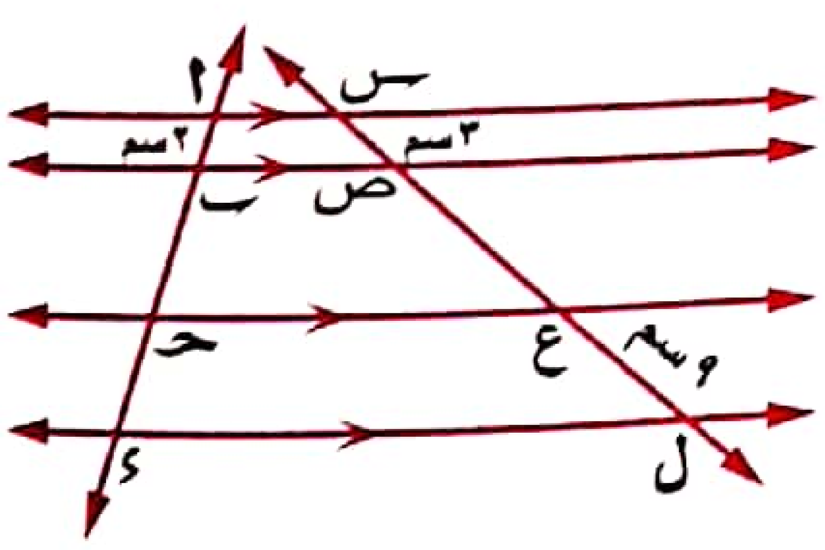



إذا كان : أب = ب جـ = جـ د ، س ل = ١٢ سم

فإن : س ع = ............

(أ) ٤ سم (ب) ص ل (جـ) أجـ (د) ب جـ

(٣) فى الشكل المقابل :



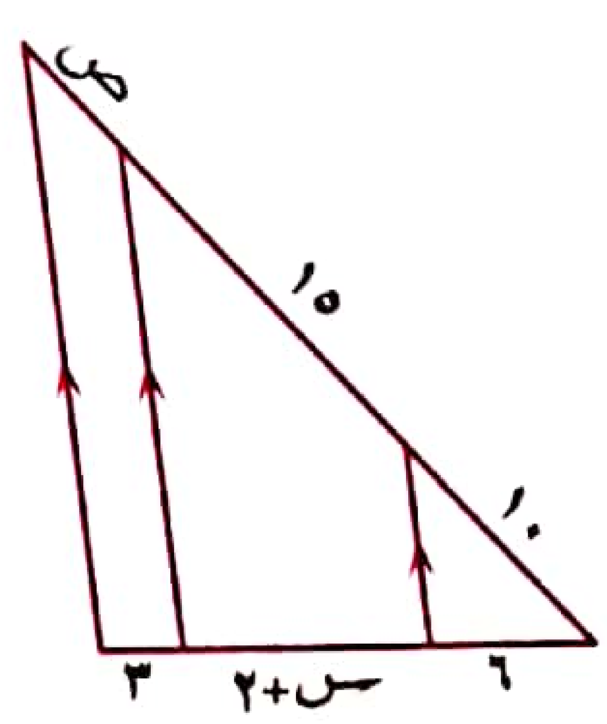

جـ د = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٤ (د) ٥

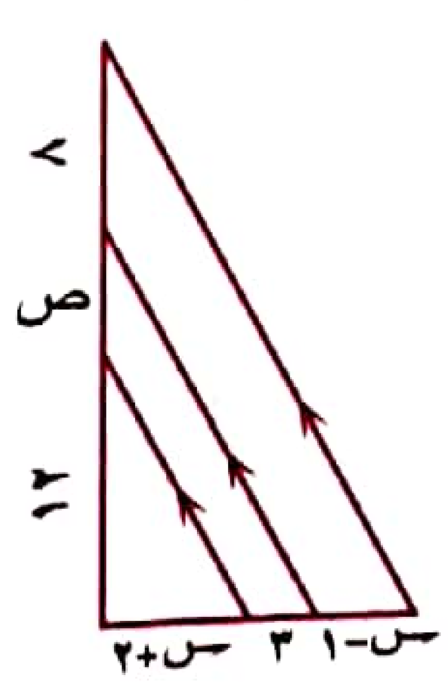
---

**٣** فى كل من الأشكال التالية ، احسب قيم س ، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

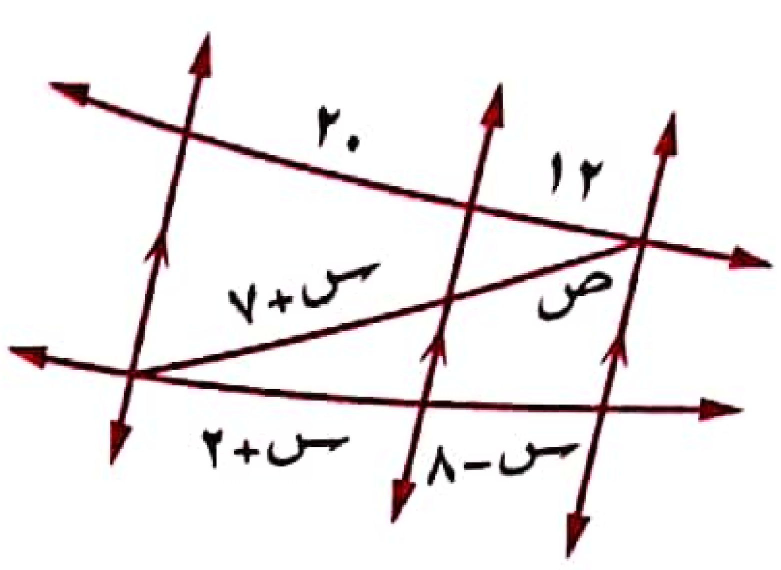
(١)



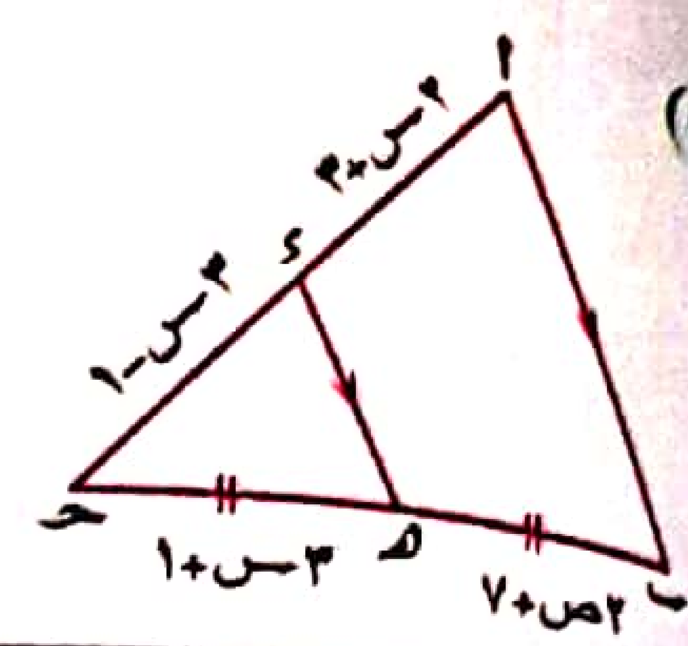

(٢)



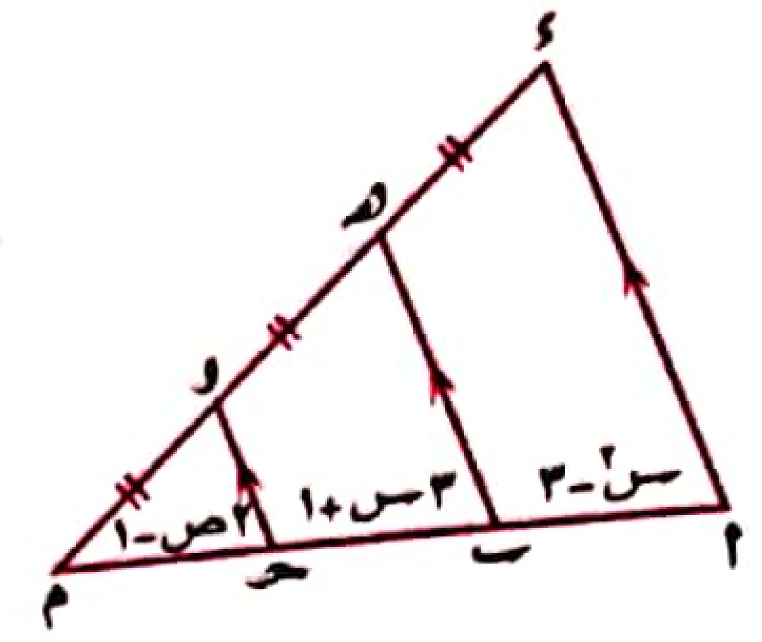

(٣)



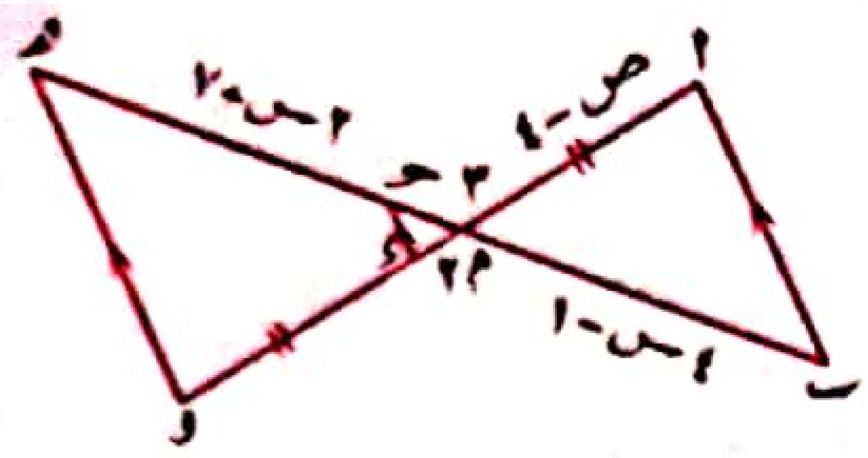
(٤)



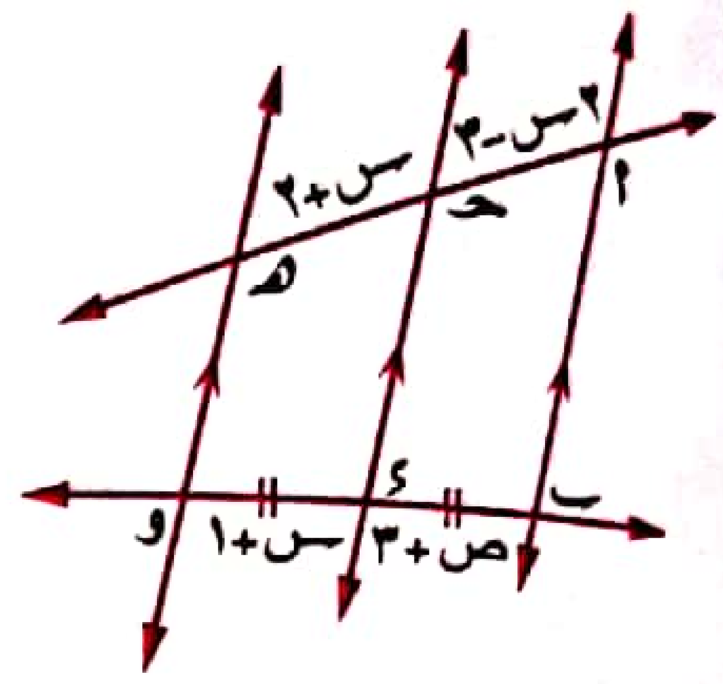
(٥)



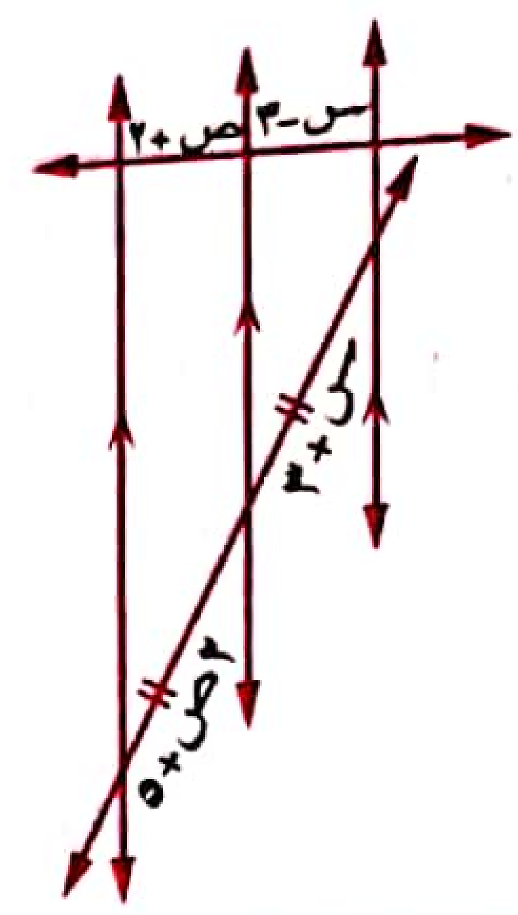
(٦)



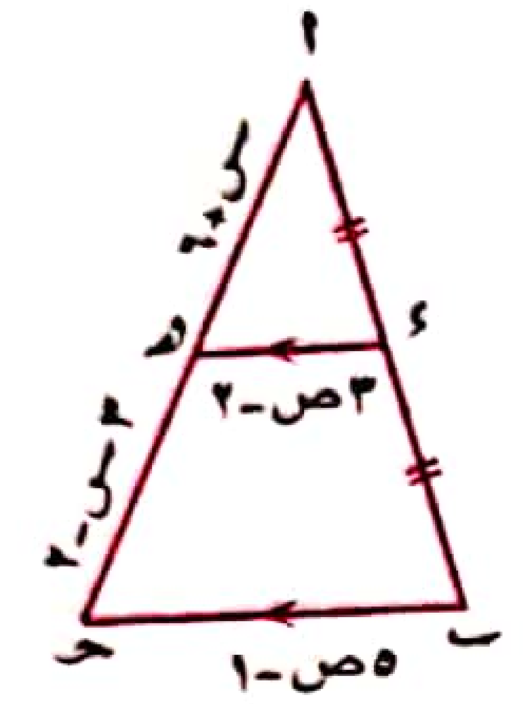
(٧)



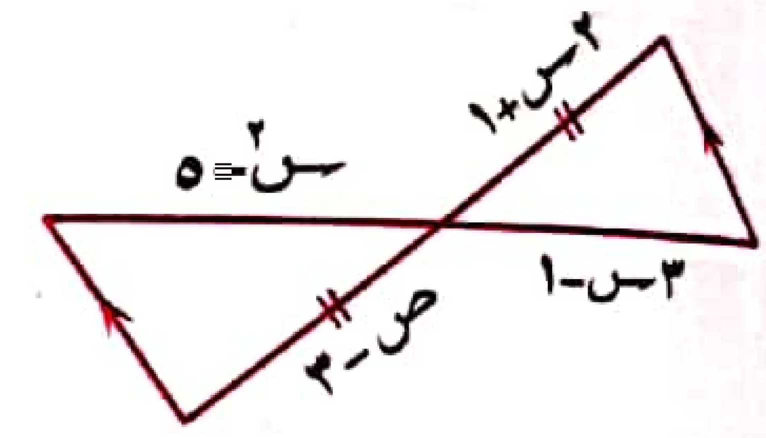
(٨)



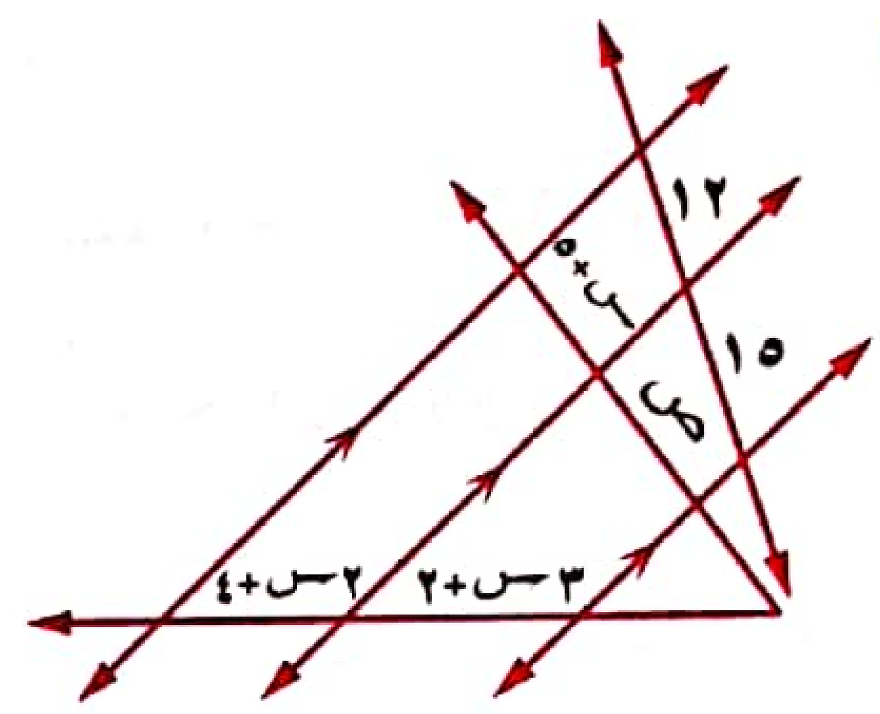
(٩)



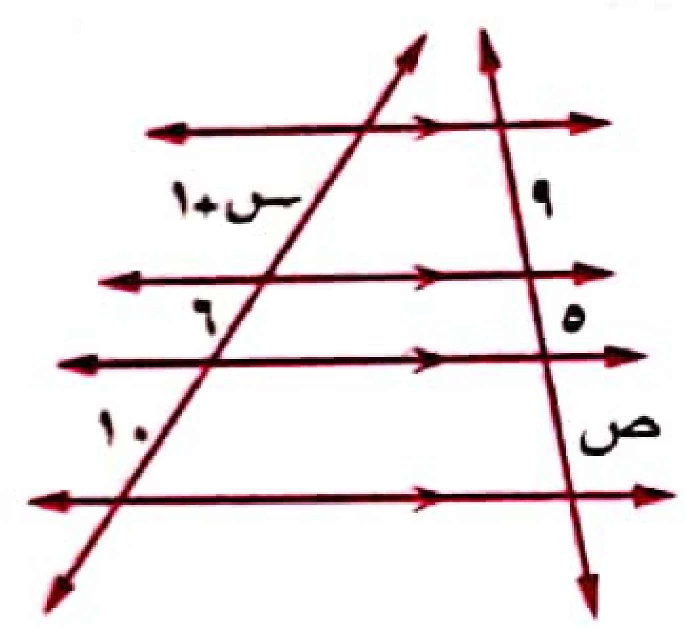
(١٠)



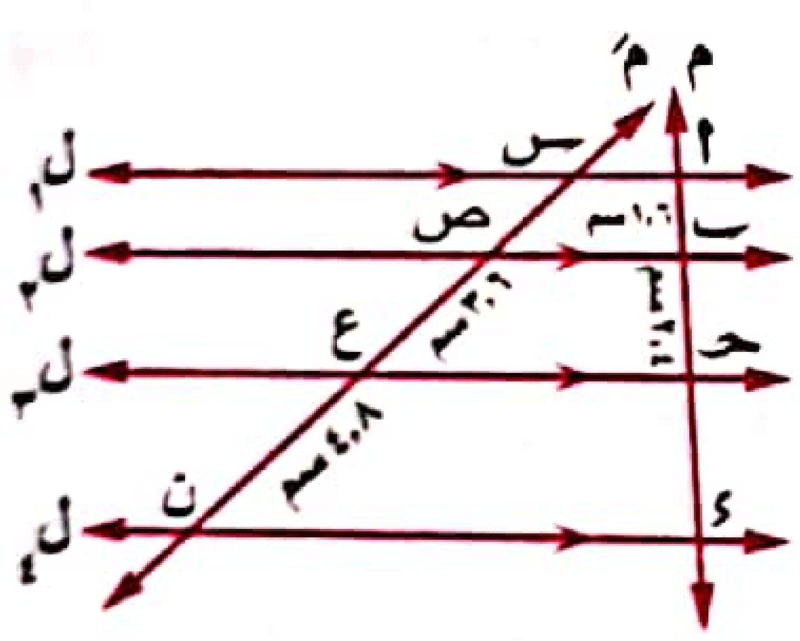
(١١)



(١٢)



**٤ في الشكل المقابل :**




ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ مستقيمان قاطعان لهم

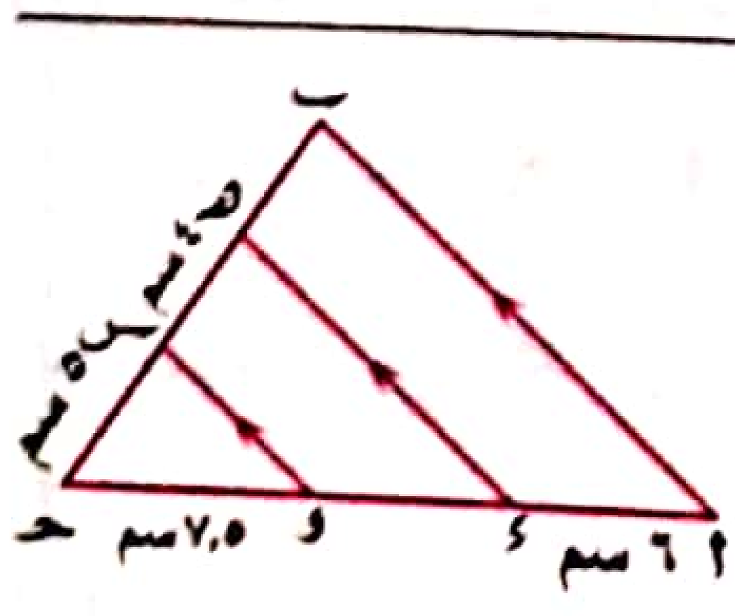
فإذا كان : أب = ١,٦ سم ، بجـ = ٢,٤ سم

، ص ع = ٣,٦ سم ، ع ن = ٤,٨ سم

فاحسب : طول كل من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

«٢,٤ سم ، ٣,٢ سم»

**٥ في الشكل المقابل :**



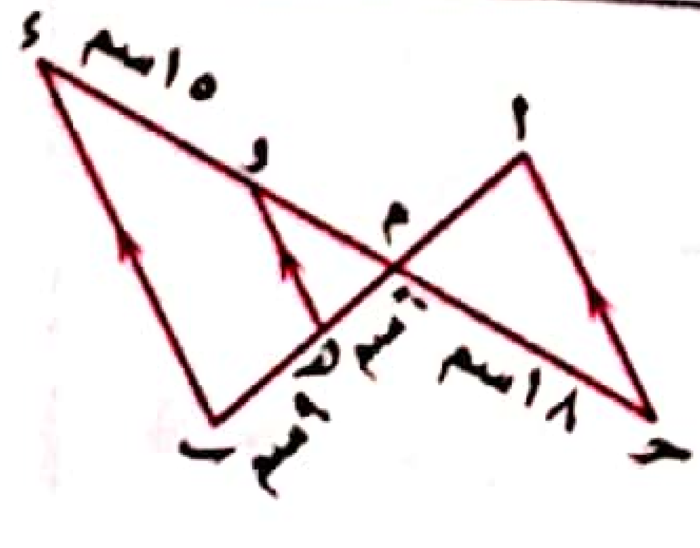

إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{وس}}$ وكان : أء = ٦ سم ، هـس = ٤ سم

، وجـ = ٧,٥ سم ، جـس = ٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ءو}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$

«٦ سم ، ٤ سم»

**٦ في الشكل المقابل :**

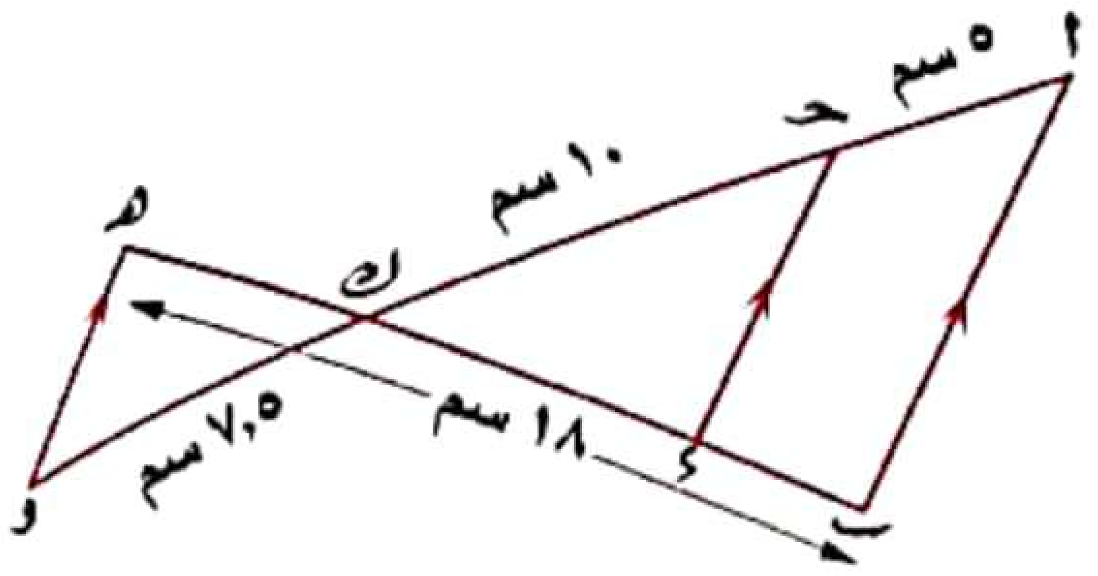



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ = {م} ، هـ ∈ $\overline{\text{مب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{مء}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{وهـ}}$ // $\overline{\text{ءب}}$

أوجد : (١) طول $\overline{\text{مو}}$ (٢) طول $\overline{\text{أم}}$

«١٠ سم ، ١٠,٨ سم»

**٧ في الشكل المقابل :**




إذا كان : أب // حـء // هـو

وكان : أحـ = ٥ سم ، حـك = ١٠ سم

، ك و = ٧,٥ سم ، ب هـ = ١٨ سم

**أوجد :** طول كل من بء ، ءك ، ك هـ

«٤ سم ، ٨ سم ، ٦ سم»

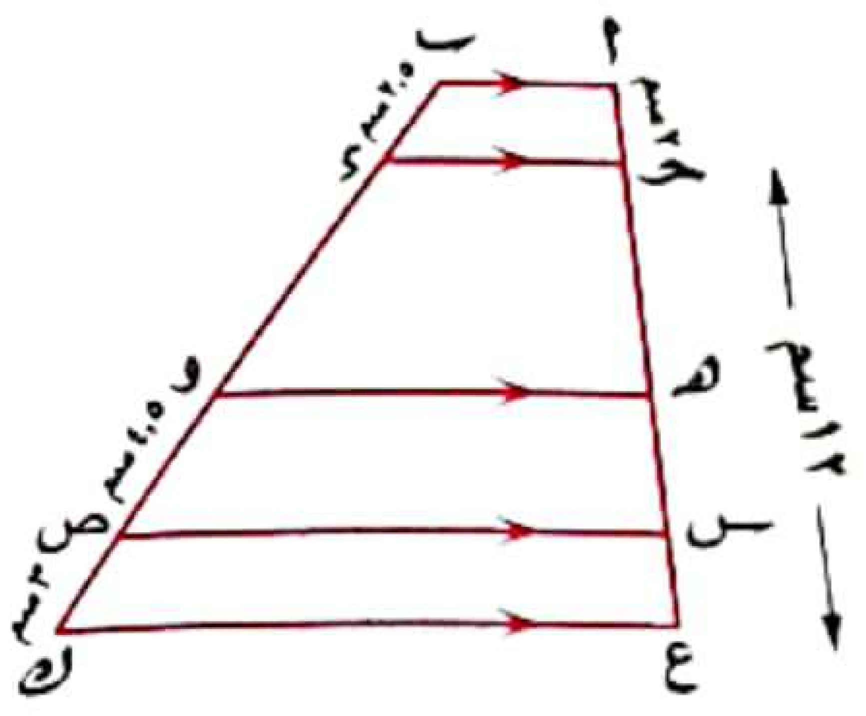
---

**٨** أب ∩ حـء = {هـ} ، س ∈ أب ، ص ∈ حـء

، وكان س ص // ب ء // أحـ **أثبت أن :** أس × هـ ء = حـ ص × هـ ب

---

**٩ في الشكل المقابل :**




أب // حـء // هـو // س ص // ع ك

، أحـ = ٢ سم ، ب ء = ٢,٥ سم

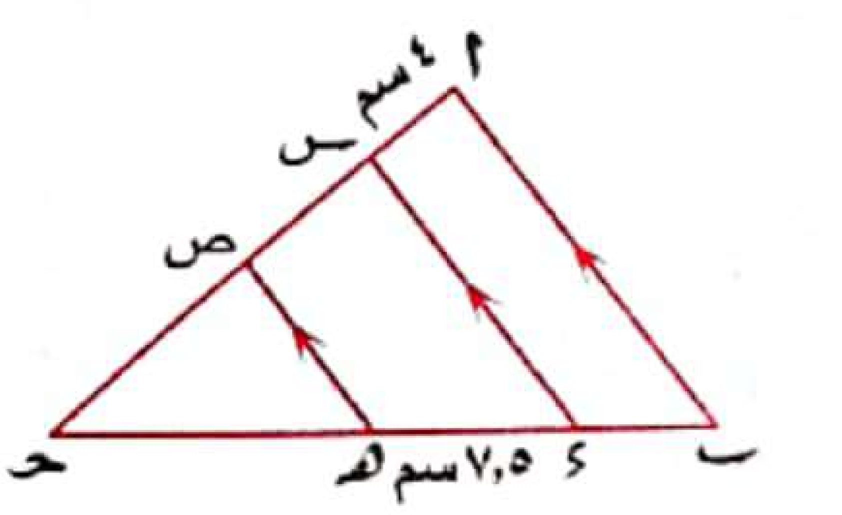
، و ص = ٤,٥ سم ، و ك = ٧,٥ سم ، حـ ع = ١٢ سم

**أوجد :** طول كل من هـ س ، س ع ، حـ هـ ، ء و

«٣,٦ سم ، ٢,٤ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

---

**١٠ في الشكل المقابل :**




أب // ء س // هـ ص ، أس : س ص : ص حـ = ٢ : ٣ : ٥

فإذا كان : ء هـ = ٧,٥ سم ، أس = ٤ سم

**فأوجد :** طول كل من ب ء ، حـ هـ ، أحـ

«٥ سم ، ١٢,٥ سم ، ٢٠ سم»

---

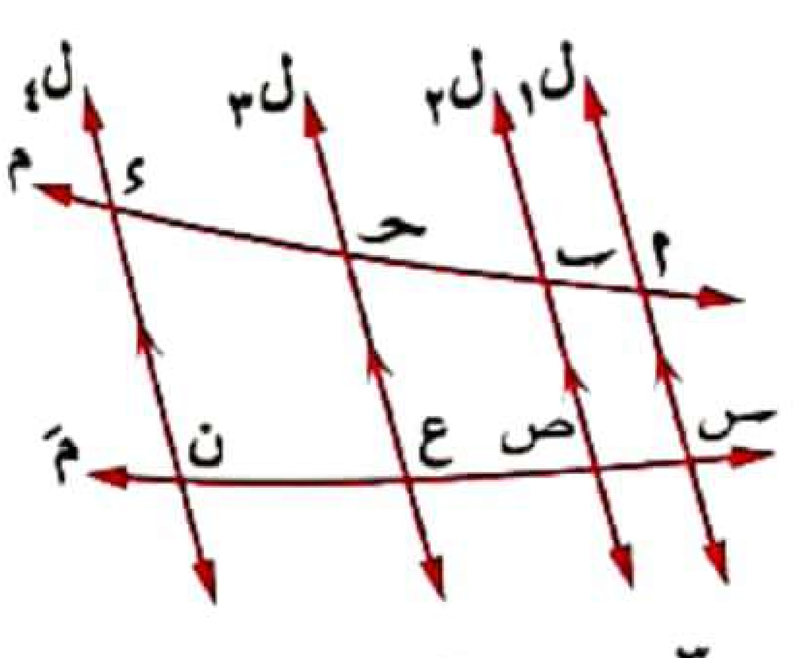
**١١** أب حـ مثلث ، ء ، هـ ∈ أب ، رسم ء س ، هـ ص يوازيان ب حـ ويقطعان أحـ في س ، ص على الترتيب فإذا كان : أء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ ، ء هـ = ٣ أء ، أحـ = ٢٤ سم

**فأوجد :** طول كل من أس ، س ص ، ص حـ

«٤ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم»

---

**١٢ في الشكل المقابل :**




ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ مستقيمان قاطعان لها فإذا كان :

$\frac{أب}{ب حـ} = \frac{١}{٢}$ ، ب حـ = $\frac{٤}{٥}$ حـ ء وكان س ن = ١٦,٥ سم

**فأوجد :** طول كل من س ص ، ص ع ، ع ن

«٣ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

**١٣** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث $\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٥}$ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{ب أ}$ وتقع خارج المثلث بحيث

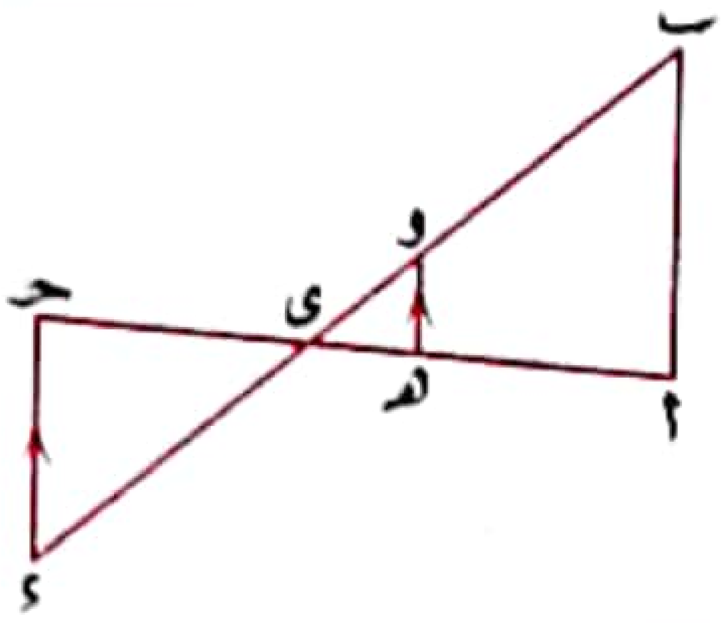
أهـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، رسم $\overrightarrow{ءس}$ ، $\overrightarrow{هـ ص}$ يوازيان $\overline{ب حـ}$ ويقطعان $\overleftrightarrow{أحـ}$ فى س ، ص على الترتيب فإذا كان :

أ ص = ١٤ سم فأوجد : طول كل من $\overline{أس}$ ، $\overline{أحـ}$

«١٠.٥ سم ، ٢٨ سم»

---

**١٤** فى الشكل المقابل :




$\overline{هـ و}$ // $\overline{حـ ء}$ ، $\frac{أ ى}{ى حـ} = \frac{ء ى}{ى و}$

أثبت أن : $(ى حـ)^{٢}$ = ى أ × ى هـ

---

**١٥** ر أ ط ب شبه منحرف فيه : $\overline{ر أ}$ // $\overline{ب ط}$ ، م منتصف $\overline{ر ب}$ ، رسم مستقيم يمر بالنقطة م ، يوازى $\overline{ب ط}$

ويقطع القطر $\overline{أ ب}$ فى ن ، ويقطع القطر $\overline{ر ط}$ فى هـ ، والضلع $\overline{أ ط}$ فى و

(١) بيِّن أن النقط ن ، هـ ، و منتصفات القطع المستقيمة $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ر ط}$ ، $\overline{أ ط}$

(٢) أثبت أن : م و = $\frac{١}{٢}$ (ر أ + ب ط)

---

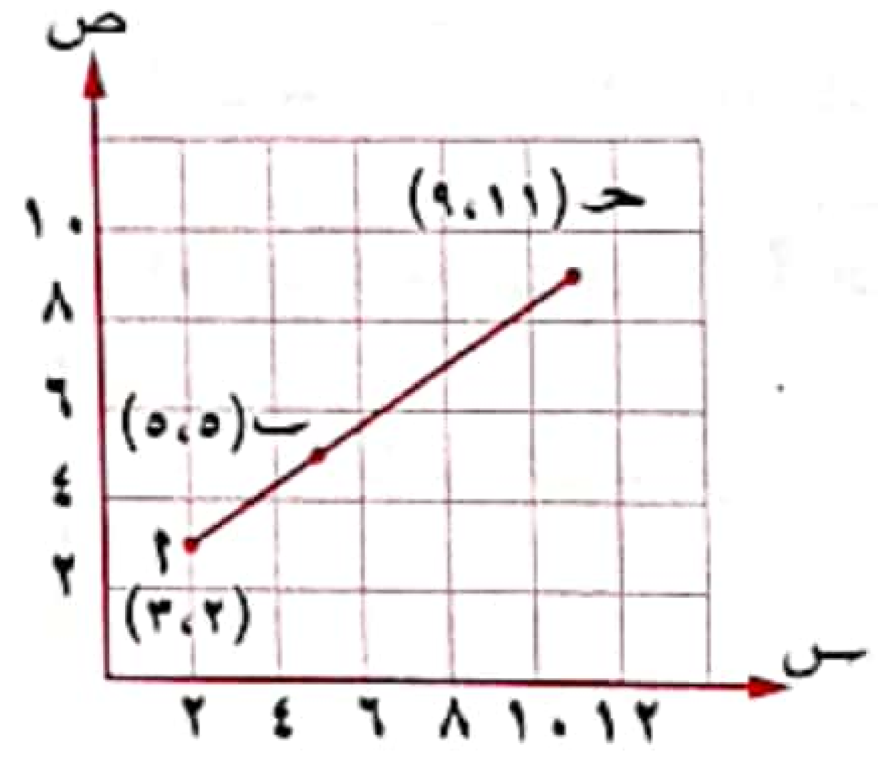
**١٦** أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، تقاطع قطراه فى م ، نصفت $\overline{ب حـ}$ فى هـ

، ورسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overline{ب أ}$ ، ويقطع $\overline{ب ء}$ فى س ، $\overline{أ حـ}$ فى ص ، $\overline{أ ء}$ فى و

أثبت أن : (١) هـ ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب  (٢) $\frac{أ ص}{حـ م} = \frac{ب س}{ء م}$

---

**١٧** تفكير ناقد :




أوجد من الشكل $\frac{أ ب}{ب حـ}$ بعدة طرق مختلفة

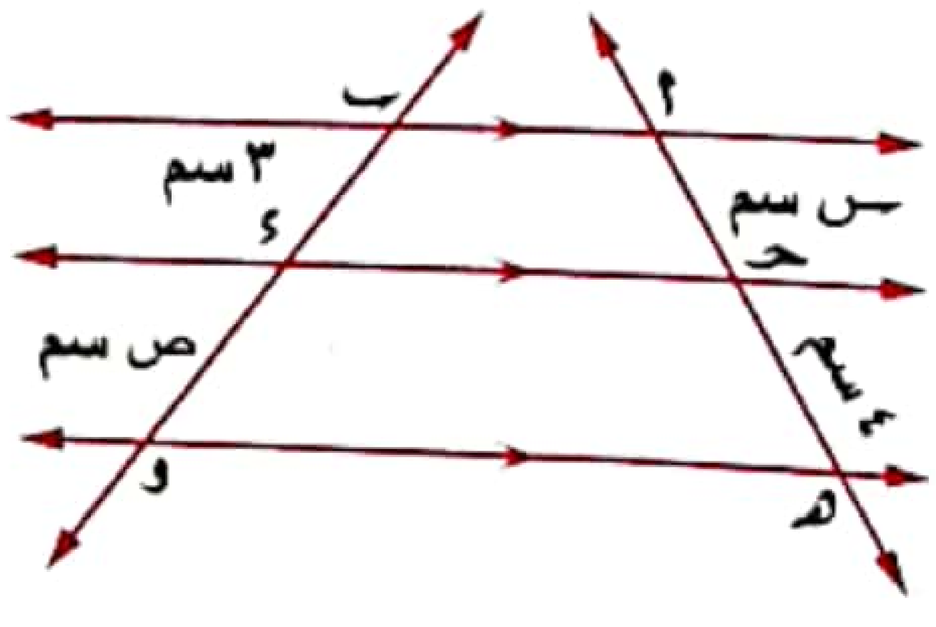
، كلما أمكنك ذلك.

هل حصلت على نفس الناتج ؟

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٨** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

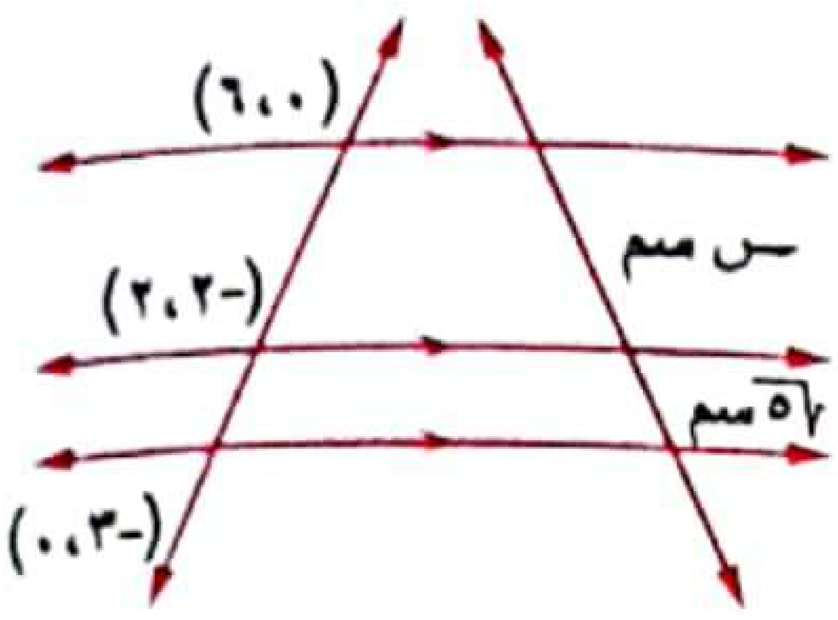



إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٧$

فإن : س + ص = .............. سم

(أ) ٧  (ب) ٩  (جـ) ١١  (د) ١٢

(٢) في الشكل المقابل :

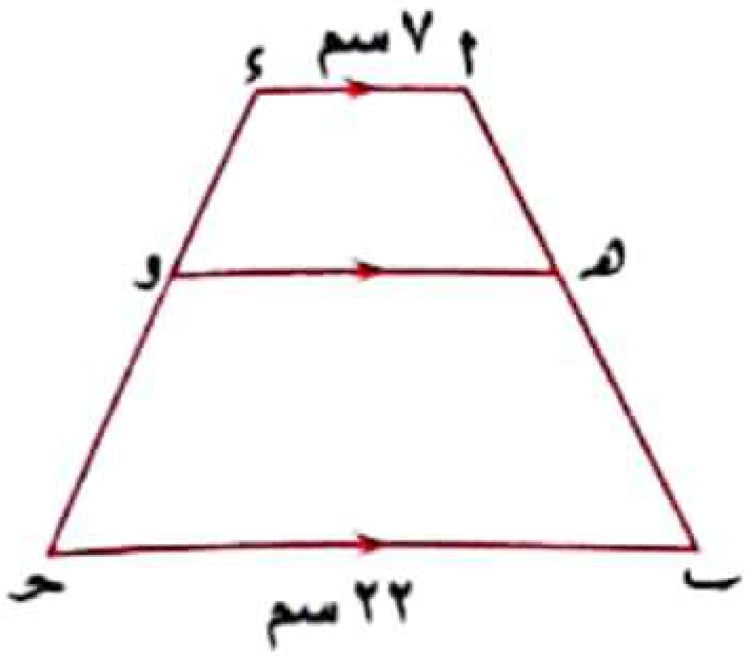



س = .............. سم

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $2\sqrt{5}$

(جـ) $3\sqrt{5}$ (د) $4\sqrt{5}$

(٣) في الشكل المقابل :



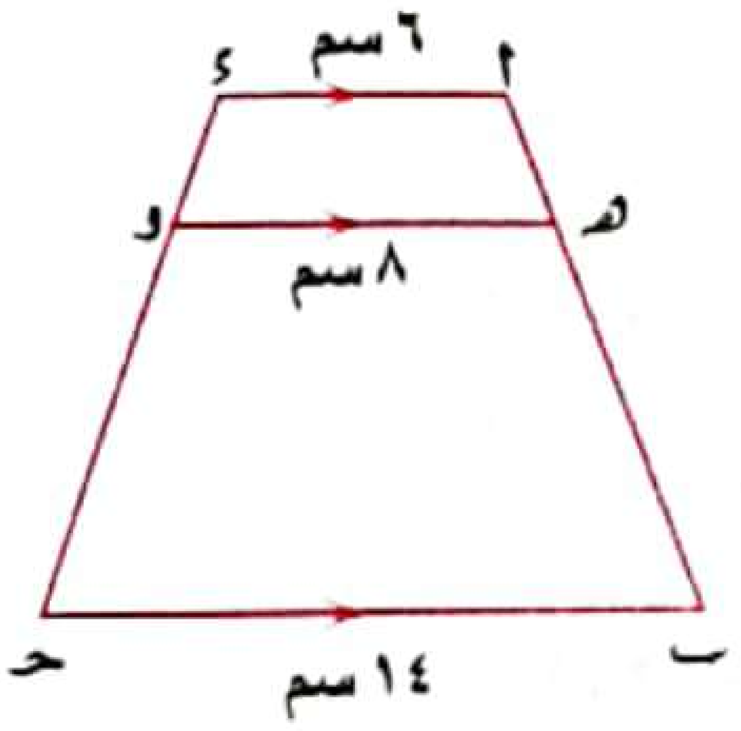

إذا كان : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{2}{3}$

فإن : هـ و = .............. سم

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥

(٤) في الشكل المقابل :




$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} =$ ..............

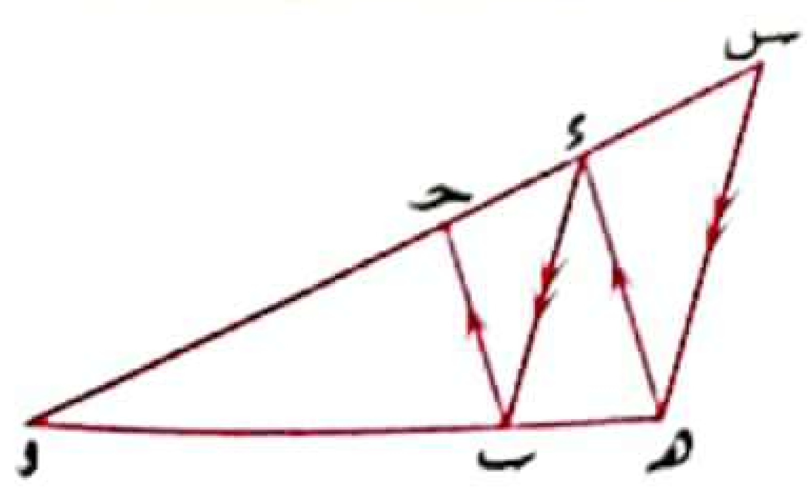
(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{7}$

(جـ) $\frac{3}{7}$ (د) $\frac{1}{3}$

**١٩** أ ب حـ مثلث ، م منتصف الضلع ب حـ فرضت نقطة ن على أ م ، رسم ن هـ // أ ب ويقطع ب حـ في هـ ، ورسم ن ى // أ حـ ويقطع ب حـ في ى **أثبت أن :** م منتصف هـ ى

، وإذا كانت ن ملتقى متوسطات المثلث أ ب حـ **فأثبت أن :** ب هـ = هـ ى = ى حـ = $\frac{1}{3}$ ب حـ

**٢٠** في الشكل المقابل :




هـ ء // ب حـ ، ء ب // هـ س

**أثبت أن :** $\left(\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}}\right)^2 = \frac{\text{و حـ}}{\text{و س}}$

**٢١** أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، رسم ء هـ فقطع أ حـ ، أ ب في س ، هـ على الترتيب ، رسم ء و فقطع أ حـ ، ب حـ في ص ، و على الترتيب فإذا كان : أ س = حـ ص

**فأثبت أن :** هـ و // س ص

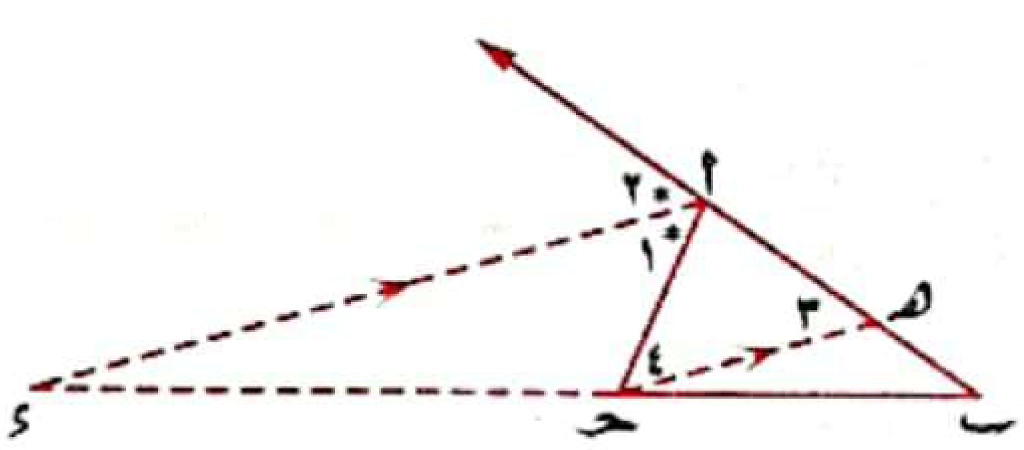


الدرس **3**

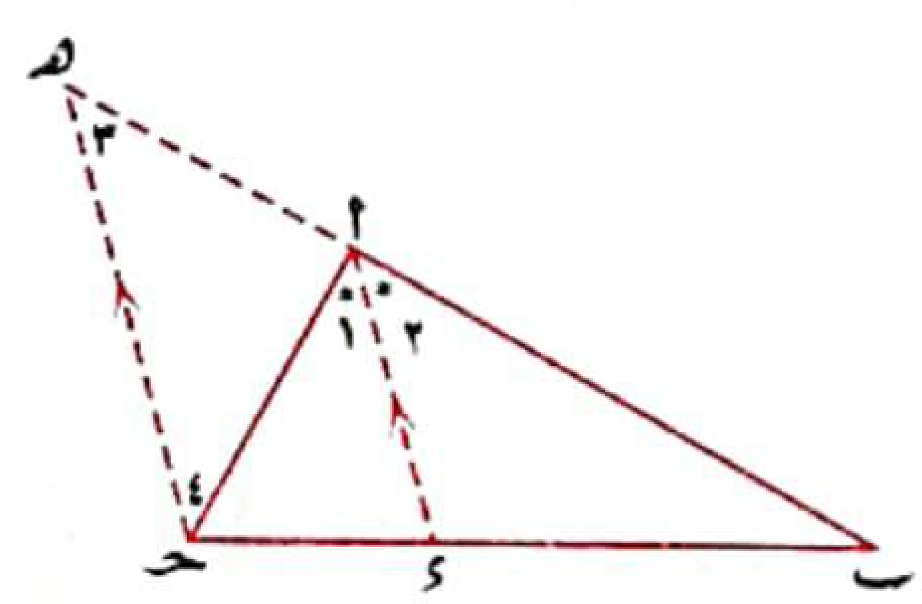
# منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

**نظرية ٣**

**إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين.**




شكل (٢)




شكل (١)

**◂ المعطيات** أ ب ح مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ ح (من الداخل فى شكل (١) ، من الخارج فى شكل (٢))

**◂ المطلوب** إثبات أن : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

**◂ العمل** ارسم $\overleftrightarrow{\text{ح هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ فى هـ

**◂ البرهان**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ ح ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٢

، ∵ $\overline{\text{ح هـ}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٤ (بالتبادل)

، ∠ ٣ ≡ ∠ ٢ (بالتناظر)

، ∵ ∠ ١ ≡ ∠ ٢ ∴ ∠ ٣ ≡ ∠ ٤

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ≡ $\overline{\text{أ ح}}$ (١)

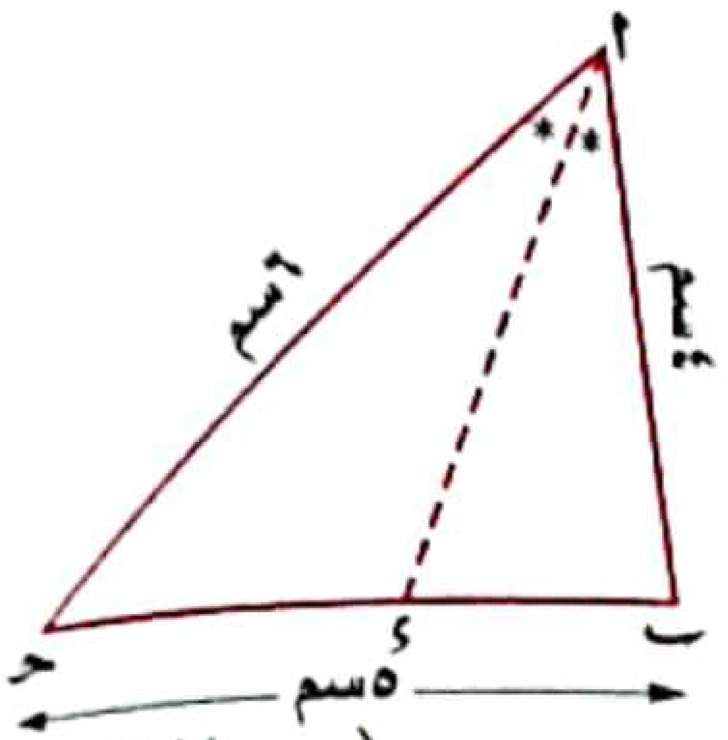
، ∵ $\overline{\text{ح هـ}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ (وهو المطلوب)

## مثال ١

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ هي على الترتيب ٤ ، ٥ ، ٦ من السنتيمترات ، نصفت زاوية أ بمنصف قطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في ء **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$

### الحل




∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{٥ - \text{ب ء}} = \frac{٢}{٣}$

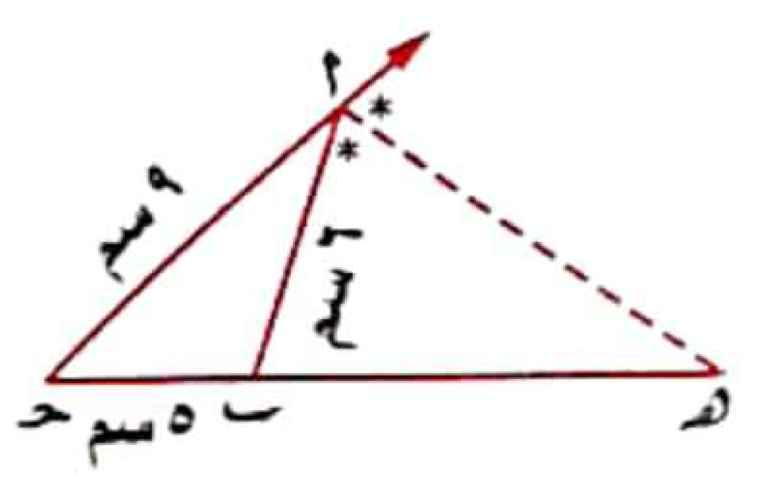
∴ ٣ ب ء = ١٠ − ٢ ب ء ∴ ٥ ب ء = ١٠

∴ ب ء = ٢ سم ، ء جـ = ٥ − ٢ = ٣ سم (وهو المطلوب)

## مثال ٢

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ هي على الترتيب ٦ ، ٥ ، ٩ من السنتيمترات ، نصفت الزاوية الخارجة للمثلث عند أ بمنصف قطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في هـ **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

### الحل




∵ أ ب < أ جـ ، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{٥ + \text{ب هـ}} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ب هـ = ١٠ + ٢ ب هـ ∴ ب هـ = ١٠ سم ، هـ جـ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

## مثال ٣

أ ب جـ مثلث ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع $\overline{\text{أب}}$ في ء ، نصفت ∠ أ س جـ بمنصف قطع $\overline{\text{أجـ}}$ في هـ أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

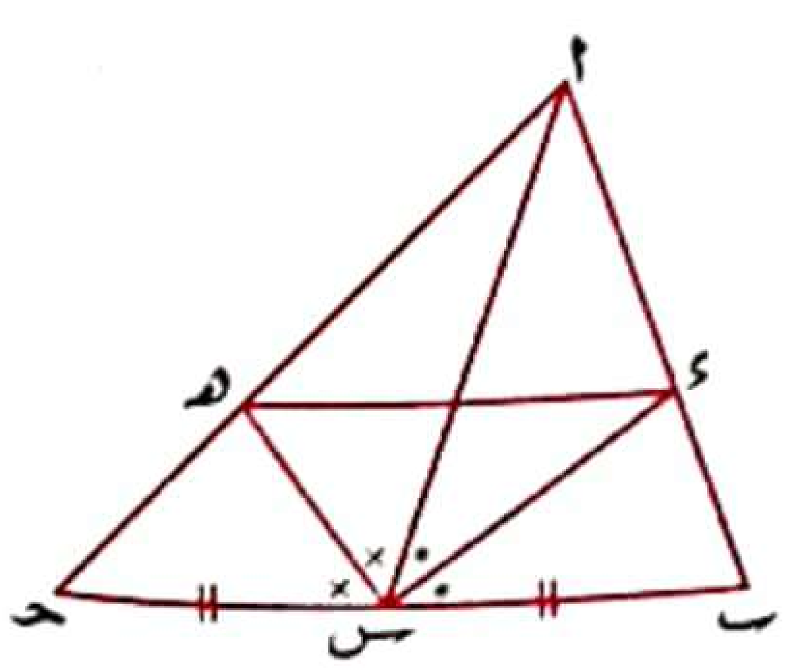
### الحل

في Δ أ س ب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{س ء}}$ ينصف ∠ أ س ب

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س ب}}$ (١)

، في Δ أ س جـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{س هـ}}$ ينصف ∠ أ س جـ

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{س جـ}}$ (٢)




من (١) ، (٢) وملاحظة أن : س ب = س جـ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ في Δ أ ب جـ : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

(وهو المطلوب)

## مثال ٤




في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء

بحيث : ب ء = ١٢ سم ، ء ح = ١٨ سم فإذا كان محيط Δ أ ب ح = ٨٠ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

### الحل

فى Δ أ ب ح : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ محيط Δ أ ب ح = ٨٠ سم ، ب ح = ١٢ + ١٨ = ٣٠ سم

∴ أ ب + أ ح = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠ سم

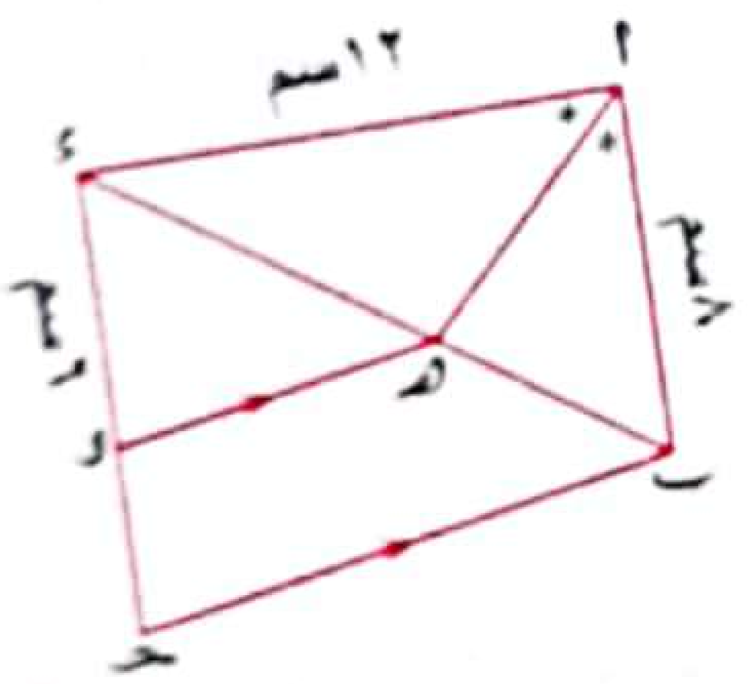
، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{أ ب} + \text{أ ح}}{\text{أ ح}} = \frac{٢ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{٥٠}{\text{أ ح}} = \frac{٥}{٣}$ ∴ أ ح = $\frac{٣ \times ٥٠}{٥}$ = ٣٠ سم

∴ أ ب = ٥٠ − ٣٠ = ٢٠ سم

(وهو المطلوب)

### حاول بنفسك




فى الشكل المقابل :

أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ء = ١٢ سم

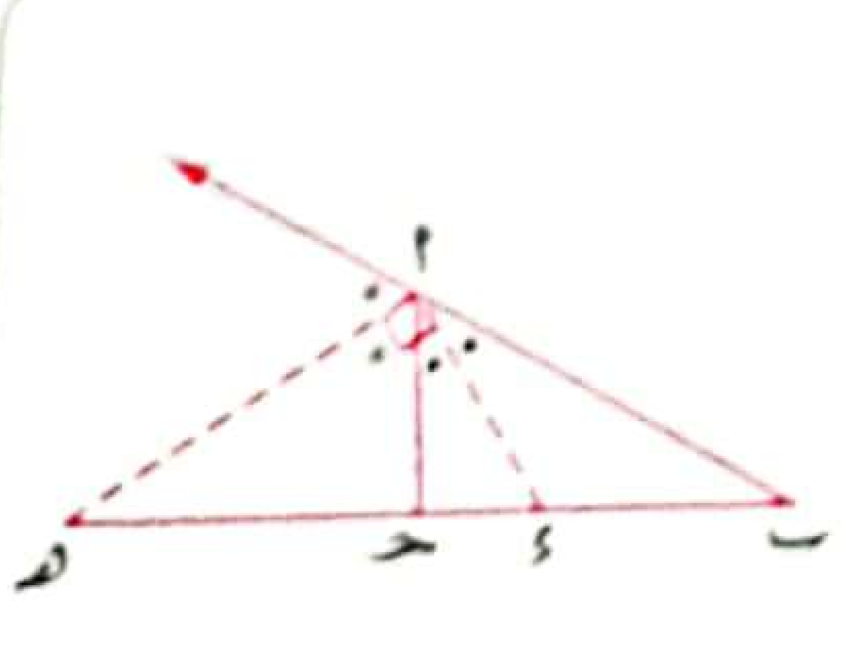
، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى هـ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$

ويقطع $\overline{\text{ء ح}}$ فى و ، فإذا كان ء و = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{\text{ء ح}}$

### ملاحظات هامة

١ المنصفان الداخلى والخارجى لأى زاوية من زوايا المثلث يكونان متعامدين




ففى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ هما المنصفان للزاوية أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ على الترتيب فإن :

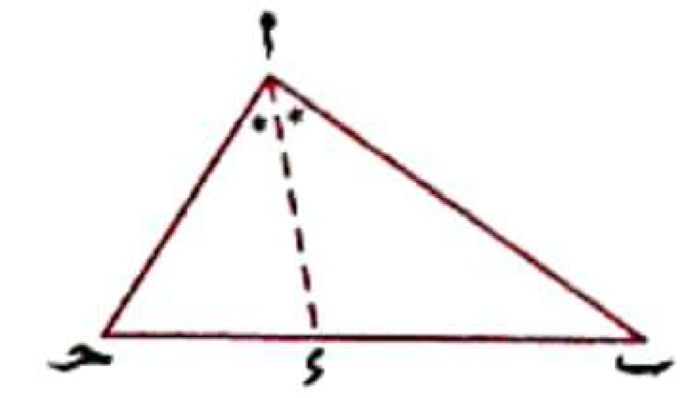
$\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ح}}$

∴ القاعدة $\overline{\text{ب ح}}$ تنقسم من الداخل فى ء

ومن الخارج فى هـ بنفس النسبة (أ ب : أ ح)

ويلاحظ أن المنصفين $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ متعامدان أى أن ق (∠ ء أ هـ) = ٩٠°

٢ **إذا كان :** أء ينصف ∠ ب أ ح ويقطع ب ح في ء فإن ء تأخذ أحد الأوضاع الآتية :

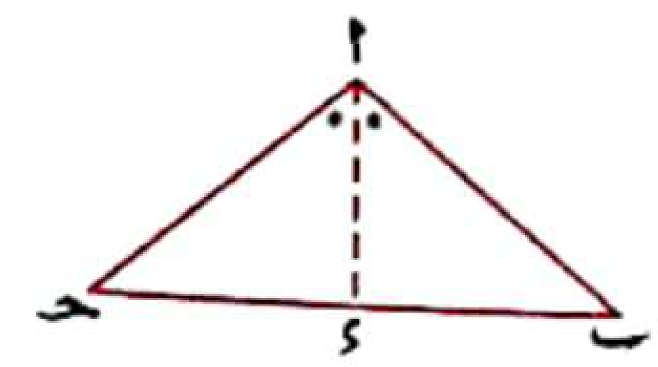



إذا كان : أب > أح

فإن : ب ء > ء ح

**أي أن**

ء أقرب إلى ح منها إلى ب

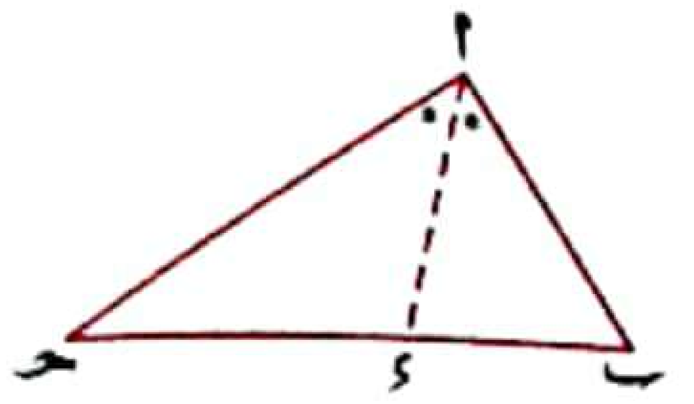



إذا كان : أب = أح

فإن : ب ء = ء ح

**أي أن**

ء على بعدين متساويين من ب ، ح




إذا كان : أب < أح

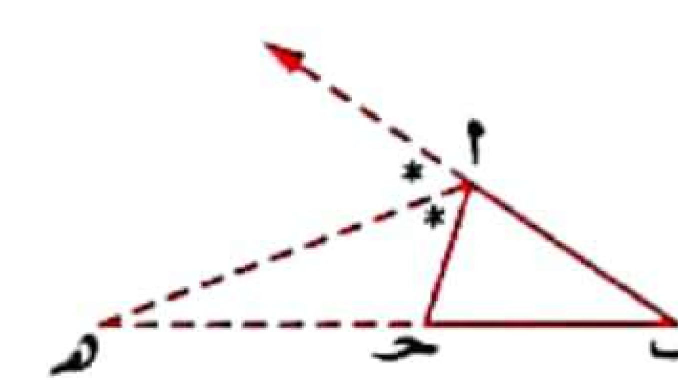
فإن : ب ء < ء ح

**أي أن**

ء أقرب إلى ب منها إلى ح

٣ **إذا كان :** أهـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب ح عند أ حيث هـ ∉ ب ح

فإن هـ تأخذ أحد الأوضاع الآتية :

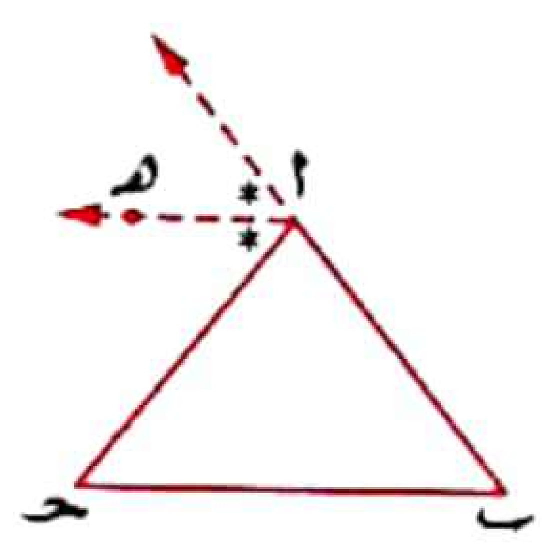



إذا كان : أب > أح

فإن : ب هـ > هـ ح

**أي أن**

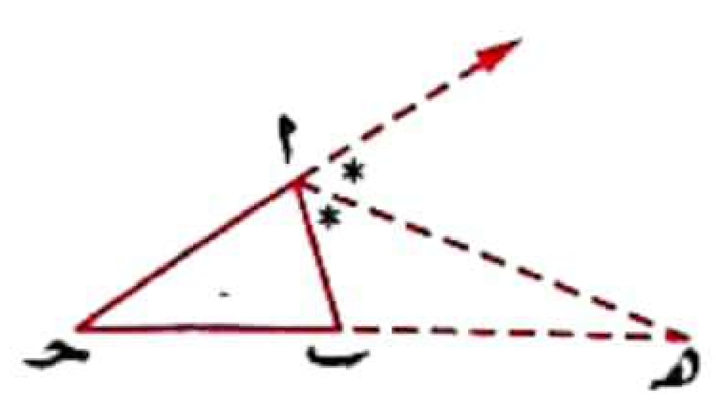
هـ ∈ ب ح




إذا كان : أب = أح

فإن : أهـ // ب ح

**أي أن** المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث متساوي الساقين يوازي القاعدة




إذا كان : أب < أح

فإن : ب هـ < هـ ح

**أي أن**

هـ ∈ ح ب

## مثال ٥

أ ب ح مثلث فيه : أب = ٨ سم ، أح = ٦ سم ، ب ح = ٧ سم ، رُسم أء ينصف ∠ أ ويقطع ب ح في ء ، رسم أهـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ب ح في هـ **أوجد :** طول ء هـ

## الحل

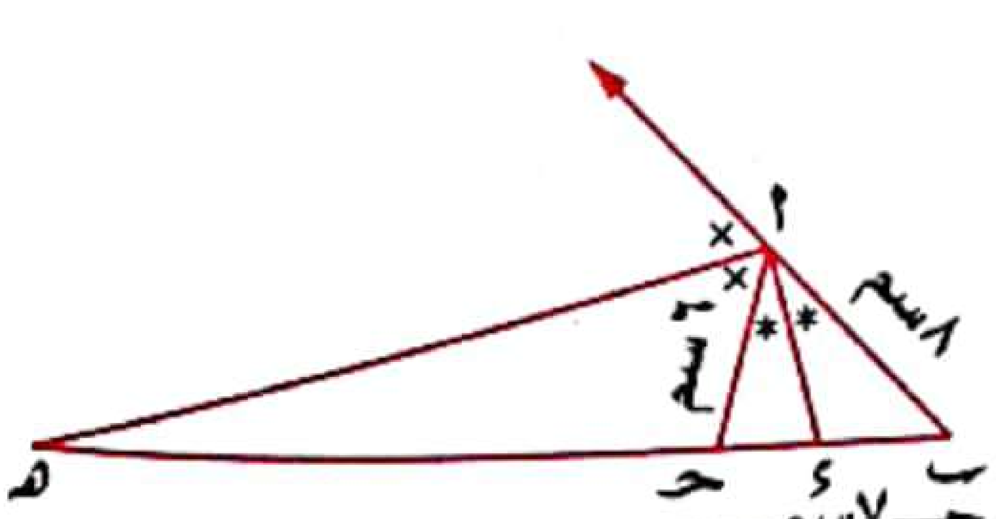
في Δ أ ب ح :

∵ أء ينصف ∠ أ ، أهـ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ح هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ح}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ح هـ}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب ء + ء ح}}{\text{ء ح}} = \frac{٤ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{\text{ب ح}}{\text{ء ح}} = \frac{٧}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{ء ح}} = \frac{٧}{٣}$ ∴ ء ح = ٣ سم




(١)

ومن (١) : ∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ} - \text{هـ حـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٤ - ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ حـ هـ = ٢١ سم

∴ ء هـ = ء حـ + حـ هـ = ٣ + ٢١ = ٢٤ سم

(وهو المطلوب)

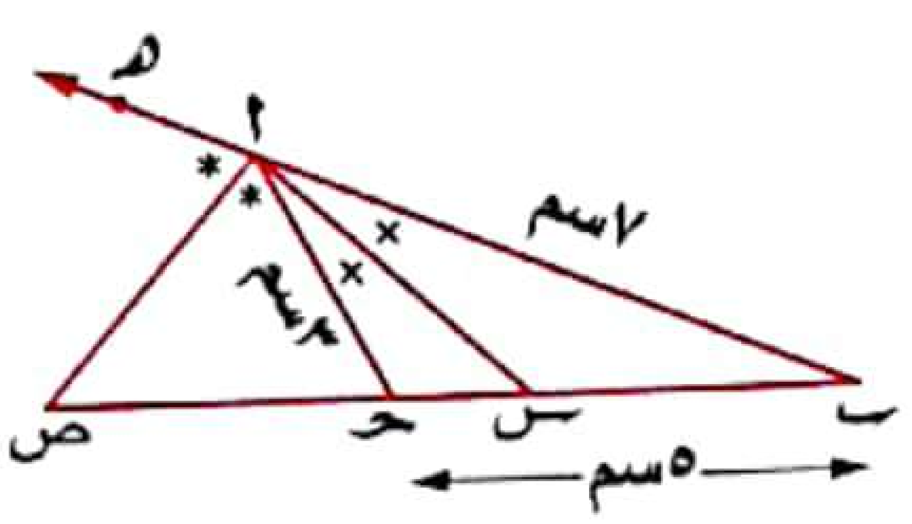
**حاول بنفسك**

في الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$ ينصف ∠ حـ أ هـ

، أ ب = ٧ سم ، أ حـ = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

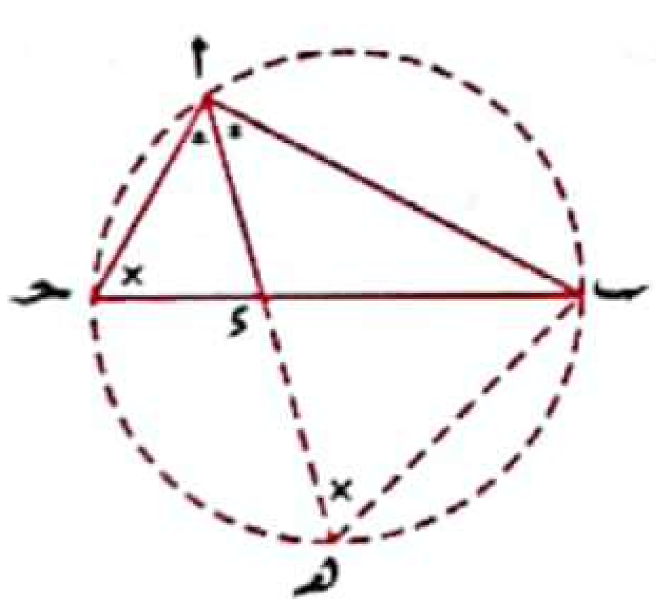



## إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث

**تمرين مشهور**

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ في Δ أ ب حـ من الداخل ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء

فإن : أء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$




**المعطيات** أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ من الداخل

، {ء} = $\overrightarrow{\text{أء}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$

**المطلوب** إثبات أن : أء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

**العمل** ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب حـ وتقطع $\overrightarrow{\text{أء}}$ في هـ ، ارسم $\overline{\text{ب هـ}}$

**البرهان** ∵ ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ هـ أ ب) (معطى)

، ق (∠ هـ) = ق (∠ حـ) (محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ أ هـ ب وينتج أن : $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

∴ أ ء × أ هـ = أ ب × أ حـ

∴ أ ء × (أ ء + ء هـ) = أ ب × أ حـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − أ ء × ء هـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − ب ء × ء حـ

**أي أن** أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

(وهو المطلوب)

**تذكر أن**

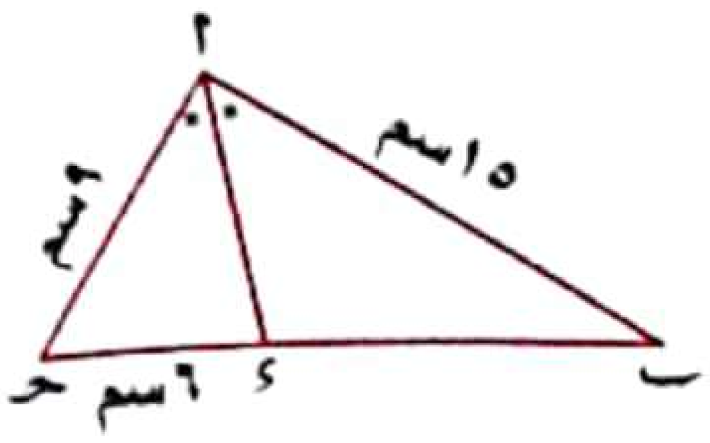
أ ء × ء هـ = ب ء × ء حـ

## مثال ٦

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ١٥ سم ، أ جـ = ٩ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د

فإذا كان : د جـ = ٦ سم أوجد : طول $\overline{\text{أ د}}$

### الحل




∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{٦} = \frac{١٥}{٩}$ ∴ ب د = $\frac{١٥ \times ٦}{٩}$ = ١٠ سم

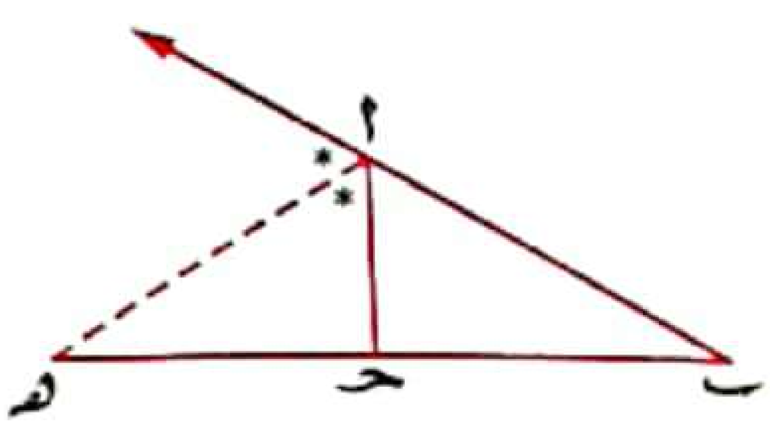
∴ أ د = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ جـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$ = $\sqrt{١٥ \times ٩ - ١٠ \times ٦}$ = $\sqrt{٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم **(وهو المطلوب)**

### ملاحظة

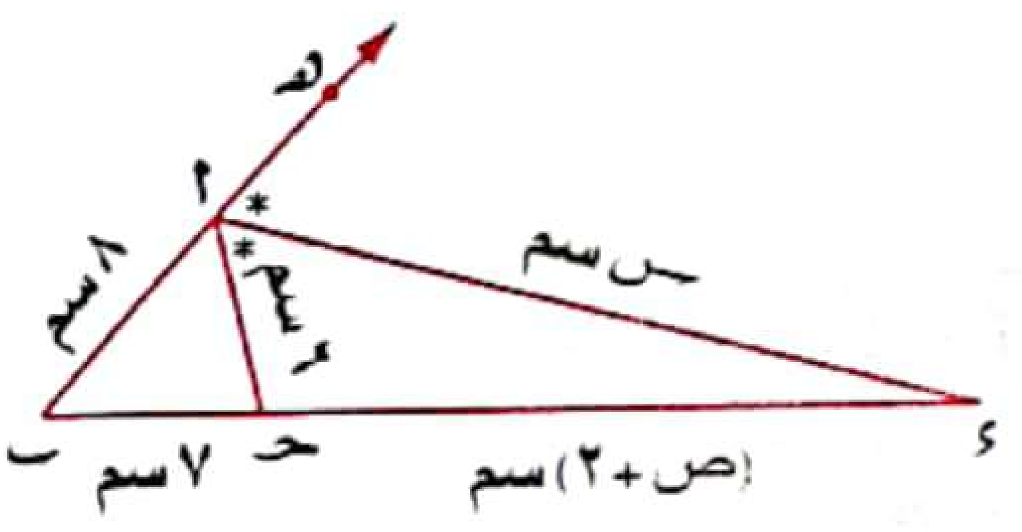
في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الخارج ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في هـ

فإن : أ هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{أ ب} \times \text{أ جـ}}$




## مثال ٧




في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٧ سم ، أ جـ = ٦ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ أ الخارجة أوجد : قيمة كل من س ، ص

### الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ أ الخارجة ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{٧ + \text{ص} + ٢}{\text{ص} + ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ص} + ٩}{\text{ص} + ٢} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ ص + ٢٧ = ٤ ص + ٨

∴ ص = ١٩ ∴ د جـ = ٢١ سم ، ب د = ٢٨ سم

، ∵ أ د = $\sqrt{\text{ب د} \times \text{جـ د} - \text{ب أ} \times \text{أ جـ}}$ = $\sqrt{٢٨ \times ٢١ - ٨ \times ٦}$ = $\sqrt{٥٤٠}$ = ٦ $\sqrt{١٥}$ سم

∴ س = ٦ $\sqrt{١٥}$

**(وهو المطلوب)**

### حاول بنفسك

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٢٧ سم ، أ جـ = ١٥ سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د

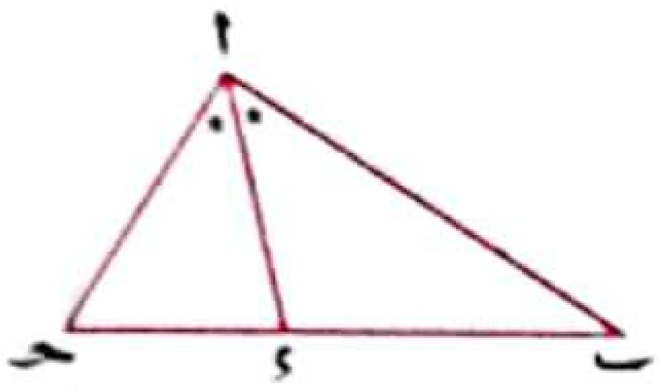
فإذا كان : ب د = ١٨ سم فأوجد : طول $\overline{\text{أ د}}$

## تمارين 7 على منصفي الزاوية والأجزاء المتناسبة

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

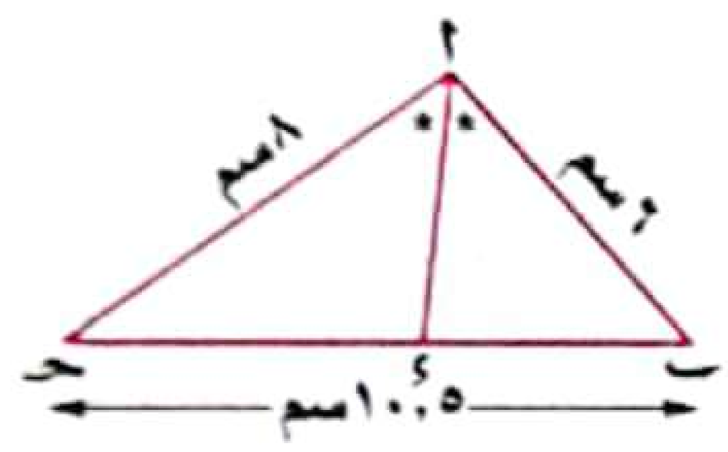
**١** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :




(١) 📖 فى الشكل المقابل :

إذا كان : أء ينصف ∠ أ فإن : أب × جـ ء = ...............

(أ) أجـ × ب ء (ب) $(أء)^٢$ (جـ) أء × ب ء (د) أجـ × أب

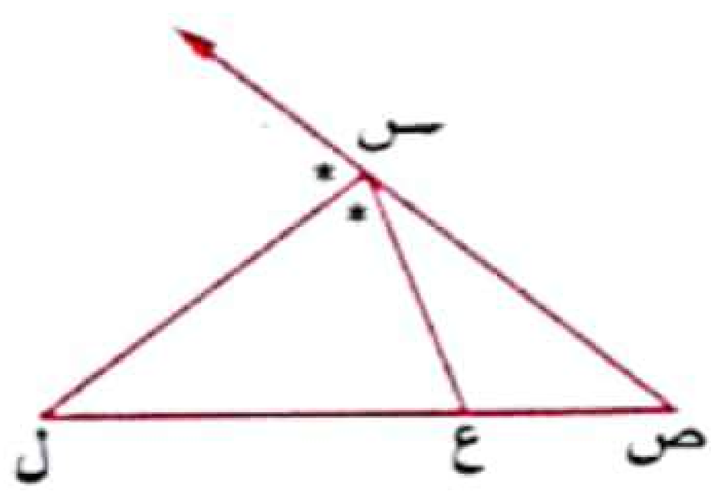



(٢) فى الشكل المقابل :

ب ء = ............... سم

(أ) ٤ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) ٤,٥ (د) ٤٥

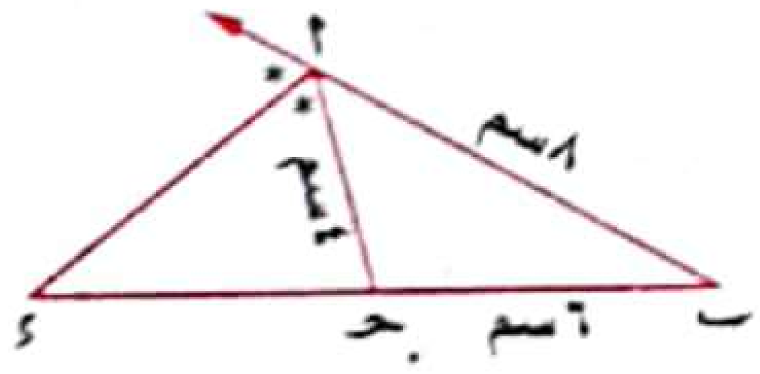



(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : س ل ينصف ∠ س الخارجة فإن : $\frac{ص ل}{ص س}$ = ...............

(أ) $\frac{ص ع}{ع ل}$ (ب) $\frac{ص ل}{ل ع}$

(جـ) $\frac{ل ع}{ع س}$ (د) $\frac{س ع}{س ص}$

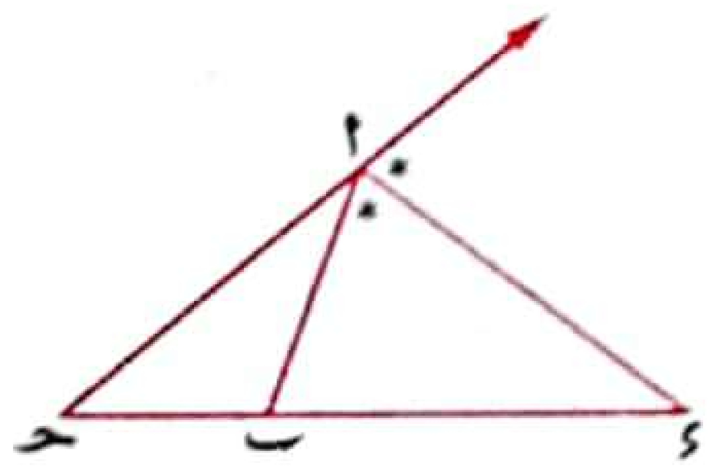



(٤) فى الشكل المقابل :

جـ ء = ............... سم

(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٨

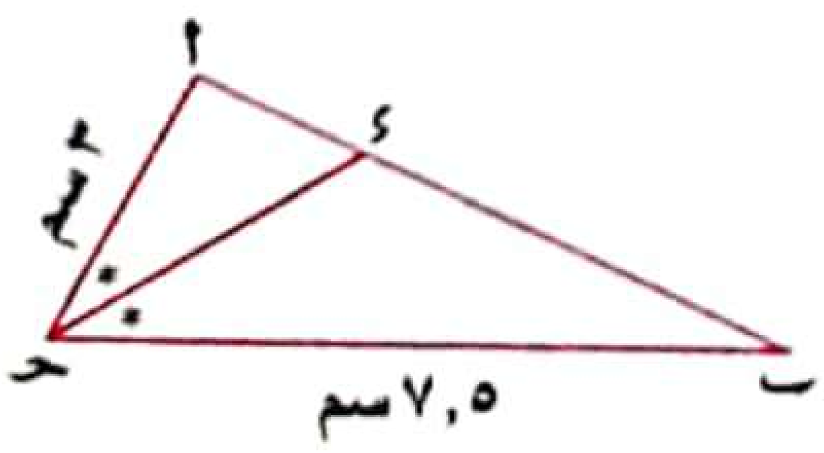



(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان أب : أجـ = ٢ : ٣

فإن ب ء : ب جـ = ...............

(أ) ٢ : ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$




(٦) فى الشكل المقابل :

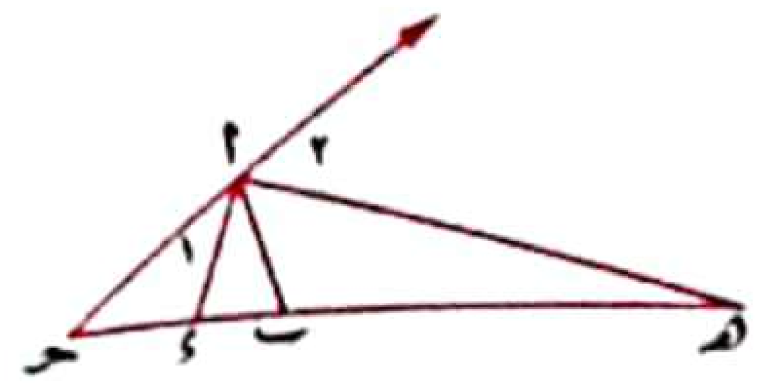
إذا كان : جـ ء ينصف ∠ جـ ، أجـ = ٣ سم

، ب جـ = ٧,٥ سم

فإن أء : ب ء = ...............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ : ٥ (د) ٥ : ٢

(٧) في الشكل المقابل :

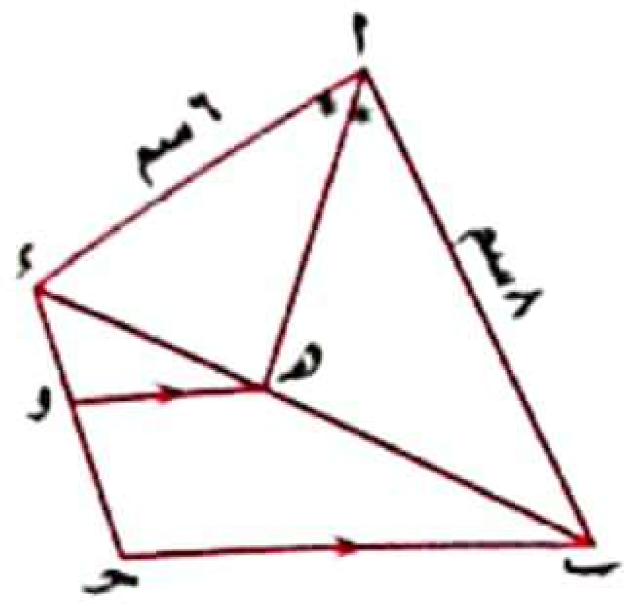


△ $\overset{\triangle}{}$ أ ب حـ فيه $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية عند الرأس أ على الترتيب، ق (∠ ١) = ٣٦°

فإن : ق (∠ ٢) = ..............°

(أ) ٣٦ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٤ (د) ١٠٨

(٨) في الشكل المقابل :

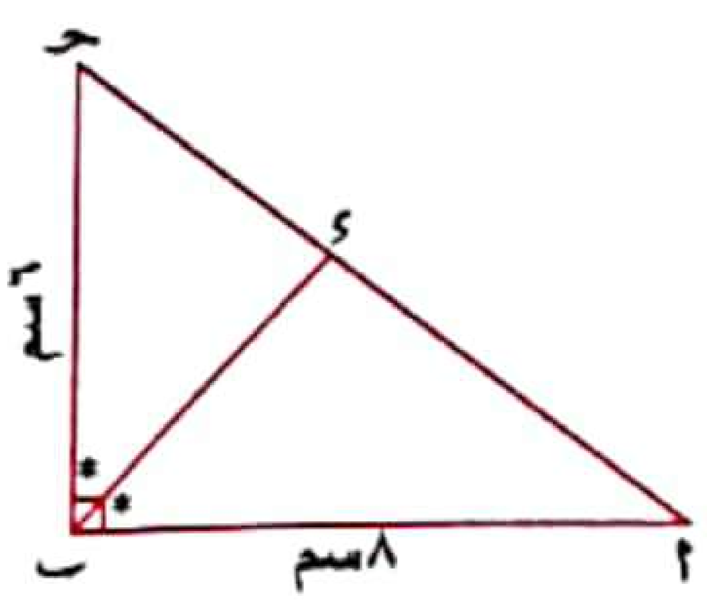



$\frac{\text{ء و}}{\text{و حـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٨}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٩) في الشكل المقابل :

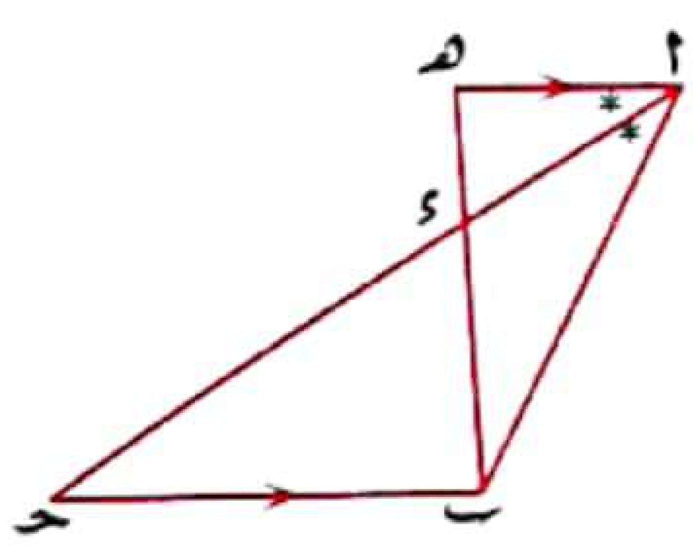



أ ء = .............. سم

(أ) ٥ $\frac{٥}{٧}$ (ب) ٦ $\frac{٣}{٤}$

(جـ) ٥ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٠) في الشكل المقابل :

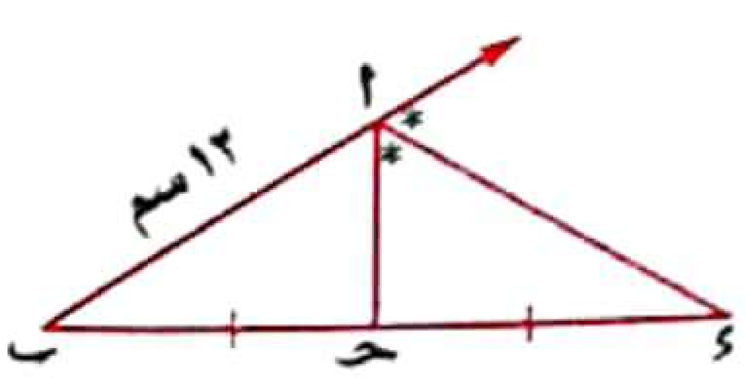


إذا كان : أ حـ = ٣ أ ء

فإن أ ب : أ هـ = ..............

(أ) ٣ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ١

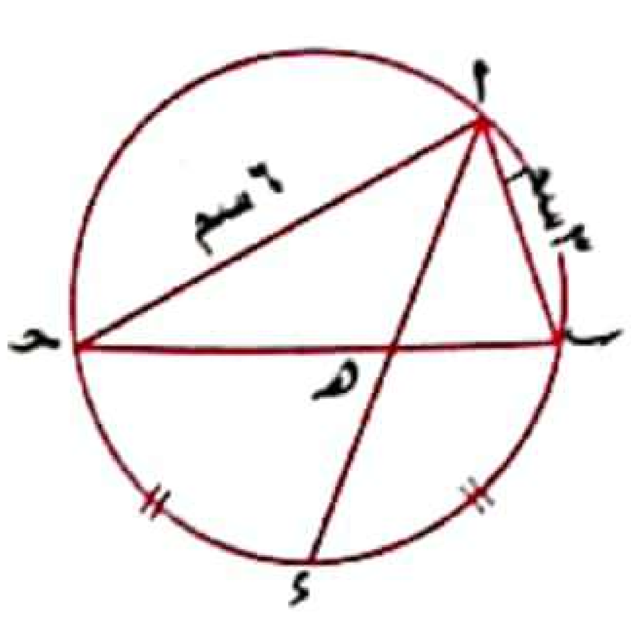
(١١) في الشكل المقابل :




أ حـ = .............. سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

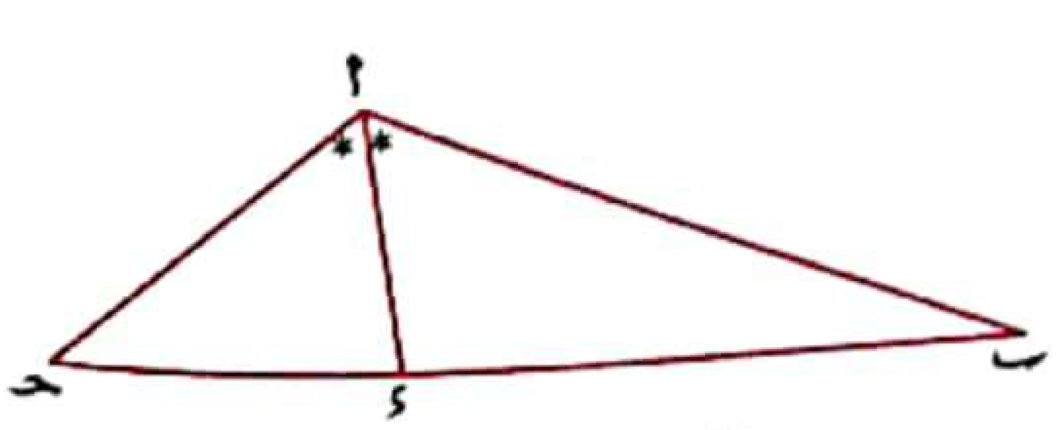
(١٢) في الشكل المقابل :




$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(١٣) في الشكل المقابل :



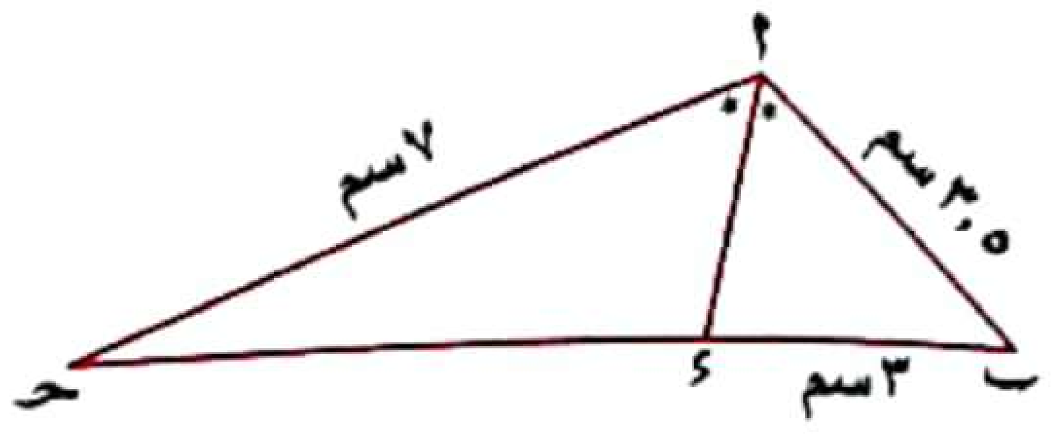
إذا كان أ ب : أ حـ : ب حـ = ٥ : ٣ : ٧

فإن ب ء : ء حـ = ..............

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٧}$

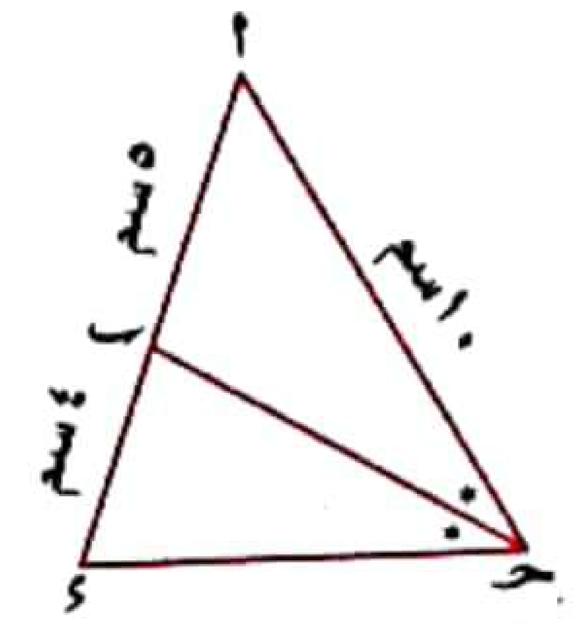
**٢** أوجد المطلوب أسفل كل شكل من الأشكال التالية :

(١)




طول $\overline{حـ ء}$

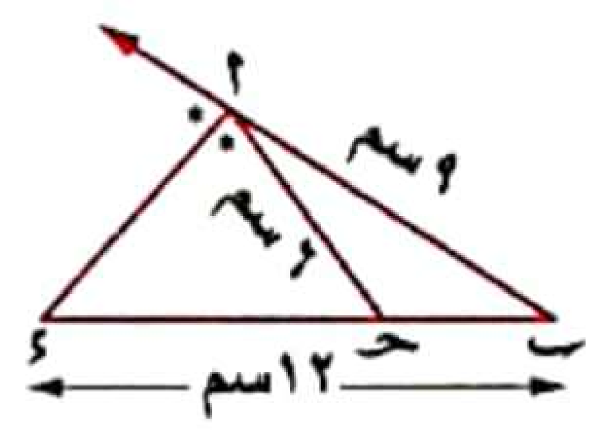
(٢)




طول كل من

$\overline{حـ ء}$ ، $\overline{حـ ب}$

(٣)

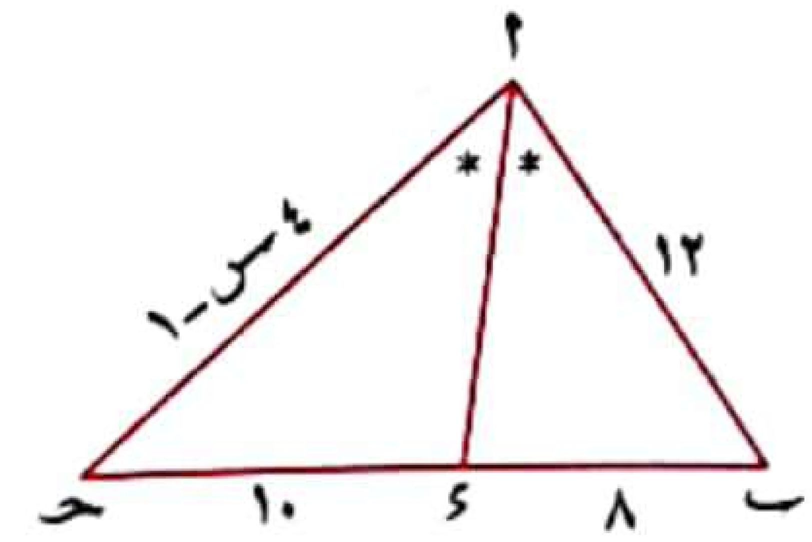



طول كل من

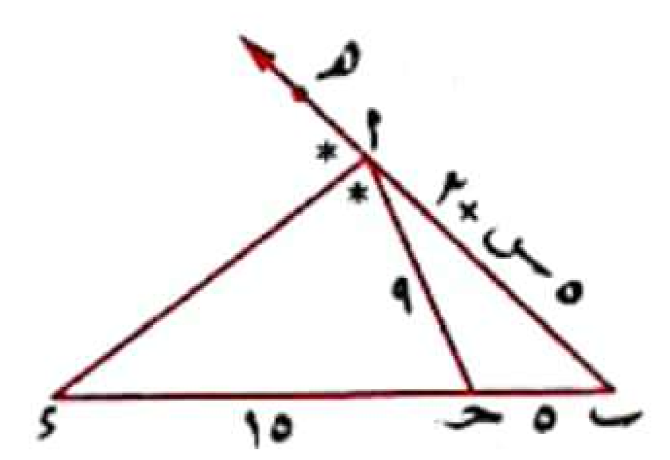
$\overline{حـ ء}$ ، $\overline{أ ء}$

**٣** 📖 فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

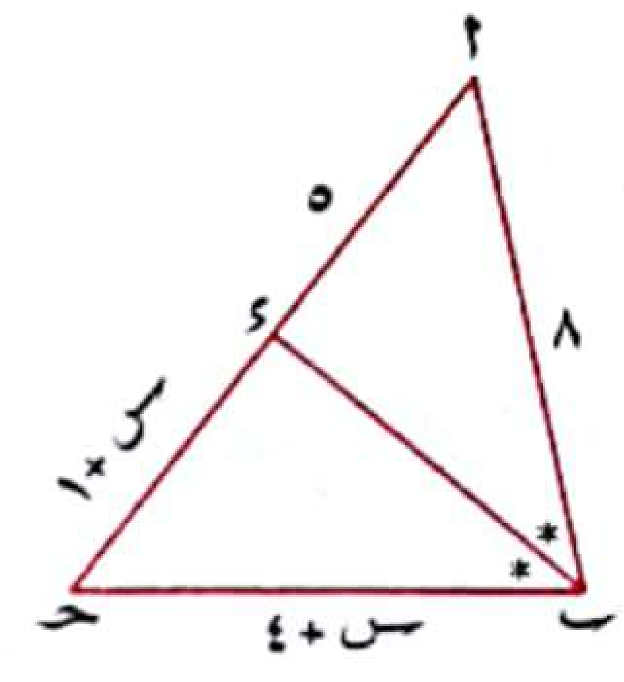
(١)



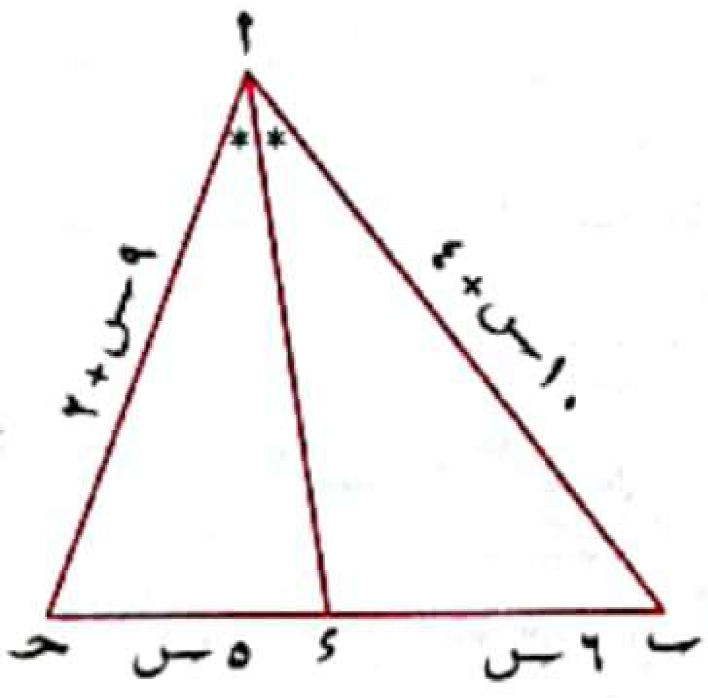

(٢)




(٣)

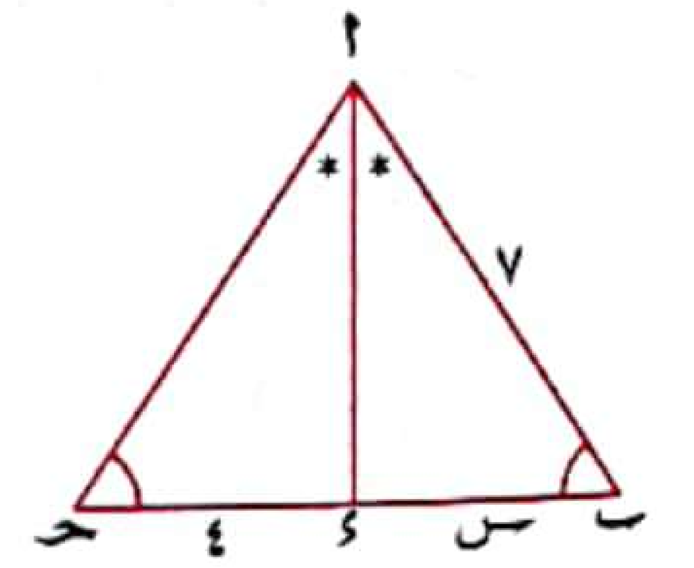



(٤)

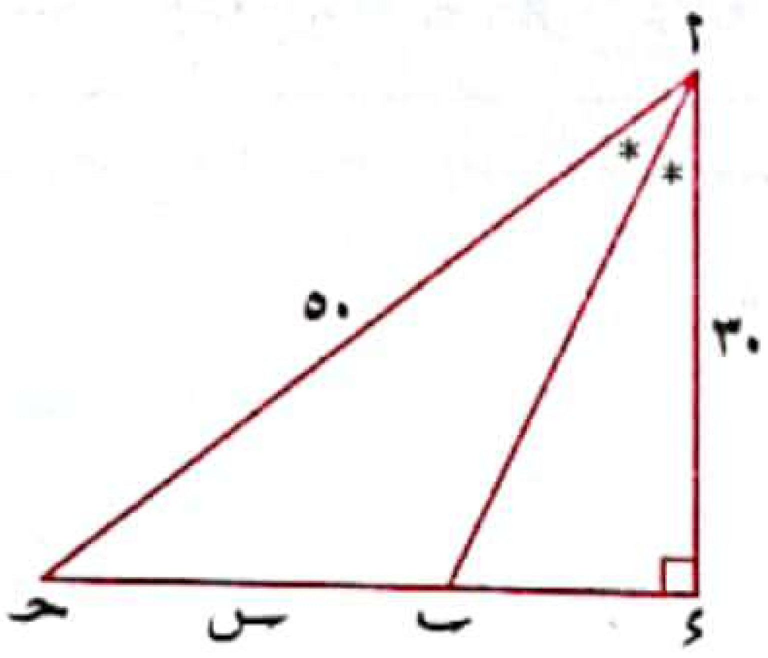



**٤** 📖 فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) ثم أوجد محيط Δ أبحـ :

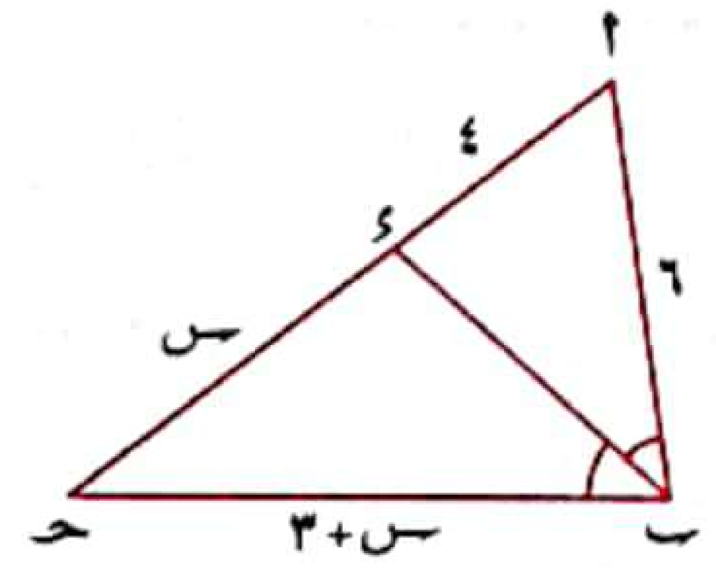
(١)




(٢)

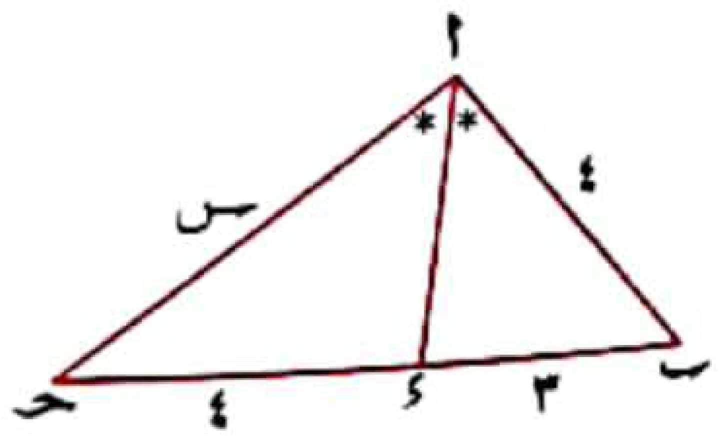



(٣)

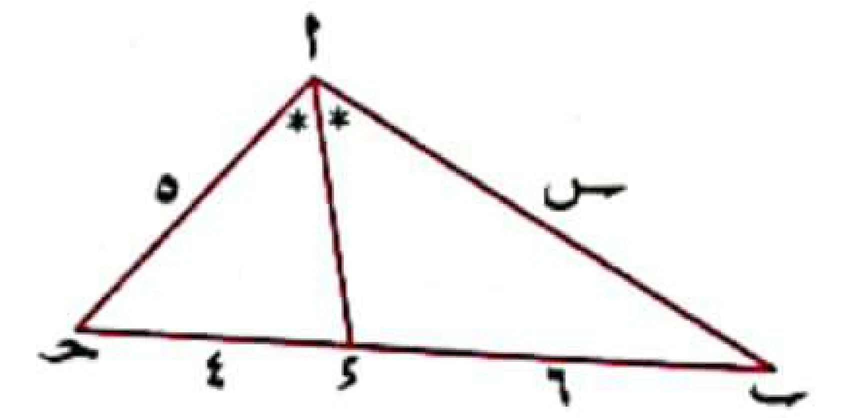



**٥** 📖 فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{أ ء}$ :

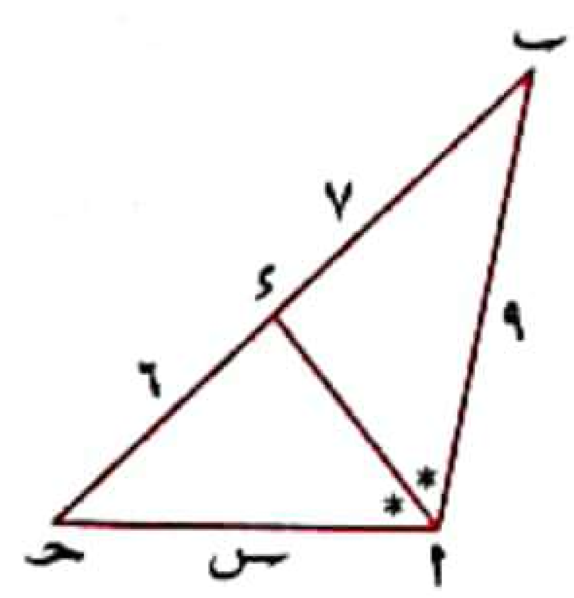
(١)




(٢)

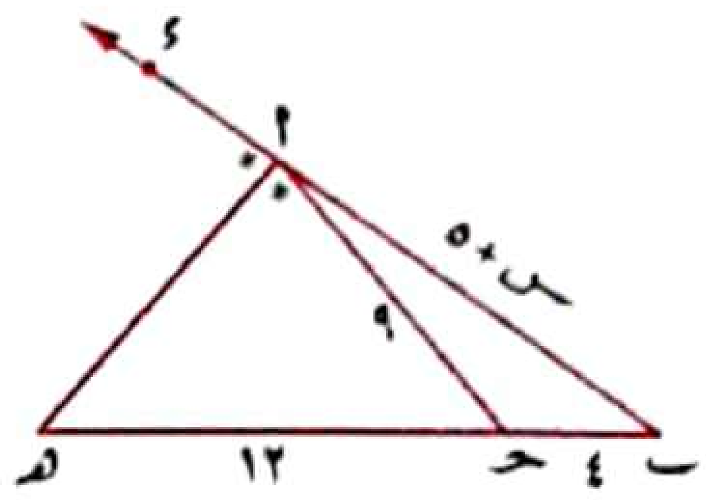



(٣)

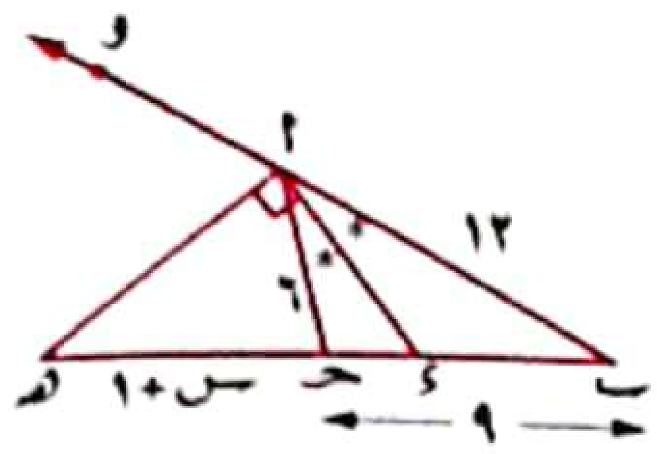


**٦** 📖 **فى كل من الشكلين التاليين (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول أهـ :**

(١)




(٢)



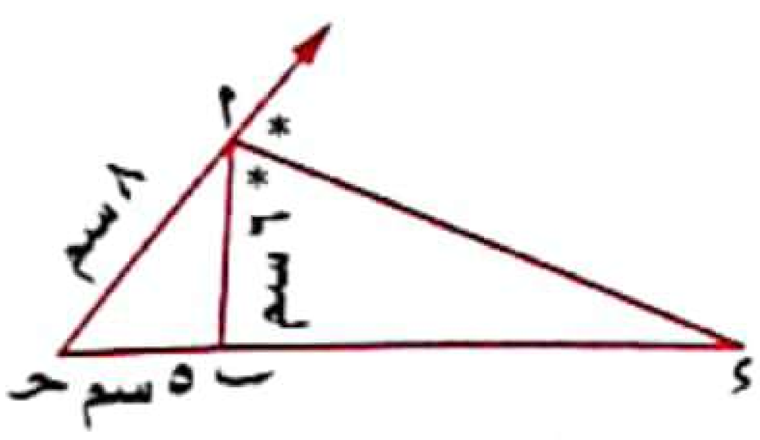

**٧** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، رسم ب ى ينصف ∠ أ ب حـ ويقطع أ حـ فى ى

فإذا كان : أ ى = ٢,٤ سم **فأوجد :** طول أ حـ «٦ سم»

**٨** 📖 أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٧ سم

، رُسم أ ى ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ب حـ فى ى **أوجد :** طول كل من ب ى ، ى حـ «٤ سم ، ٣ سم»

**٩** **فى الشكل المقابل :**




المثلث أ ب حـ فيه : أ ى ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ

، ويقطع حـ ب فى ى فإذا كان : أ ب = ٦ سم

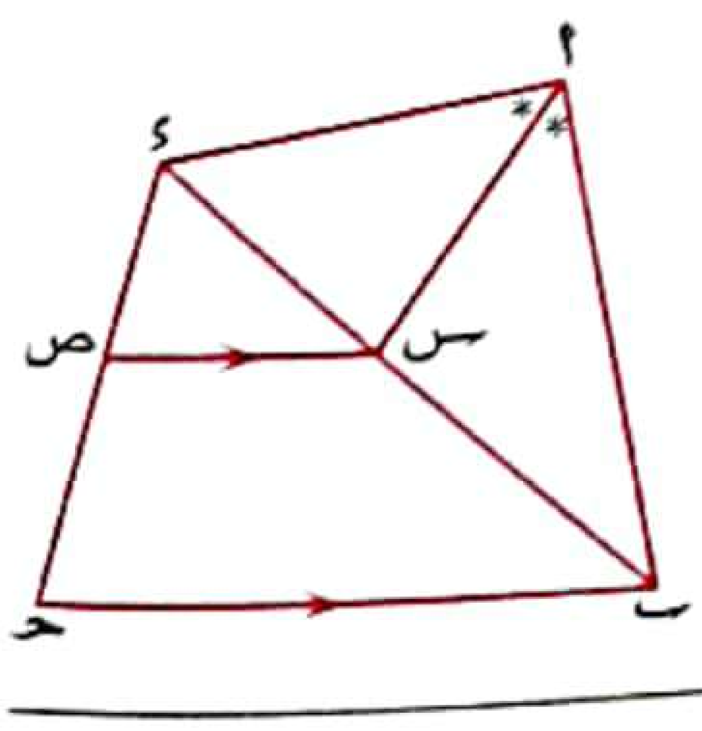
، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ٥ سم **أوجد :** طول كل من ب ى ، أ ى «١٥ سم ، $6\sqrt{7}$ سم»

**١٠** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ٦ سم ، نصفت الزاوية الخارجة عند أ بالمنصف أ ى الذى قطع ب حـ فى ى **أوجد :** طول كل من حـ ى ، أ ى «٨ سم ، $\sqrt{14}$ سم»

**١١** 📖 أ ب حـ مثلث محيطه ٢٧ سم ، رسم ب ى ينصف ∠ ب ويقطع أ حـ فى ى ، إذا كان أ ى = ٤ سم

، حـ ى = ٥ سم **أوجد :** طول كل من أ ب ، ب حـ ، ب ى «٨ سم ، ١٠ سم ، $2\sqrt{15}$ سم»

**١٢** **فى الشكل المقابل :**

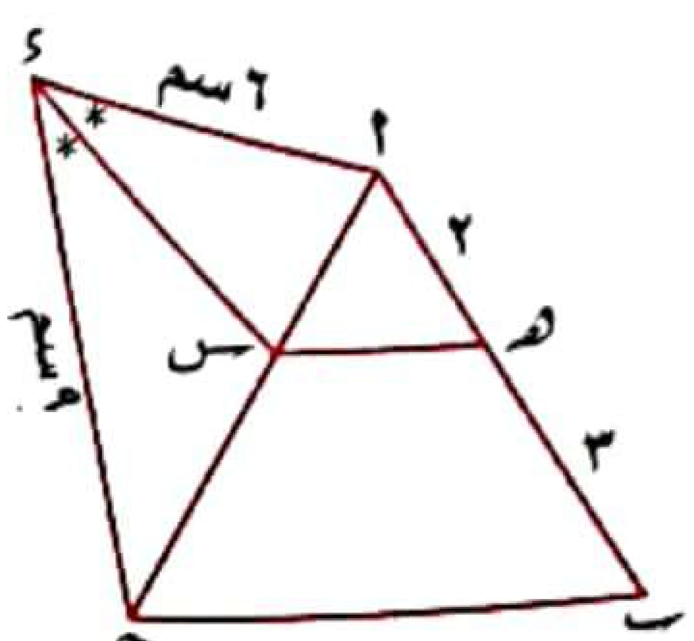



أ ب حـ ى شكل رباعى ، رسم أ س ينصف ∠ أ

ويقطع ب ى فى س ثم رسم س ص // ب حـ

قاطعًا حـ ى فى ص **أثبت أن :** $\frac{ى ص}{ص حـ} = \frac{أ ى}{أ ب}$

**١٣** **فى الشكل المقابل :**

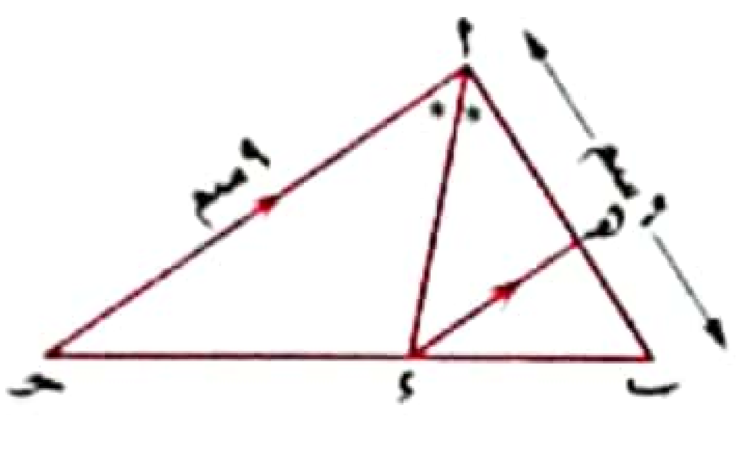



أ ب حـ ى شكل رباعى فيه : ى س ينصف ∠ ى

، أ هـ : هـ ب = ٢ : ٣ ، أ ى = ٦ سم ، ى حـ = ٩ سم

**أثبت أن :** هـ س // ب حـ

**١٤** **فى الشكل المقابل :**




أء ينصف ∠ ب أ جـ ، هـء // أجـ

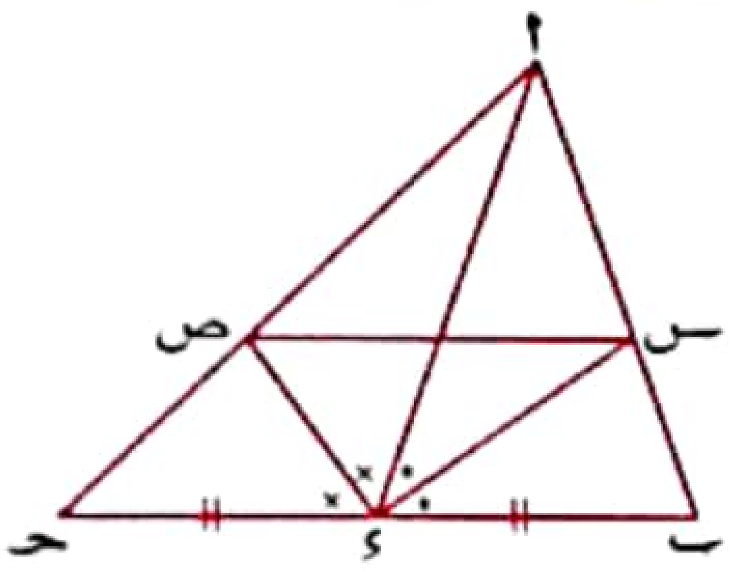
**أثبت أن :** $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ وإذا كان : أ جـ = ٩ سم ، أ ب = ٦ سم

**أوجد :** طول كل من أهـ ، ب هـ

«٣,٦ سم ، ٢,٤ سم»

---

**١٥** **فى الشكل المقابل :**



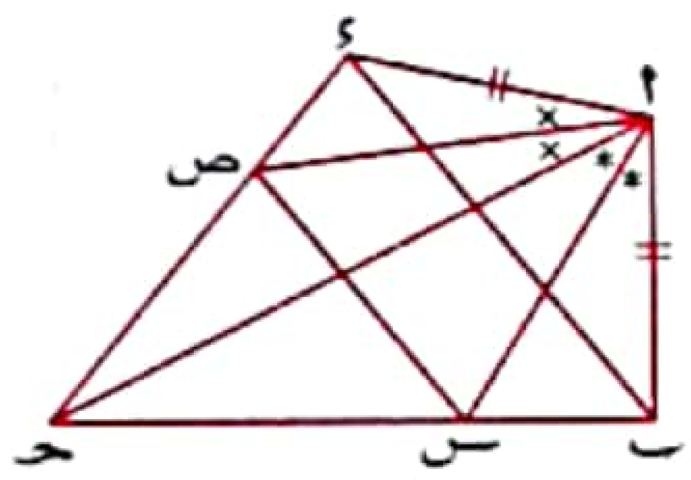

أء متوسط فى Δ أ ب جـ ، ءس ينصف ∠ أ ء ب

، ءص ينصف ∠ أ ء جـ

**أثبت أن :** س ص // ب جـ

---

**١٦** **فى الشكل المقابل :**




أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء

، أس ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع ب جـ فى س

، أص ينصف ∠ ء أ جـ ويقطع جـ ء فى ص **أثبت أن :** س ص // ب ء

---

**١٧** 📖 أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسم أء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ فى ء ، إذا كان طول ب ء = ٢٤ سم ، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ **فأوجد :** محيط Δ أ ب جـ

«١٩٢ سم»

---

**١٨** 📖 أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم ، رسم أء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ فى ء ، ورسم أهـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ب جـ فى هـ

**أوجد :** طول كل من ءهـ ، أء ، أهـ

«٨ سم ، ٢ √٦ سم ، ٢ √١٠ سم»

---

**١٩** 📖 أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٧ سم ، جـ أ = ٦ سم ، رسم أء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ فى ء ، ورسم أهـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع جـ ب فى هـ

(١) **أثبت أن :** أ ب متوسط فى المثلث أ ء هـ

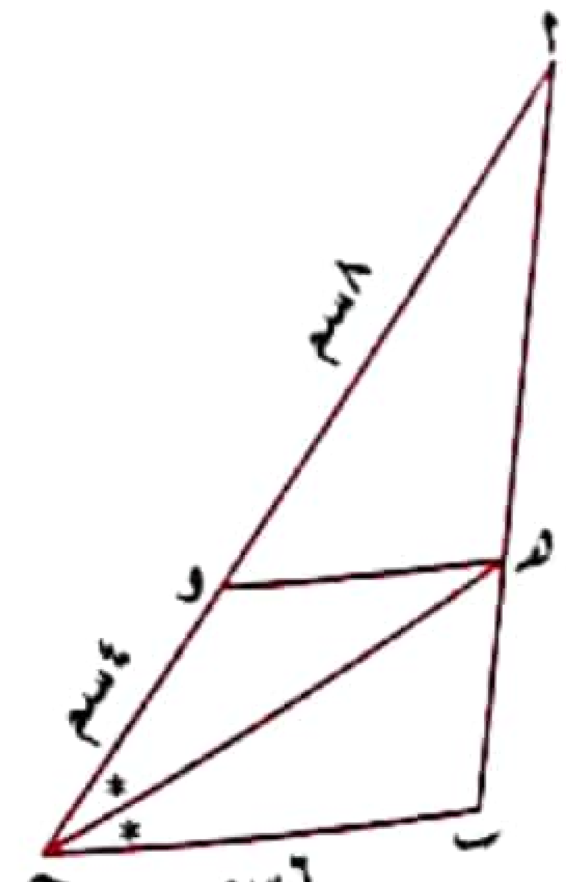
(٢) أوجد النسبة بين مساحة المثلث أ ء هـ ومساحة المثلث أ جـ هـ

«$\frac{٢}{٣}$»

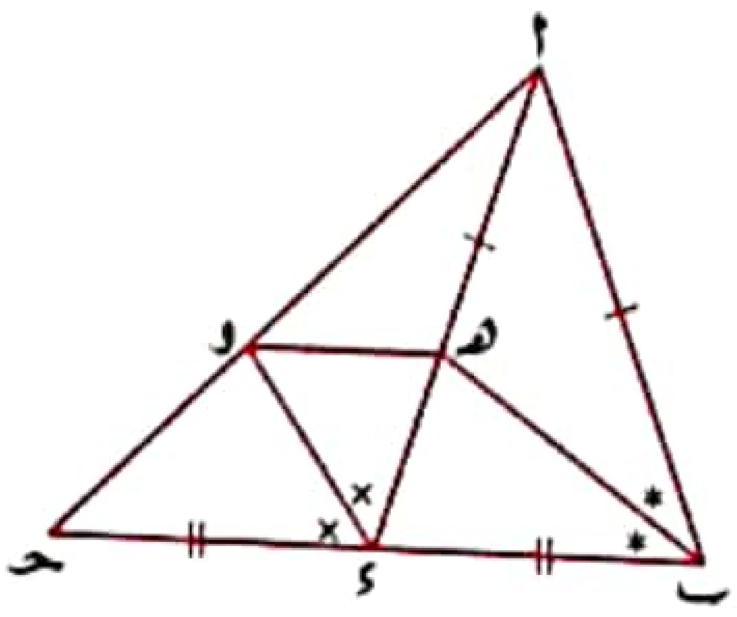
---

**٢٠** 📖 **فى كل من الشكلين التاليين أثبت أن :** هـ و // ب جـ

(١)




(٢)



**٢١** أب حـ مثلث فيه : أب > أحـ ، ء ∈ أب بحيث ب ء = أحـ ، رسم أهـ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ء حـ فى هـ ثم رسم هـ و // ب أ ويقطع أحـ فى و **أثبت أن :** ء و // ب حـ

**٢٢** أب حـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ أ ء ، رسم حـ س فقطع ب أ فى ص ، ونُصفت ∠ ء حـ س بالمنصف حـ ع فقطع أ ء فى ع **أثبت أن :** $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ع س}}$

**٢٣** أب حـ مثلث ، أ ء ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع ب حـ فى ء ، نصفت الزاويتان ب أ ء ، حـ أ ء بالمنصفين أهـ ، أ و يقطعان ب حـ فى هـ ، و على الترتيب. **أثبت أن :** $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \times \frac{\text{ء و}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$

**٢٤** أب حـ مثلث ، نصفت ∠ أ ، ∠ ب ، ∠ حـ بالمنصفات أ ء ، ب هـ ، حـ و فقطعت ب حـ ، أحـ ، أب فى ء ، هـ ، و على الترتيب **أثبت أن :** $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} \times \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ أ}} \times \frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} = ١$

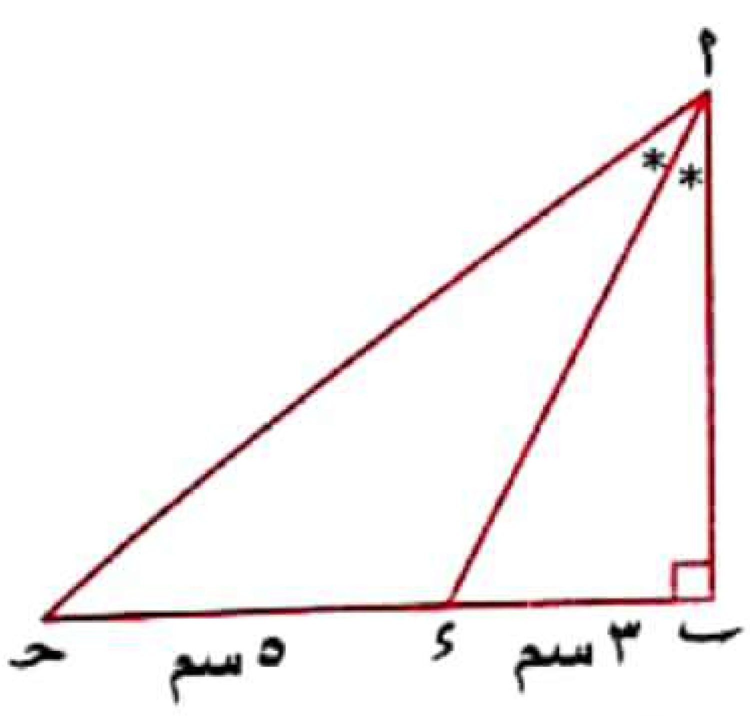
**٢٥** **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) فى الشكل المقابل :

أب = .............. سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٧

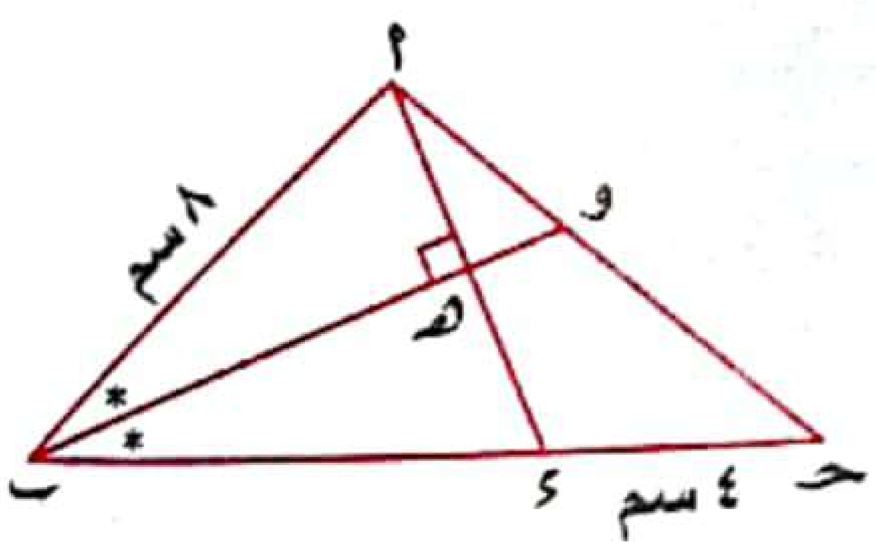



(٢) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{أ و}}{\text{و حـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

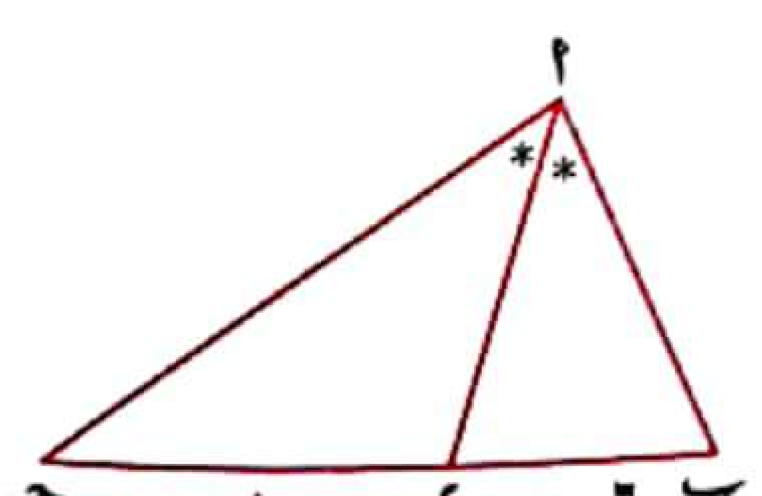



(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أحـ − أب = ٦ سم

فإن : أحـ = .............. سم

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

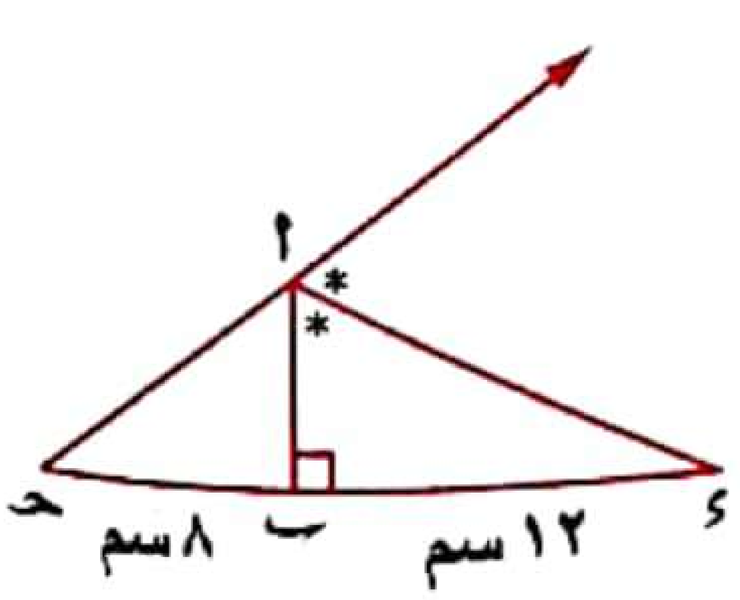



(٤) فى الشكل المقابل :

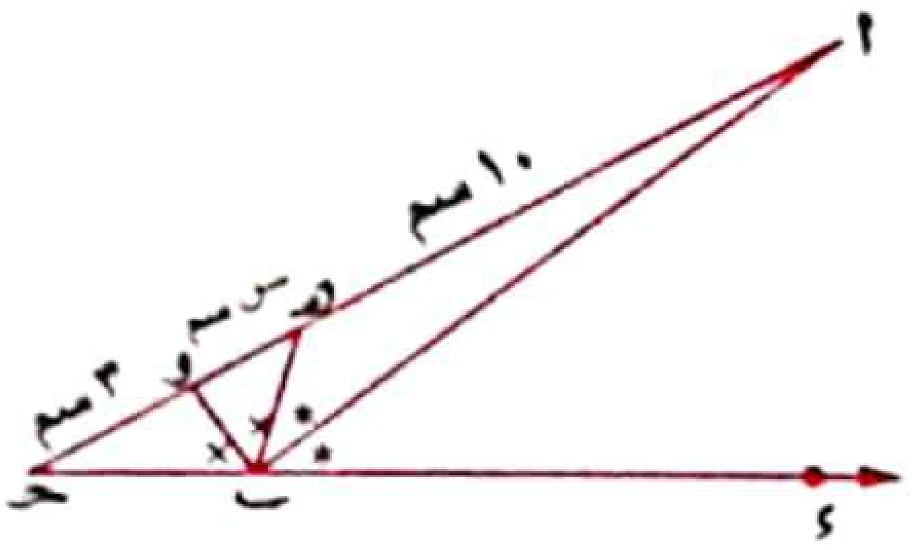
أ ء = .............. سم

(أ) ١٠ (ب) ٤ $\sqrt{٥}$

(جـ) ٦ $\sqrt{٥}$ (د) ٩ $\sqrt{٢}$



(٥) فى الشكل المقابل :

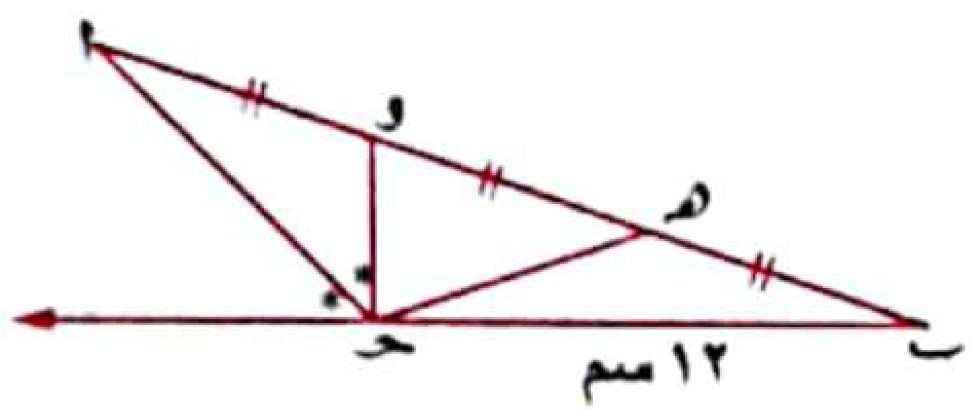



س = ............ سم

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(٦) فى الشكل المقابل :

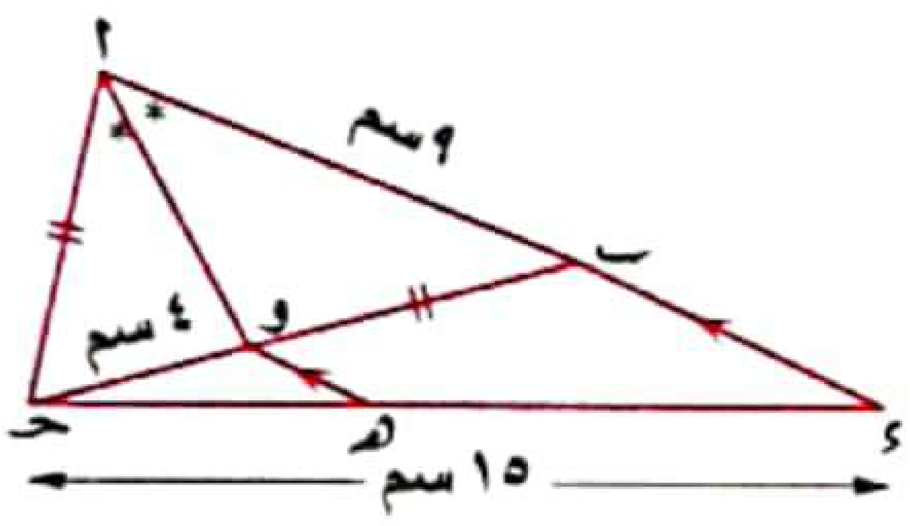



حـ و = ............ سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٧) فى الشكل المقابل :

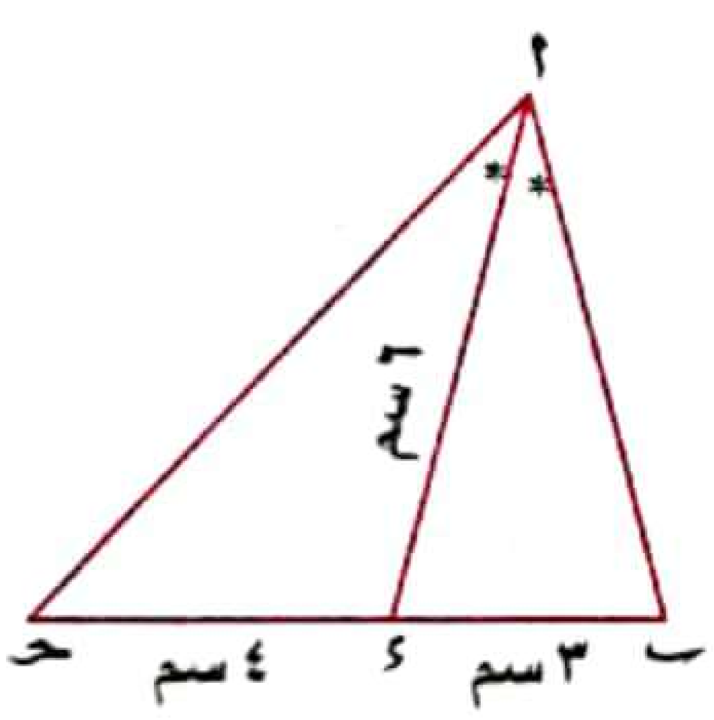



هـ ء = ............ سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٨) فى الشكل المقابل :

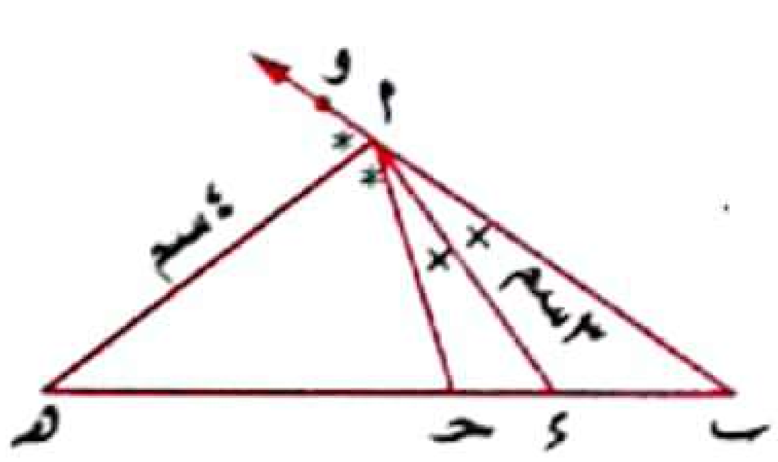



١حـ = ............ سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٩ (د) ٨

(٩) فى الشكل المقابل :




إذا كان : ١ء ينصف ∠ ١ من الداخل ، ١هـ ينصف ∠ ١ من الخارج

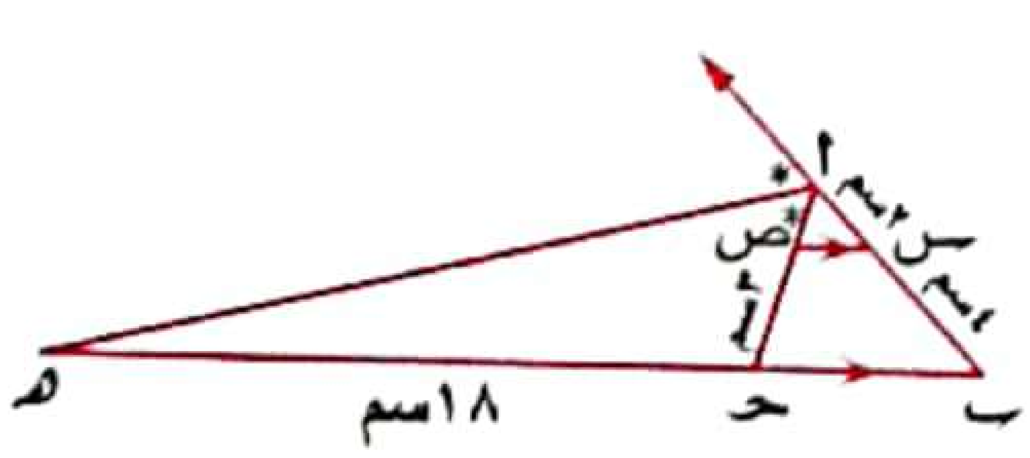
، ١ء = ٣ سم ، ١هـ = ٤ سم

فإن : ء هـ = ............ سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

---

**١٦** فى الشكل المقابل :




س ص // ب حـ ، ١س = ٢ سم

، س ب = ٤ سم ، ص حـ = ٣ سم أوجد : طول ١ص

، إذا كان : ١هـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند ١ ويقطع ب حـ فى هـ

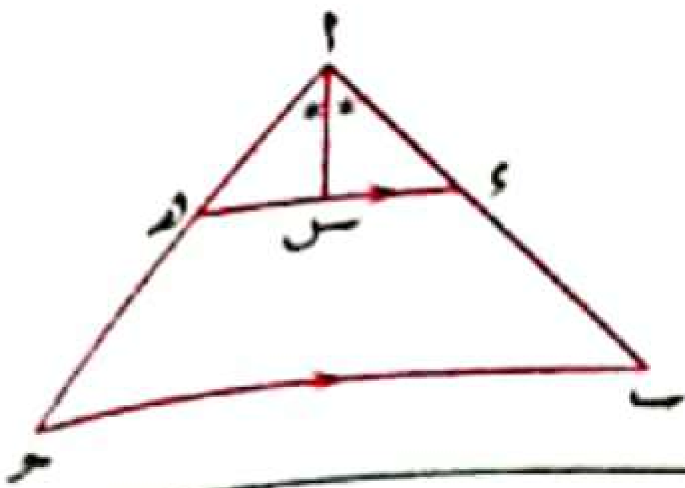
حيث حـ هـ = ١٨ سم أوجد : طول ب حـ «١,٥ سم ، ٦ سم»

---

**١٧** ١ب حـ ء شكل رباعى فيه : ١ب = ب ء ، ١ء = ء حـ ، ١هـ ينصف ∠ ب ١ ء ويقطع ب ء فى هـ

، ء و ينصف ∠ ب ء حـ ويقطع ب حـ فى و أثبت أن : هـ و // ء حـ

**٢٨** في الشكل المقابل :




$\overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ د أ هـ

أثبت أن : (١) $\frac{\text{د س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{د ب}}{\text{هـ جـ}}$ (٢) $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ د س}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ هـ س}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

---

**٢٩** أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، رسم $\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ د ويقطع $\overline{\text{ب د}}$ في س ، $\overrightarrow{\text{د ص}}$ ينصف ∠ أ د جـ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في ص أثبت أن : $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ د}}$

---

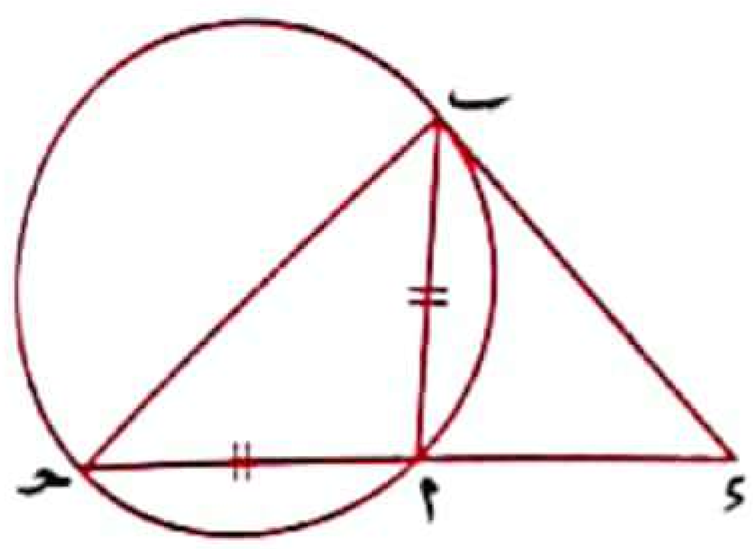
**٣٠** $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة ، د ∈ $\widehat{\text{أ ب}}$ الأكبر بحيث $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، هـ منتصف $\widehat{\text{أ ب}}$ الأصغر ، رسمت $\overline{\text{د هـ}}$ فقطعت $\overline{\text{أ ب}}$ في جـ أوجد : النسبة بين م (Δ أ د هـ) ، م (Δ ب د هـ) « $\frac{٢}{٣}$ »

---

**٣١** $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، جـ تنتمي إلى الدائرة ، رسم مماس للدائرة عند جـ فقطع $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ في هـ وقطع المماس لها عند أ في د أثبت أن : $\frac{\text{أ م}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{د هـ}}$

---

**٣٢** في الشكل المقابل :



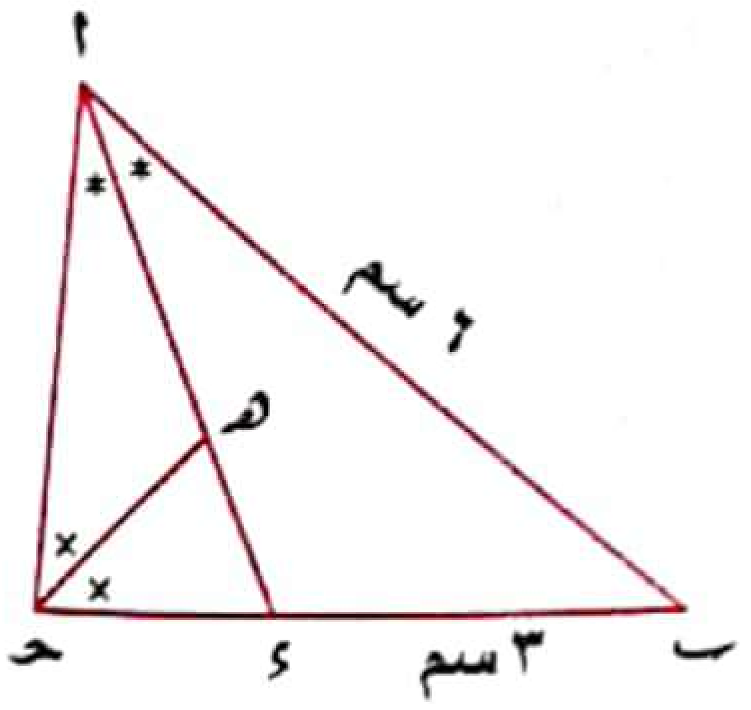

أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{ب د}}$ مماسة للدائرة عند ب

أثبت أن : د ب × ب أ = د أ × ب جـ

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٣٣** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

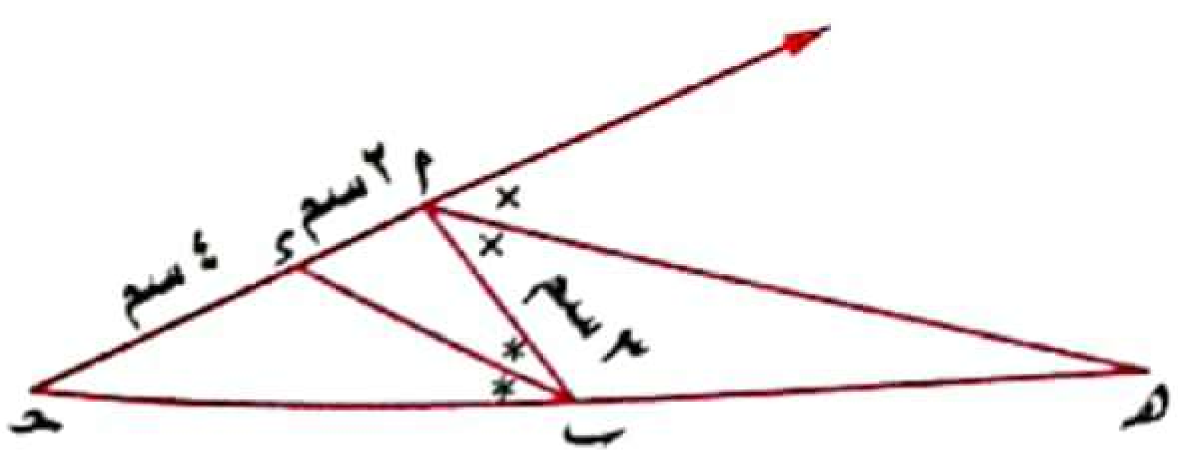



$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢) في الشكل المقابل :

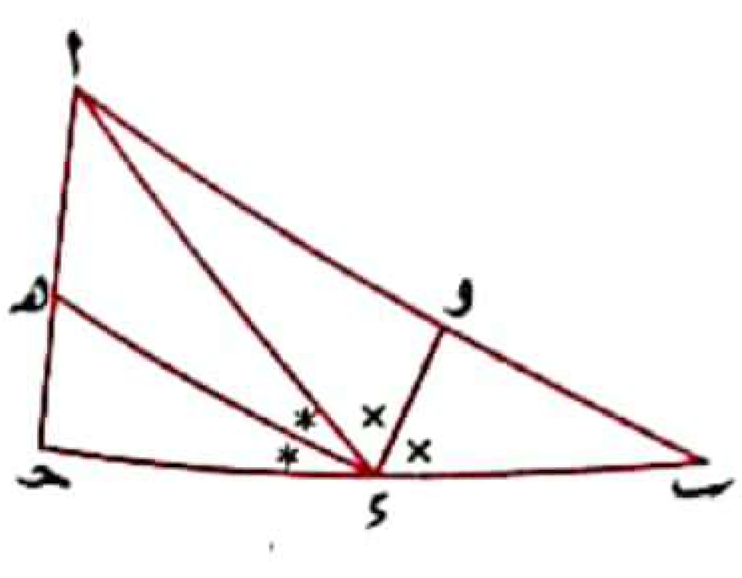



ب هـ = .............. سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٣) في الشكل المقابل :

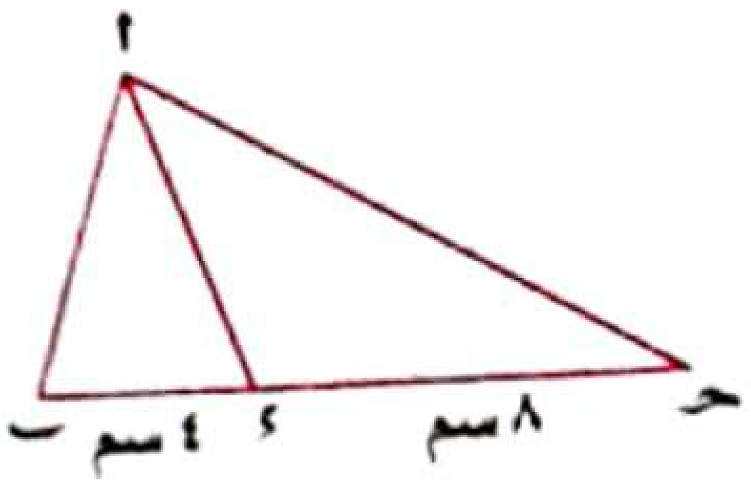



إذا كان : ٣ أ هـ = ٤ هـ جـ ، ٢ أ و = ٣ و ب ، ب جـ = ١٧ سم

فإن : د جـ = .............. سم

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٤) في الشكل المقابل :

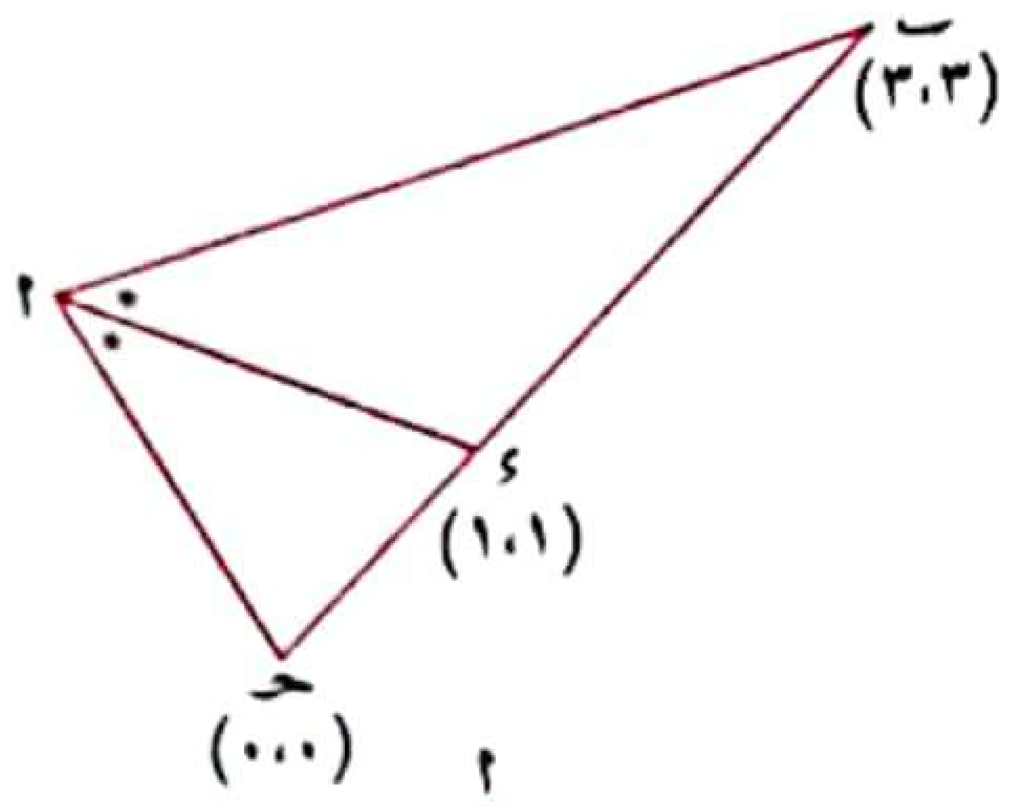



إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠ء أ ب) = ٢ ق (∠ء أ جـ)

فإن : أ ب = ............ سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٥) في الشكل المقابل :

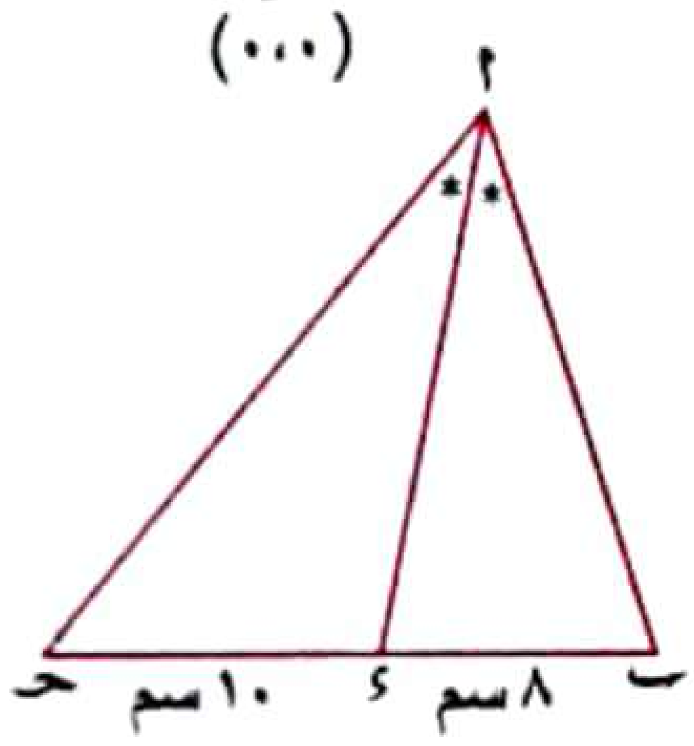



$\frac{أ جـ}{أ ب}$ = ............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦) في الشكل المقابل :



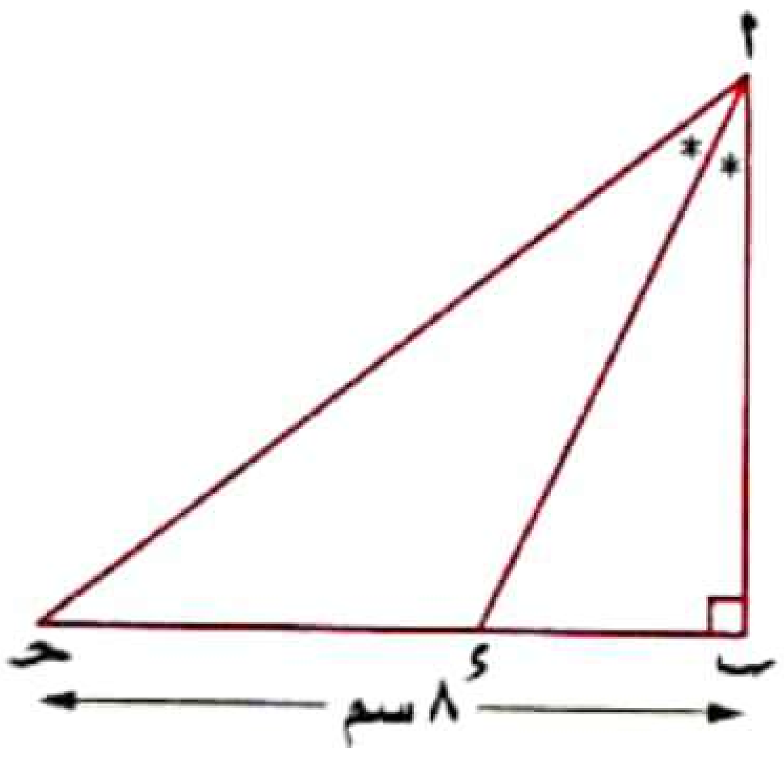

إذا كان : $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ب أ جـ

أي الشروط الآتية يكفي لإيجاد طول $\overline{أ ب}$ ؟

(أ) أ جـ − أ ب = ٥ سم (ب) محيط Δ أ ب جـ = ٥٤ سم

(جـ) أ ء = ٤ $\sqrt{١٥}$ سم (د) جميع ما سبق.

(٧) في الشكل المقابل :



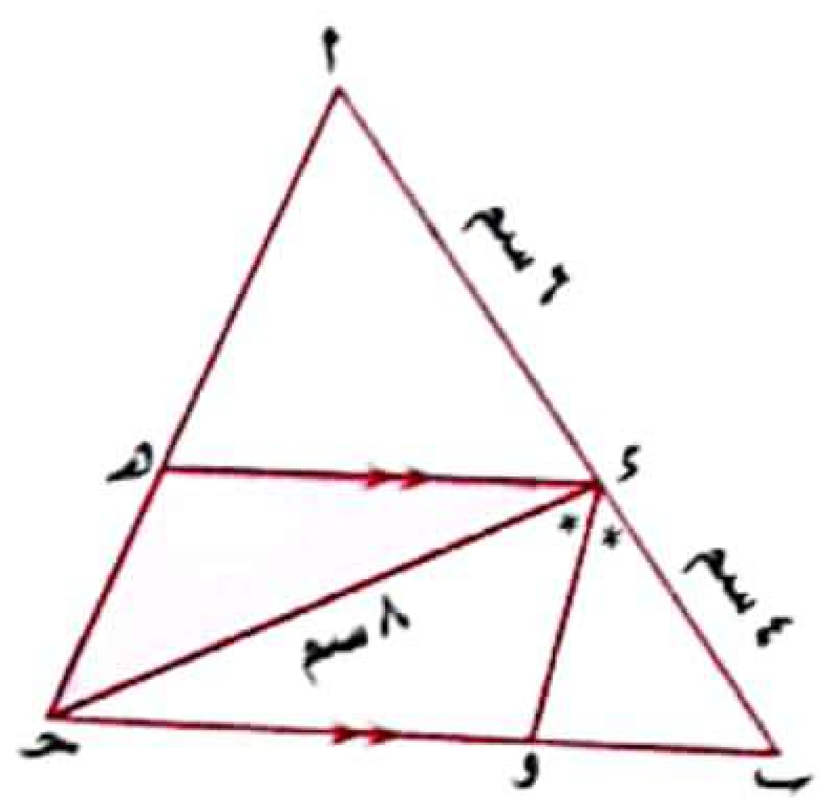

إذا كانت : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ء جـ})} = \frac{٣}{٥}$

فإن : أ ب = ............ سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٠

(٨) في الشكل المقابل :



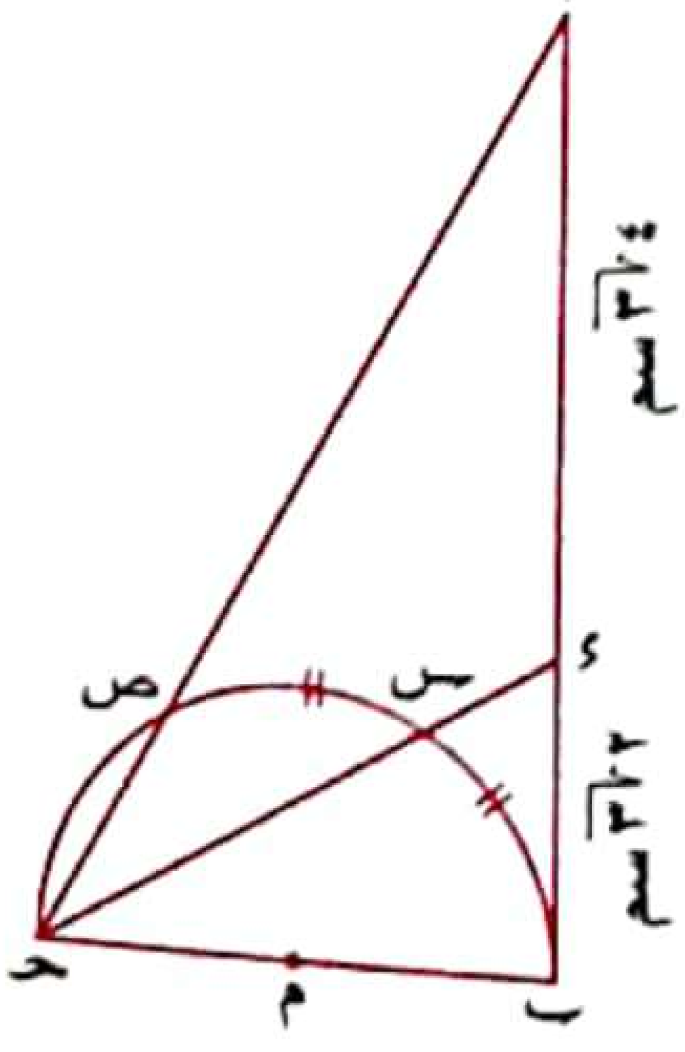

إذا كانت : مساحة (Δ ء ب و) = ١٠ سم$^٢$

فإن : مساحة (Δ ء هـ جـ) = ............ سم$^٢$

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٩) في الشكل المقابل :




$\overleftrightarrow{ب أ}$ مماس للدائرة م عند ب

، ق ($\frown{ب س}$) = ق ($\frown{س ص}$)

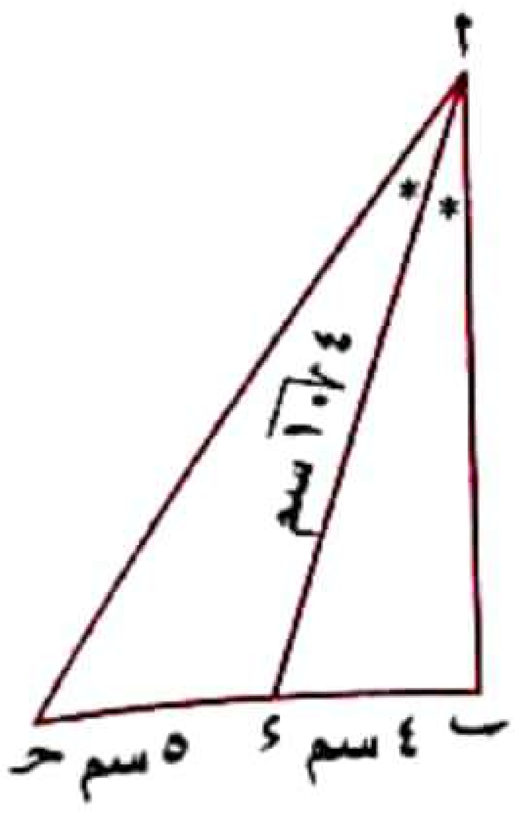
، ب ء = ٢ $\sqrt{٣}$ سم ، أ ء = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : أ ص = ............ سم

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

**(١٠) فى الشكل المقابل :**

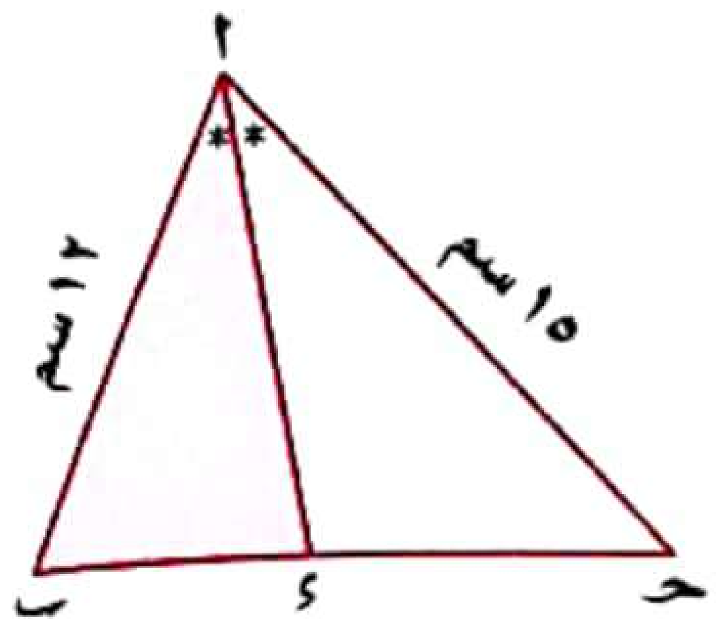



محيط △ أ ب حـ = ............ سم

(أ) ٣٦ (ب) ٣٢

(جـ) ٢٨ (د) ٢٤

**(١١) فى الشكل المقابل :**




إذا كانت : مساحة (△ أ ب حـ) = ٧٢ سم$^2$

فإن : مساحة (△ أ د ب) = ............ سم$^2$

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٤٠

**(١٢) فى الشكل المقابل :**

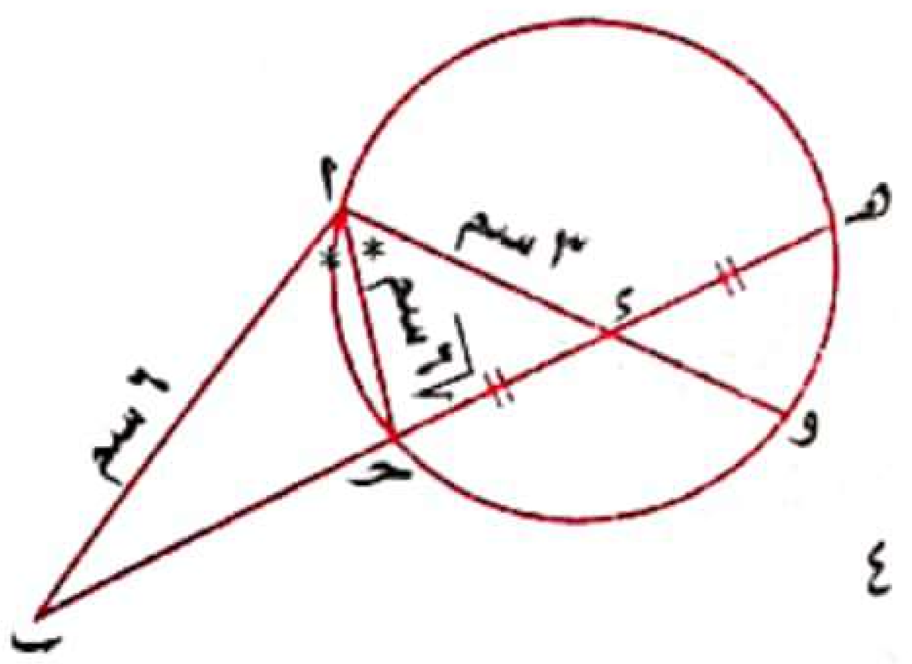



مساحة △ أ ب د = ............ سم$^2$

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨

(جـ) ٥٤ (د) ٧٢

**(١٣) فى الشكل المقابل :**

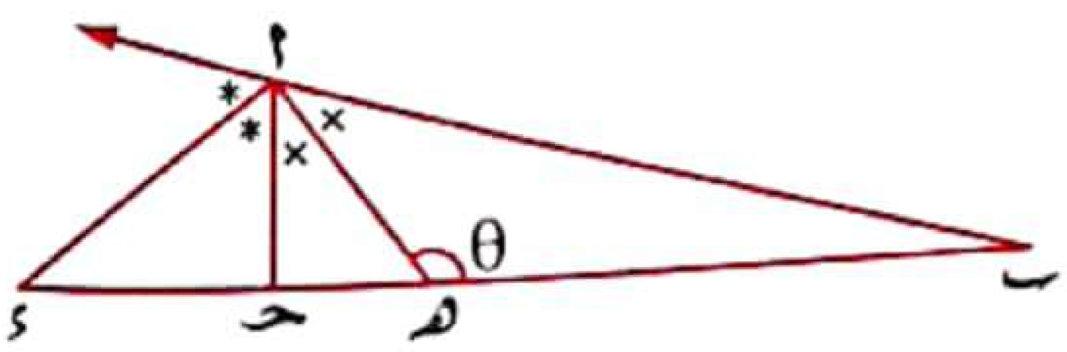



$\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ب أ د ، د منتصف $\overline{\text{هـ حـ}}$ ، أ حـ = $\sqrt{6}$ سم

، أ د = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم فإن : د و = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

**(١٤) فى الشكل المقابل :**

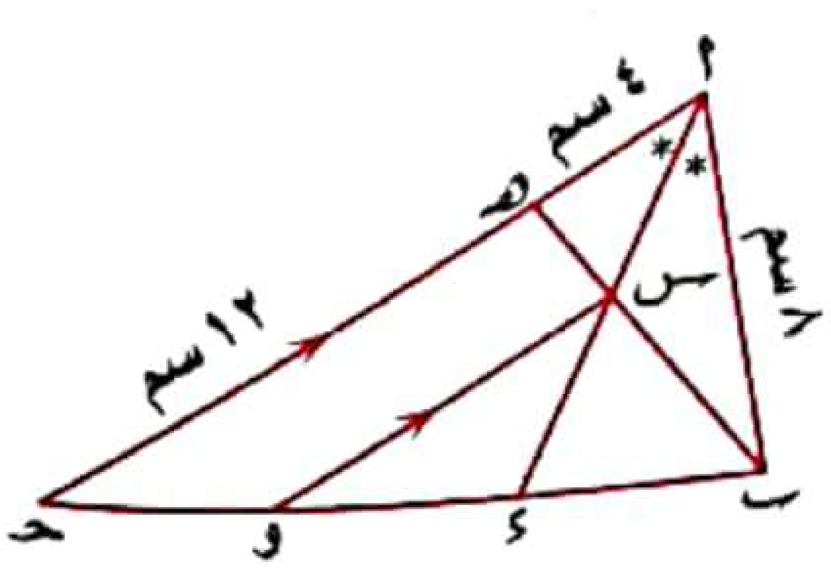



إذا كان : أ د = ٨ سم ، أ هـ = ٦ سم

فإن : طا θ = ............

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

**(١٥) فى الشكل المقابل :**

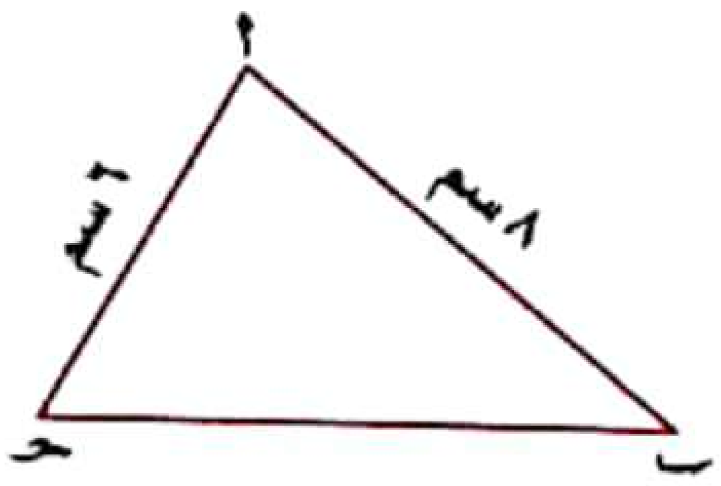



$\frac{\text{د و}}{\text{ب حـ}}$ = ............

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٦) فى الشكل المقابل :



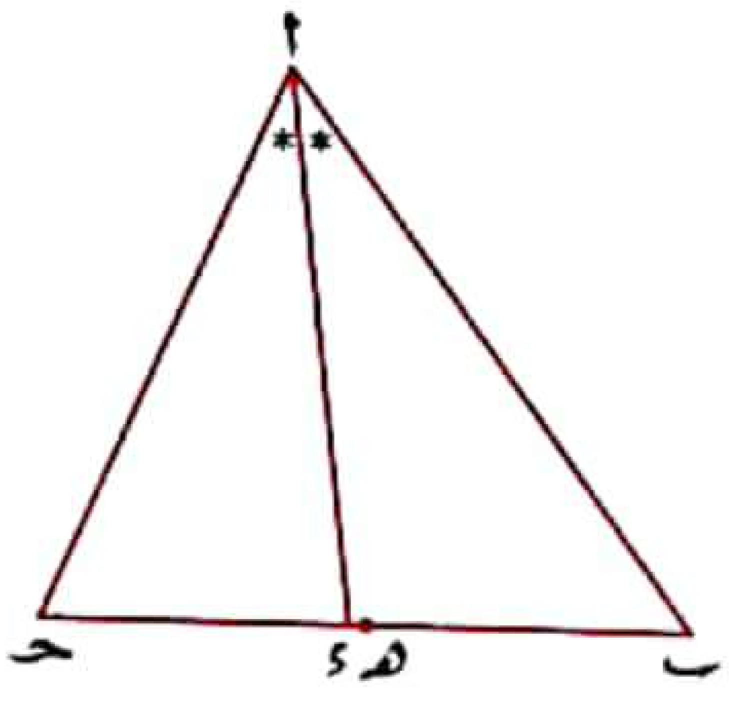

إذا كان : ق (د أ) = ٢ ق (د ب)

فإن : ب حـ = ............ سم

(أ) $٣\sqrt{١٠}$ (ب) $٢\sqrt{٢١}$ (جـ) ١٢ (د) ١٠

---

**٣٤** فى الشكل المقابل :



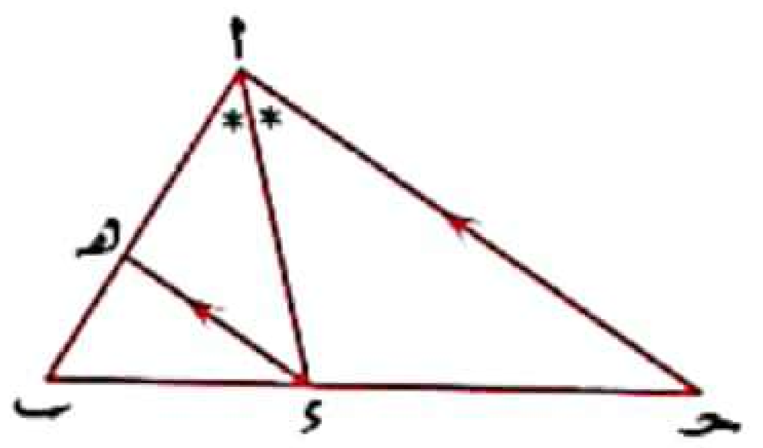

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب > أ حـ ، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

، $\overleftarrow{أ ى}$ ينصف د أ من الداخل

أثبت أن : $\frac{هـ ى}{هـ حـ} = \frac{أ ب - أ حـ}{أ ب + أ حـ}$

---

**٣٥** فى الشكل المقابل :



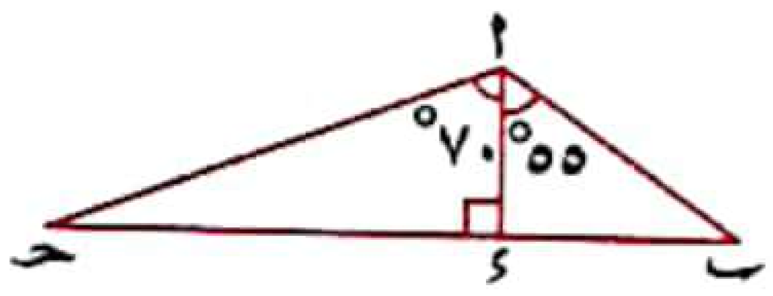

أ ب حـ مثلث ، $\overleftarrow{أ ى}$ ينصف د ب أ حـ من الداخل

، $\overline{ى هـ}$ // $\overline{أ حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى هـ

أثبت أن : ى هـ = $\frac{أ ب \times أ حـ}{أ ب + أ حـ}$

---

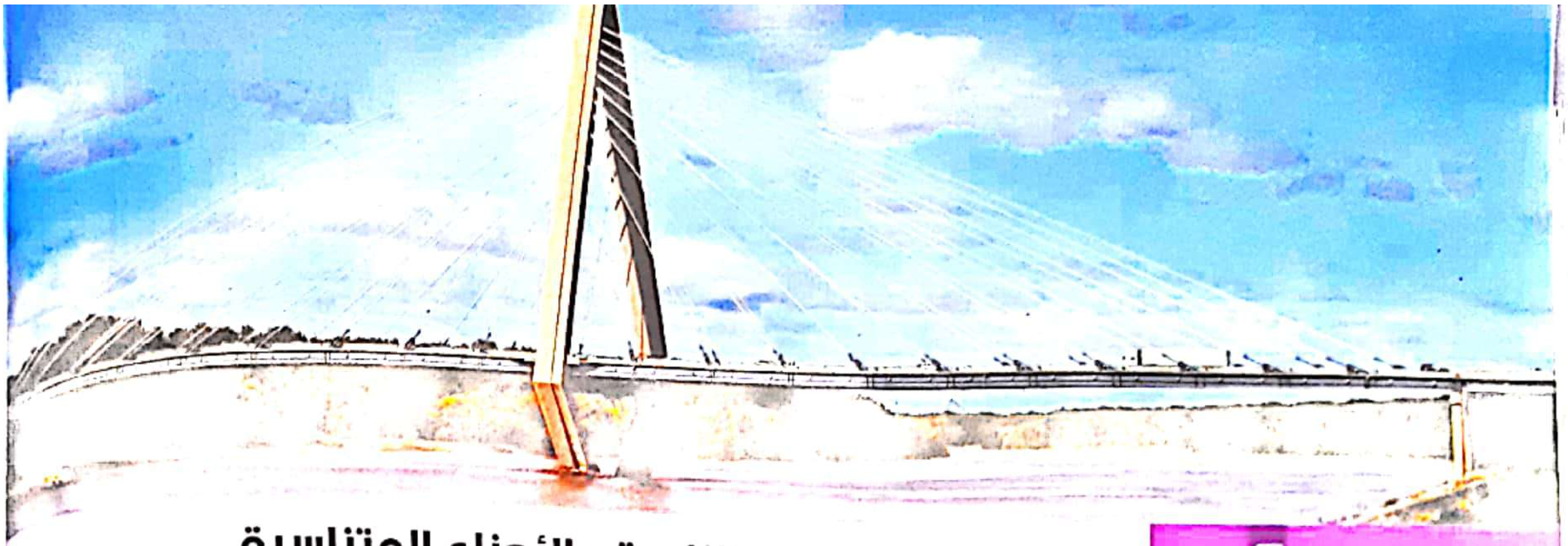
**٣٦** فى الشكل المقابل :




إذا كان : أ حـ × ب ى = ٣٦ سم$^{٢}$

أوجد : مساحة ($\Delta$ أ ب حـ)

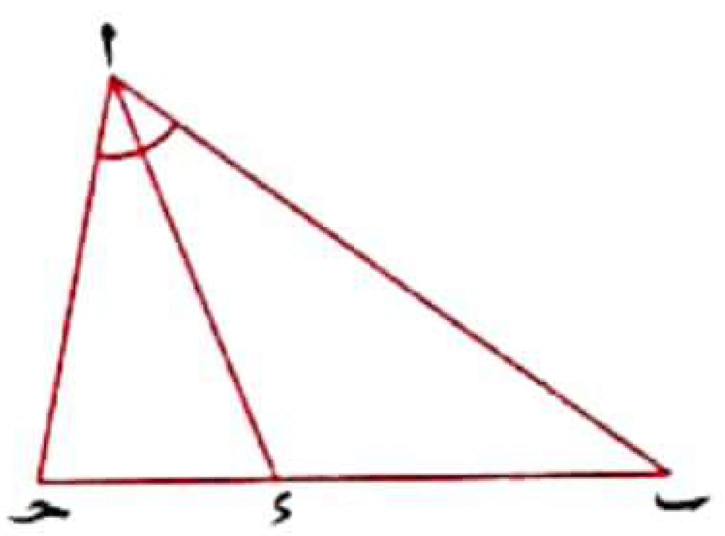
«١٨ سم$^{٢}$»



## الدرس 4

# تابع منصف الزاوية والأجزاء المتناسبة «عكس نظرية (٣)»

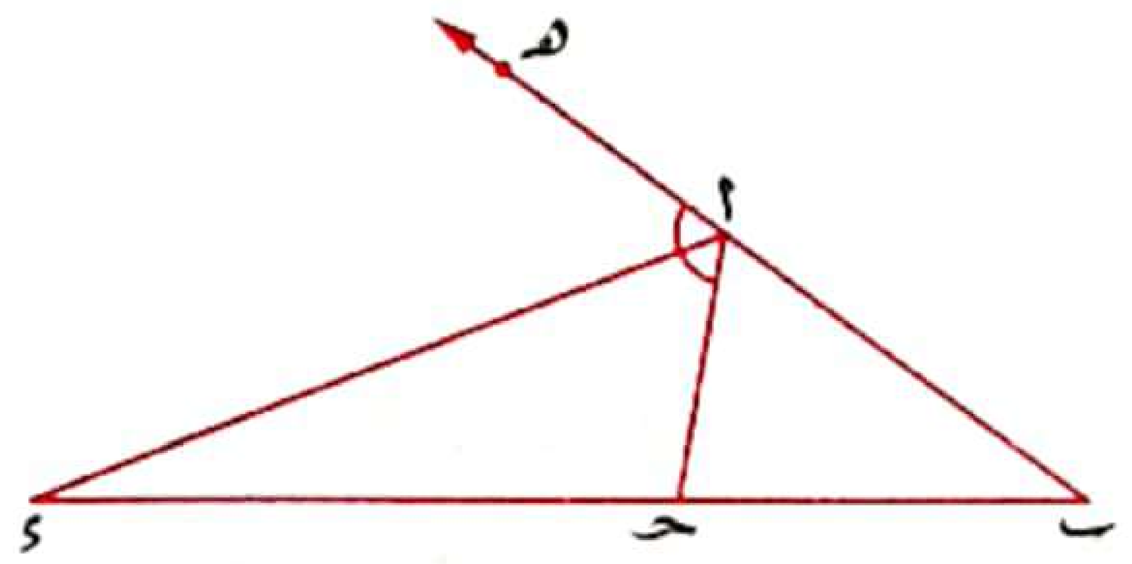
**عكس نظرية ٣**




إذا كانت : ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

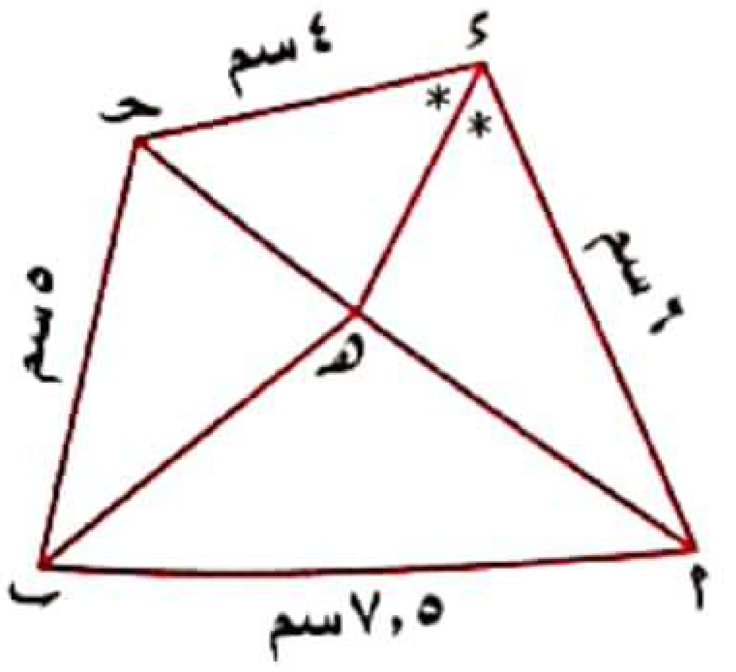



إذا كانت : ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن Δ أ ب حـ

**مثال ١**




فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٧,٥ سم ، ب حـ = ٥ سم

، حـ ء = ٤ سم ، أ ء = ٦ سم ، $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ أ ء حـ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

**الحل**

فى Δ أ ء حـ : ∵ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

∴ فى Δ أ ب حـ : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

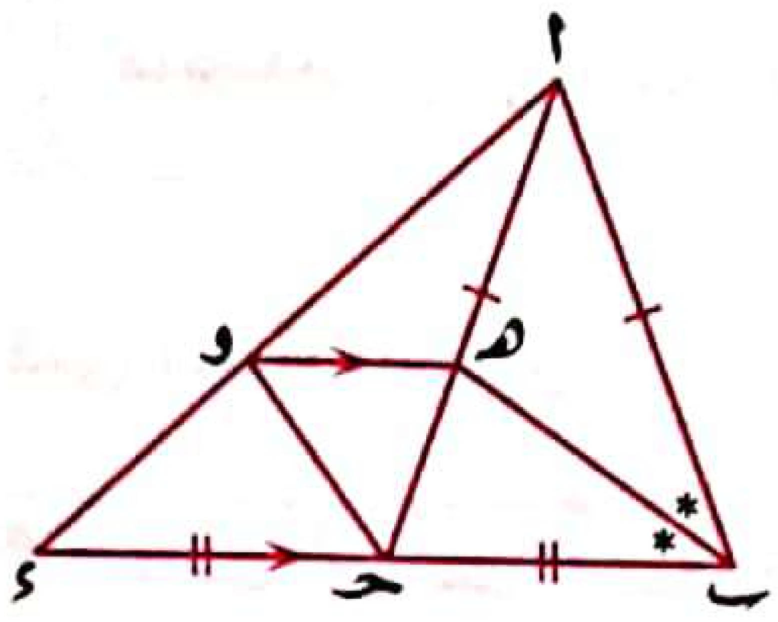
(وهو المطلوب)

## مثال ٢

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ ، ء ∈ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ بحيث ب جـ = جـ ء ، نصفت ∠ أ ب جـ بمنصف قطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ ، رسم $\overrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ فى و

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ ينصف ∠ أ جـ ء

### الحل




فى Δ أ ب جـ :

∵ $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

لكن : أ ب = أ جـ ، ب جـ = جـ ء (معطى)

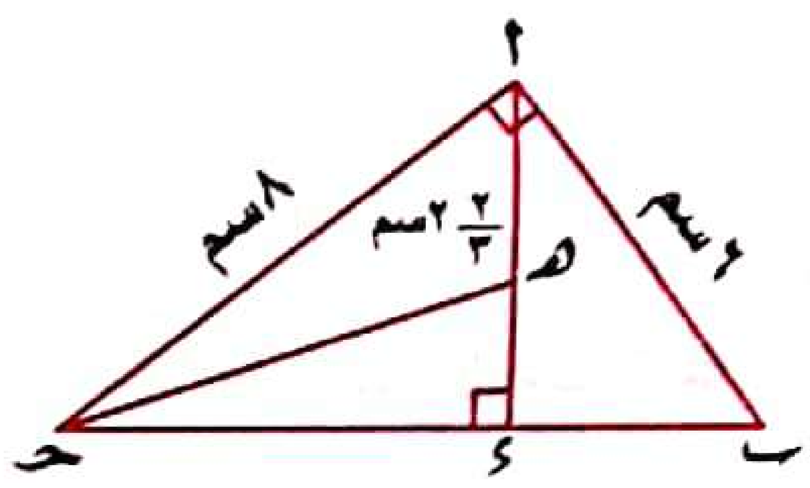
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}}$ (١)

، فى Δ أ جـ ء : ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}}$

∴ فى Δ أ جـ ء : $\overrightarrow{\text{جـ و}}$ ينصف ∠ أ جـ ء (وهو المطلوب)

## مثال ٣




فى الشكل المقابل :

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

، أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٨ سم ، أ هـ = $٢\frac{٢}{٣}$ سم

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ء

### الحل

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ∴ $(\text{ب جـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{أ جـ})^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$

∴ ب جـ = ١٠ سم ، ∵ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ Δ ء أ جـ ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{ء جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء جـ}}{٨} = \frac{٨}{١٠}$ ∴ ء جـ = ٦,٤ سم

، ∵ Δ ء ب أ ~ Δ أ ب جـ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{١٠} = \frac{\text{أ ء}}{٨}$

∴ أ ء = ٤,٨ سم ∴ ء هـ = ٤,٨ − $٢\frac{٢}{٣}$ = $٢\frac{٢}{١٥}$ سم

، ∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{٨}{٦,٤} = \frac{٥}{٤}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{٢\frac{٢}{٣}}{٢\frac{٢}{١٥}} = \frac{٥}{٤}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ء

(وهو المطلوب)

**حاول بنفسك**

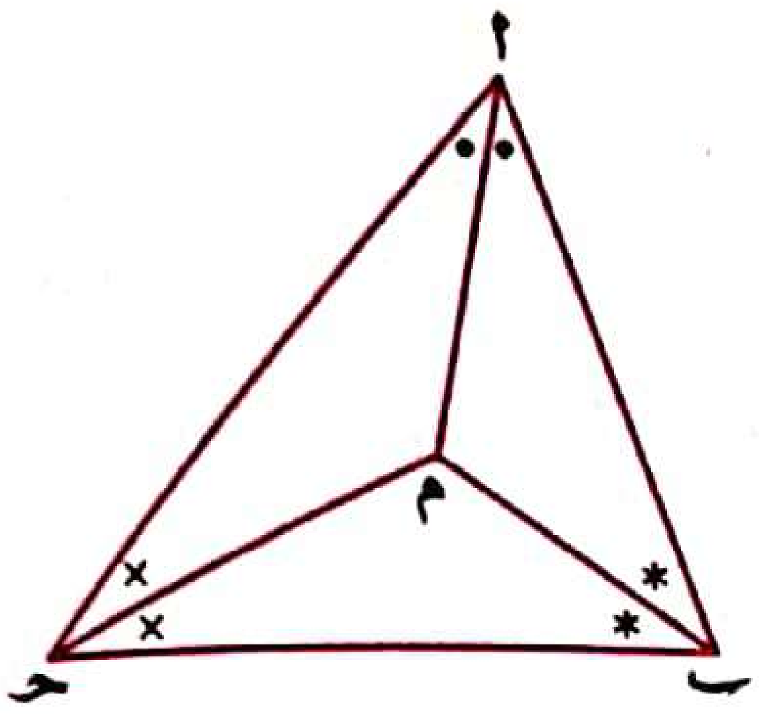
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٠ سم ، أ ء = ٦ سم ، ء حـ = ٩ سم ، هـ ∈ $\overline{أب}$

بحيث أ هـ = ٨ سم ، رسم $\overleftrightarrow{هـ س}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى س

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ء س}$ ينصف ∠ أ ء حـ

**حقيقة**

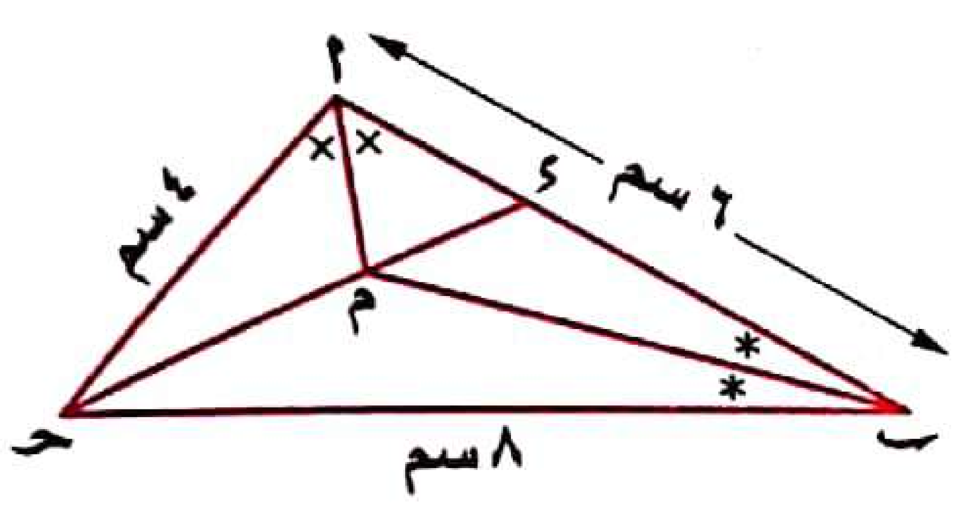
منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.




ففى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ م}$ ، $\overleftrightarrow{ب م}$ ، $\overleftrightarrow{حـ م}$ منصفات زوايا Δ أ ب حـ تتقاطع فى نقطة م

**مثال ٤**




فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم

، $\overleftrightarrow{ب م}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overleftrightarrow{أ م}$ ينصف ∠ ب أ حـ

أوجد : طول $\overline{أ ء}$

**الحل**

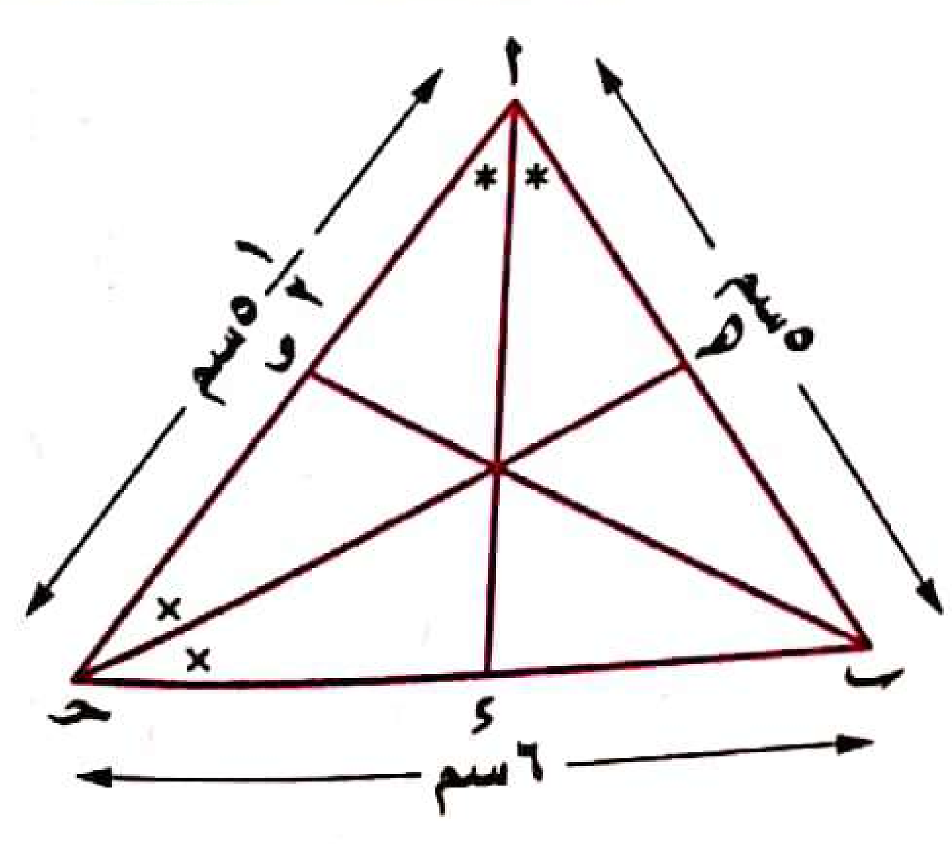
∵ $\overleftrightarrow{أ م}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{ب م}$ ينصف ∠ أ ب حـ

∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا Δ أ ب حـ ∴ $\overleftrightarrow{حـ م}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ فى Δ أ ب حـ : $\frac{أء}{ءب} = \frac{أحـ}{حـب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{أء}{٦ - أء} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ أ ء = ٦ − أ ء ∴ ٣ أ ء = ٦ ∴ أ ء = ٢ سم (وهو المطلوب)

**حاول بنفسك**




فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٥ $\frac{١}{٢}$ سم

، ب حـ = ٦ سم ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ ينصف ∠ أ حـ ب

أوجد : طول $\overline{أ و}$

# على عكس نظرية ③

📖 من أسئلة الكتاب المدرس

**1** أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ ح = ٩ سم ، ب ح = ١٠,٥ سم ، ء ∋ ب ح
حيث ب ء = ٤,٢ سم **أثبت أن :** أ ء ينصف ∠ ب أ ح

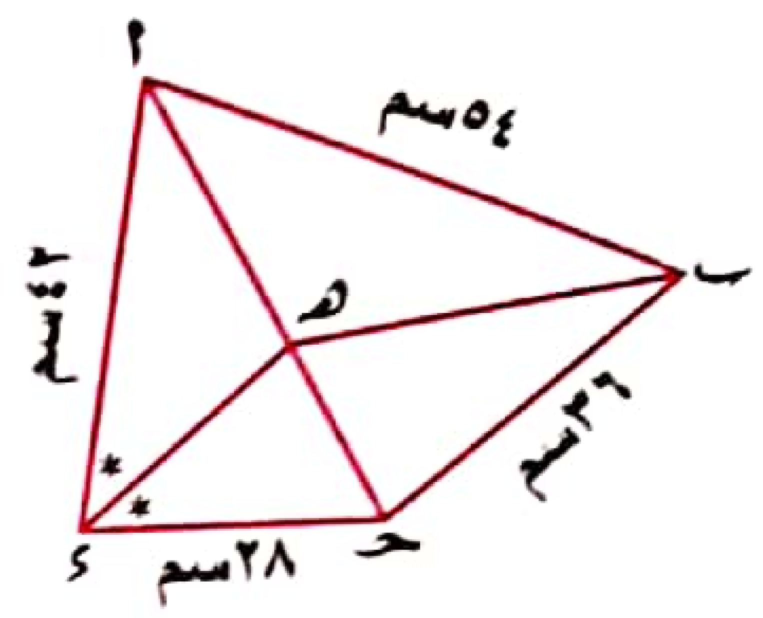
---

**2** أ ب ح مثلث أطوال أضلاعه أ ب ، ب ح ، ح أ هى على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٣,٦ من السنتيمترات
، ء ∋ ب ح بحيث ح ء = ٦ سم
**أثبت أن :** أ ء ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب ح عند أ

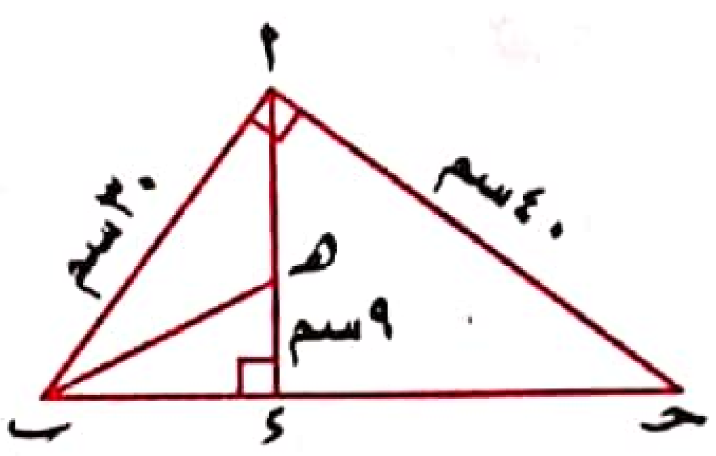
---

**3** 📖 فى كل من الشكلين الآتيين أثبت أن : ب ه ينصف ∠ أ ب ح

(١)




(٢)




---

**4** أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٩ سم ، ح ء = ٦ سم ، أ ء = ٤ سم
، أ ه ينصف ∠ أ ويقطع ب ء فى ه

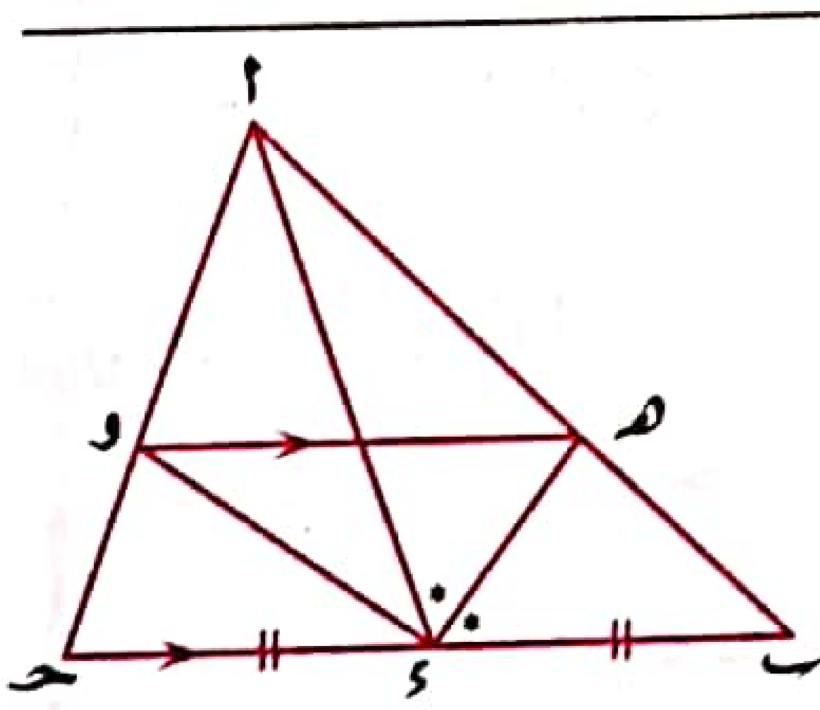
(١) **أوجد :** قيمة النسبة $\frac{\text{ب ه}}{\text{ه ء}}$ (٢) **أثبت أن :** ح ه ينصف ∠ ب ح ء «$\frac{٣}{٢}$»

---

**5** 📖 أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ه ∋ أ ء بحيث
٢ أ ه = ٣ ه ء ، رسم ه و // ء ح فقطع أ ح فى و أثبت أن : ب و ينصف ∠ أ ب ح

---

**6** فى الشكل المقابل :




ء منتصف ب ح ، ء ه ينصف ∠ أ ء ب ، ه و // ب ح
**أثبت أن :**
(١) ء و ينصف ∠ أ ء ح (٢) ه ء ⊥ ء و

---

**7** أ ب ح مثلث ، س منتصف ب ح ، ب س = ٦ سم ، أ س = ٩ سم
، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع أ ب فى ء ، أخذت نقطة ه على أ ح
بحيث : أ ه = ٦ سم علمًا بأن : أ ح = ١٠ سم

(١) **أوجد :** قيمة $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ (٢) **أثبت أن :** ء ه // ب ح

(٣) **أثبت أن :** س ه ينصف ∠ أ س ح

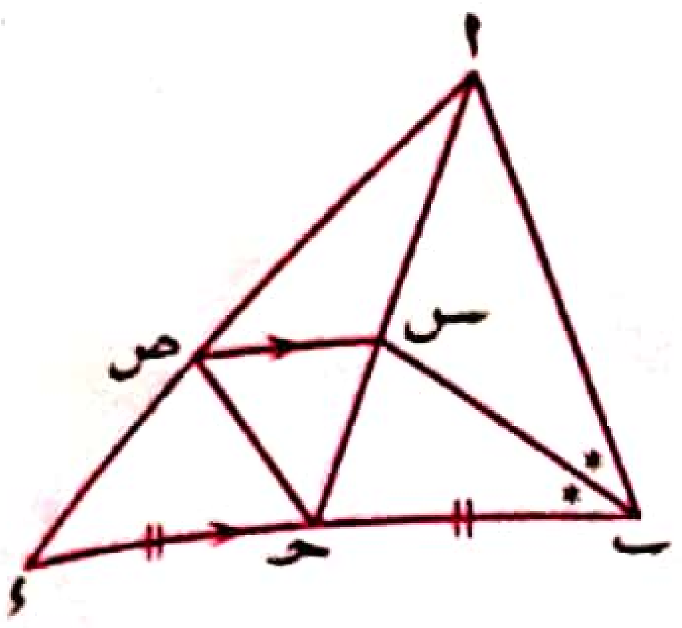
«$\frac{٣}{٢}$»

**٨** في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب حـ = حـ ء

، ب س ينصف ∠ أ ب حـ ، س ص // ب ء

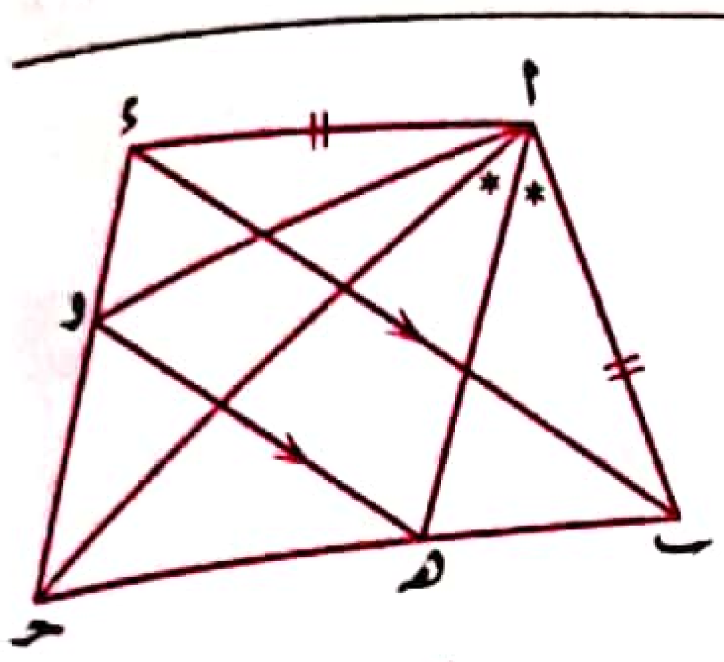
أثبت أن : حـ ص ينصف ∠ أ حـ ء




**٩** في الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، أ هـ ينصف ∠ ب أ حـ ، هـ و // ب ء

أثبت أن : أ و ينصف ∠ حـ أ ء




**١٠** أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ ، ء ∉ ب حـ حيث حـ ء = أ ب ، رسم حـ هـ // أ ء ويقطع أ ب في هـ ، ورسم هـ و // ب حـ ويقطع أ حـ في و

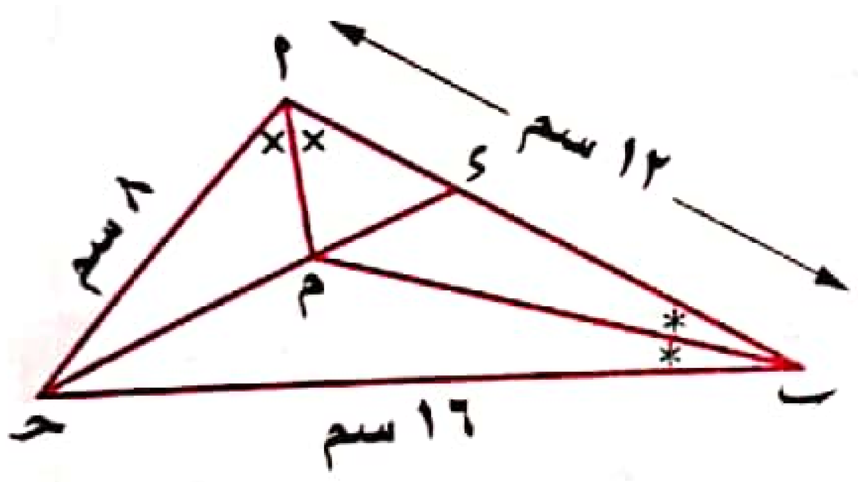
أثبت أن : ب و ينصف ∠ أ ب حـ

**١١** في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٢ سم ، أ حـ = ٨ سم

، ب حـ = ١٦ سم ، ب م ينصف ∠ أ ب حـ

، أ م ينصف ∠ ب أ حـ أوجد : طول أ ء



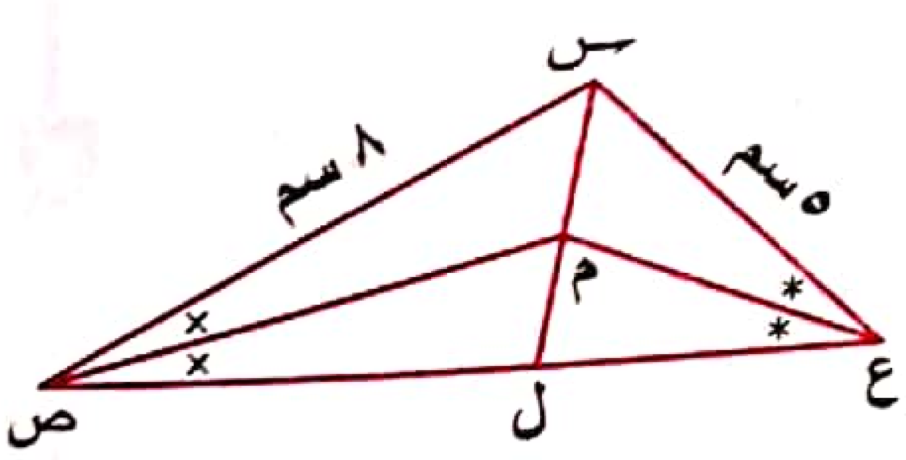

«٤ سم»

**١٢** في الشكل المقابل :

ع م ، ص م منصفا ∠ ع ، ∠ ص على الترتيب

، س ص = ٨ سم ، س ع = ٥ سم

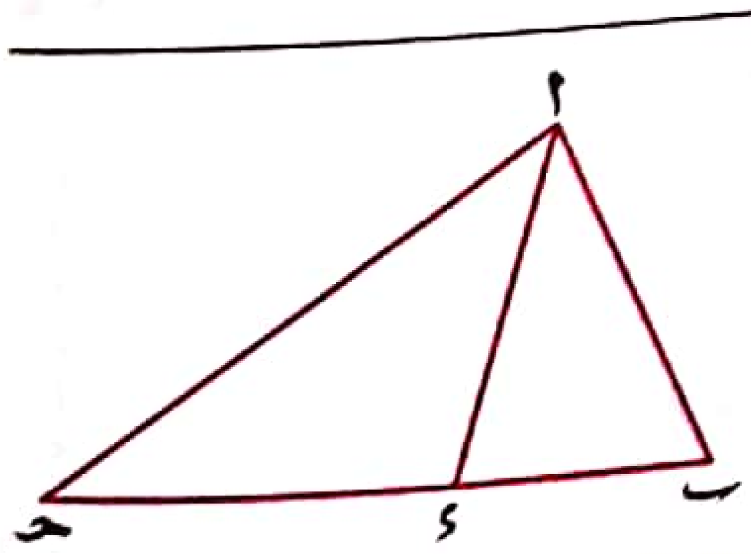
أثبت أن : ٨ ل ع = ٥ ل ص




**١٣** في الشكل المقابل :

إذا كان أ حـ : ء حـ : أ ب : ب ء = ١٥ : ١٠ : ٩ : ٦

فأثبت أن : أ ء ينصف ∠ ب أ حـ




**١٤** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٩ سم ، ء ∈ ب حـ

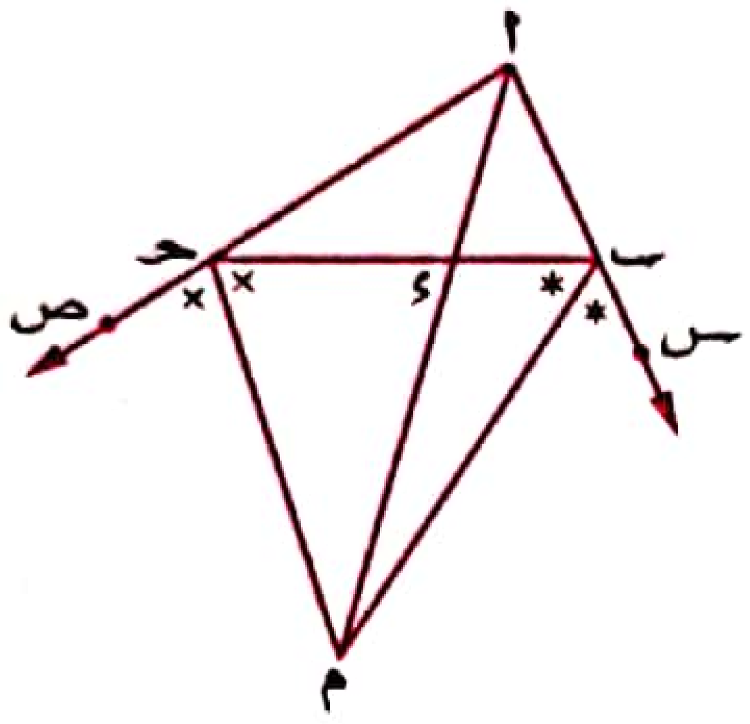
بحيث : ب ء = ٣ سم ، هـ ∈ حـ ب بحيث أ هـ ⊥ أ ء

(١) أثبت أن : أ ء ينصف ∠ ب أ حـ

(٢) أوجد : طول ب هـ

«٩ سم»

**١٥** في الشكل المقابل :




ب م ينصف ∠ حـ ب س

، حـ م ينصف ∠ ب حـ ص

**أثبت أن :** أ م ينصف ∠ ب أ حـ

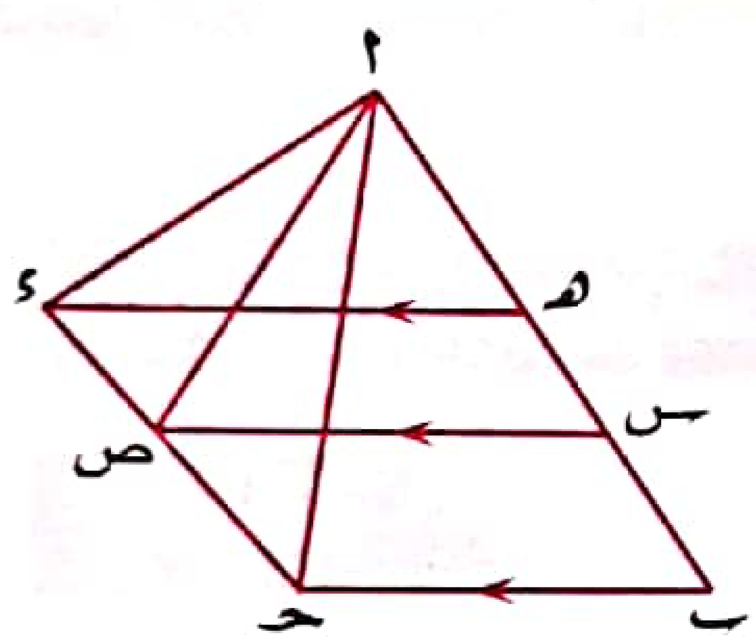
---

**١٦** أ ب حـ مثلث أطوال أضلاعه أ ب ، ب حـ ، حـ أ هى على الترتيب ٦ ، ١٢ ، ٩ من السنتيمترات ، ء ∈ أ ب بحيث : أ ء = ٢ سم ، رسم ء هـ // ب حـ ويقطع أ حـ فى هـ

**أوجد :** طول أ هـ ثم أثبت أن : ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ «٣ سم»

---

**١٧** 📖 في الشكل المقابل :




هـ ء // س ص // ب حـ

، أ ء × ب س = أ حـ × هـ س

**أثبت أن :** أ ص ينصف ∠ حـ أ ء

---

**١٨** 📖 دائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ ، رسم مستقيم يوازى م ن فقطع الدائرة م فى ب ، حـ ، والدائرة ن فى ء ، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع ب م ، هـ ن فى النقطة و

**أثبت أن :** و أ ينصف ∠ م و ن

---

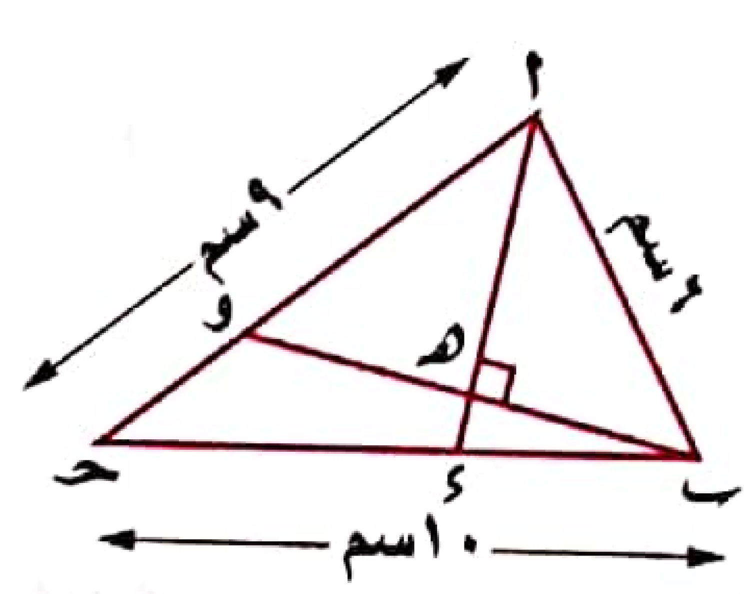
**١٩** 📖 أ ب قطر فى دائرة ، أ حـ وتر فيها ، رسم حـ ء مماسًا للدائرة عند حـ فقطع أ ب فى ء إذا كانت هـ ∈ أ ب بحيث $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء حـ}{حـ هـ}$

**أثبت أن :** (١) حـ أ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث حـ ء هـ عند حـ

(٢) $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**٢٠** 📖 في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٠ سم ، ء ∈ ب حـ بحيث ب ء = ٤ سم

، رسم ب هـ ⊥ أ ء ويقطع أ ء ، أ حـ فى هـ ، و على الترتيب.

(١) أثبت أن : أ ء ينصف ∠ ب أ حـ

(٢) أوجد : م (△ أ ب و) : م (△ حـ ب و) «٢»



# الدرس 5 تطبيقات التناسب فى الدائرة

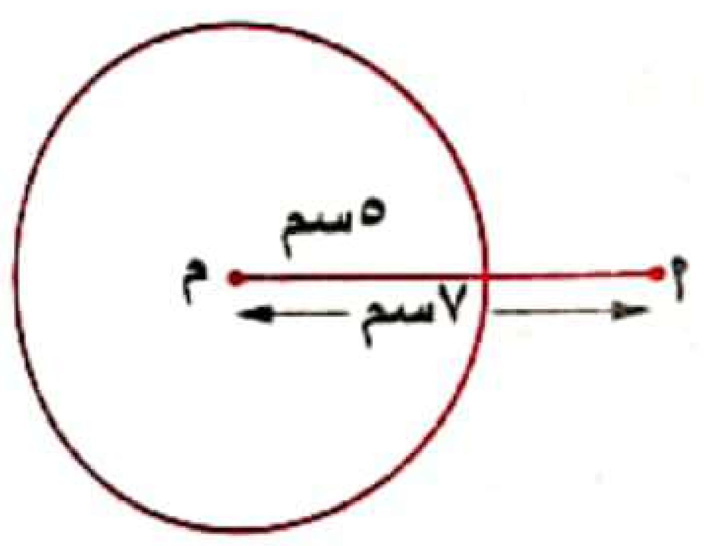
## قوة النقطة بالنسبة لدائرة

### تعريف

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى $ق_{م}(أ)$

حيث : $ق_{م}(أ) = (أ م)^2 - نق^2$

**فمثلاً فى الشكل المقابل :**



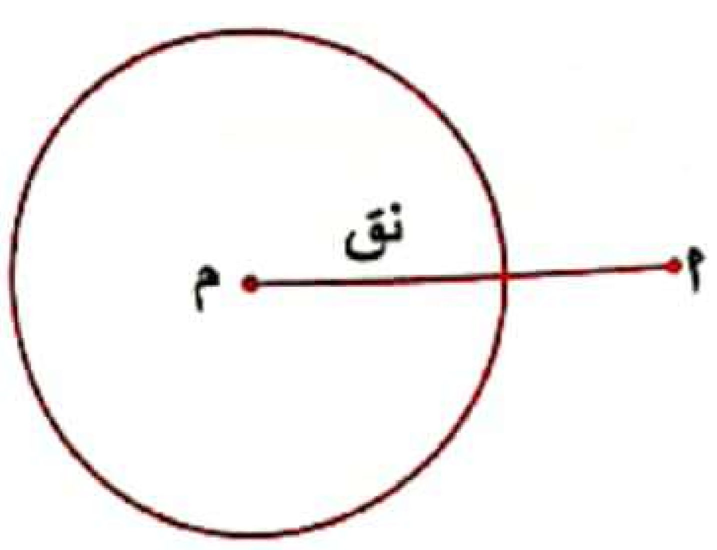

إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

بحيث : م أ = ٧ سم فإن : $ق_{م}(أ) = ٧^2 - ٥^2 = ٢٤$

### ملاحظة ١

يمكن تحديد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة م عن طريق معرفة $ق_{م}(أ)$ فإذا كان :

- $ق_{م}(أ) > ٠$ فإن : أ تقع خارج الدائرة.
- $ق_{م}(أ) = ٠$ فإن : أ تقع على الدائرة.
- $ق_{م}(أ) < ٠$ فإن : أ تقع داخل الدائرة.




### مثال ١

**إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تقع فى مستويها فحدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى كل حالة مما يأتى ثم احسب بعدها عن مركز الدائرة فى كل حالة :**

[١] $ق_{م}(أ) = ١٣$ [٢] $ق_{م}(أ) =$ صفر [٣] $ق_{م}(أ) = -١١$

## الحل

∵ طول قطر الدائرة = ١٢ سم ∴ نق = ٦ سم

[١] ∵ $ق_م$ (أ) = ١٣ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة.

، ∵ $ق_م$ (أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$ ∴ ١٣ = $(م أ)^٢$ − ٣٦ ∴ م أ = ٧ سم

[٢] ∵ $ق_م$ (أ) = صفر ∴ أ تقع على الدائرة. ∴ م أ = ٦ سم

[٣] ∵ $ق_م$ (أ) = −١١ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة. ، ∵ $ق_م$ (أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$

∴ −١١ = $(م أ)^٢$ − ٣٦ ∴ م أ = ٥ سم

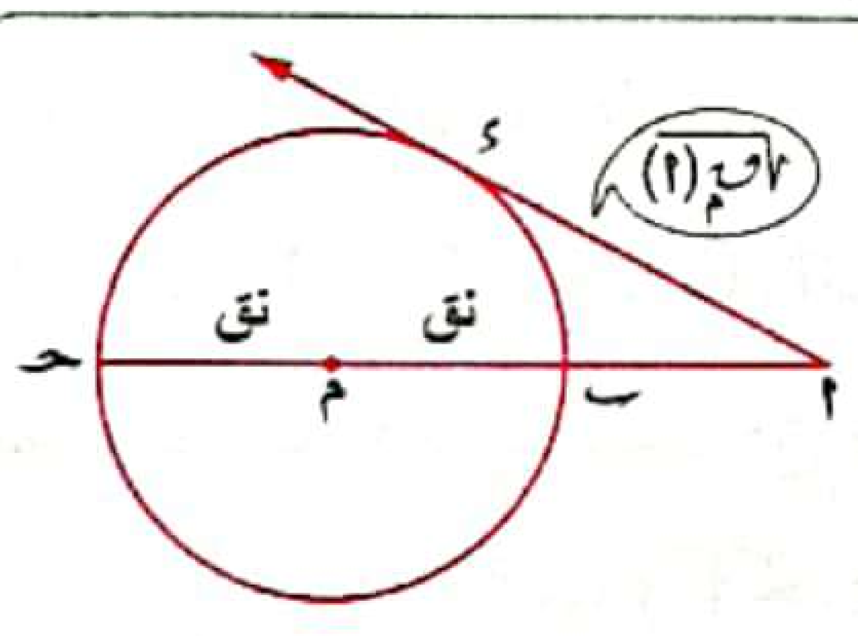
### حاول بنفسك

حدد موضع كل من النقط أ ، ب ، حـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان :

[١] $ق_م$ (أ) = ١١ [٢] $ق_م$ (ب) = صفر [٣] $ق_م$ (حـ) = −١٦

ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة م

### ملاحظـة [٢]



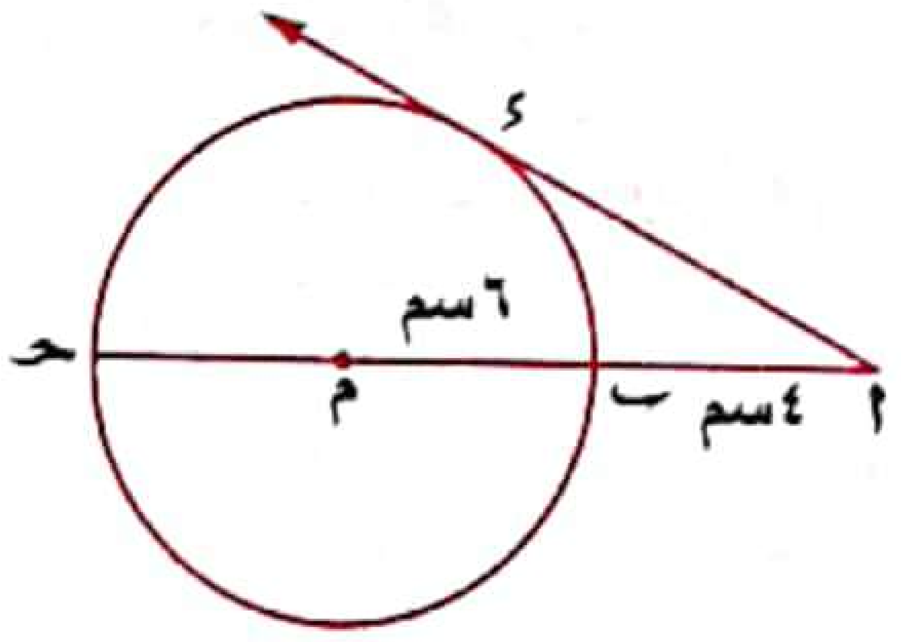

إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$ (أ) = $(أ م)^٢$ − $نق^٢$

= (أ م − نق) (أ م + نق)

= أ ب × أ حـ = $(أ ء)^٢$

∴ طول القطعة المستقيمة المماسة المرسومة من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{ق_م (أ)}$




◂ فمثلاً فى الشكل المقابل :

إذا كانت أ نقطة تقع خارج الدائرة م التى طول

نصف قطرها ٦ سم ، $\overleftrightarrow{أء}$ يمس الدائرة فى ء

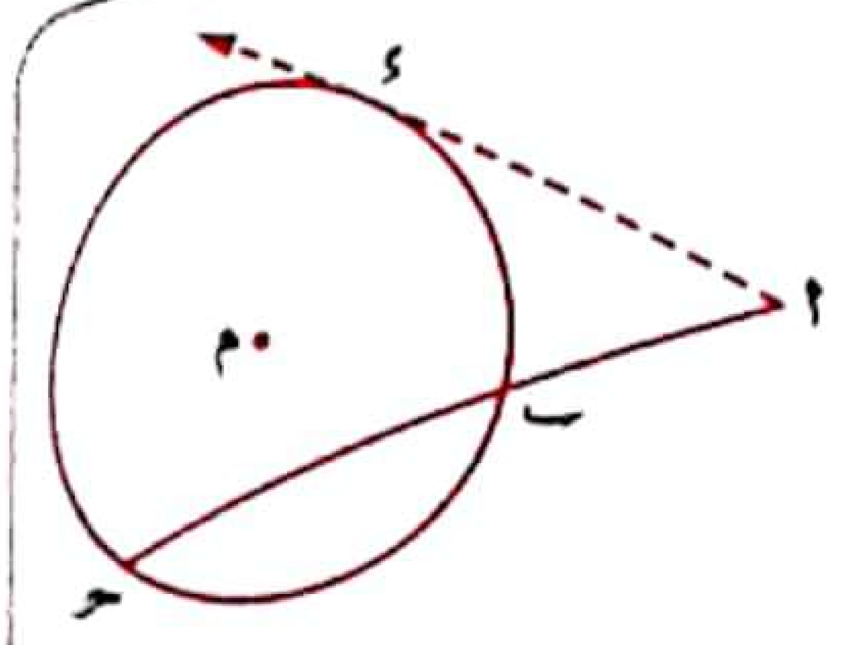
فإذا كان : أ ب = ٤ سم فإنه يمكن إيجاد $ق_م$ (أ)

بإحدى الطرق الآتية :

- باستخدام التعريف : $ق_م$ (أ) = $(أ م)^٢$ − $نق^٢$ = $(١٠)^٢$ − $(٦)^٢$ = ٦٤
- باستخدام الملاحظة السابقة : $ق_م$ (أ) = أ ب × أ حـ = ٤ × ١٦ = ٦٤

ومما سبق يمكن إيجاد : أ ء حيث أ ء = $\sqrt{ق_م (أ)}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

### لاحظ أنه




فى الشكل المقابل :

إذا كانت : أ نقطة خارج الدائرة

، $\overline{\text{أجـ}}$ تقطع الدائرة فى ب ، جـ

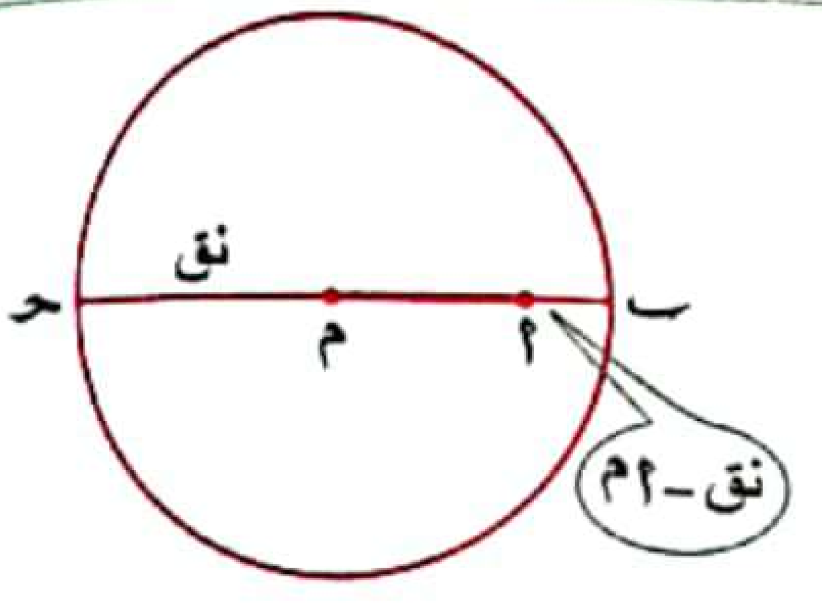
فإن : $\text{ق}_\text{م}$ (أ) = أب × أجـ

**ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة حيث :**

$\text{ق}_\text{م}$ (أ) = $(\text{أء})^2$ (حيث $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يمس الدائرة م فى ء)

، ∵ $(\text{أء})^2$ = أب × أجـ ∴ $\text{ق}_\text{م}$ (أ) = أب × أجـ

### ملاحظة ٣

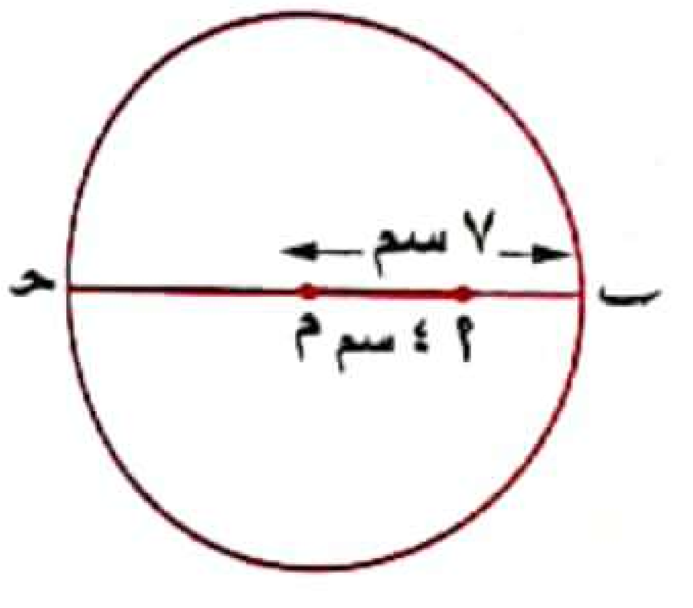



إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن :

$\text{ق}_\text{م}$ (أ) = $(\text{أ م})^2$ − $\text{نق}^2$ = (أ م − نق) (أ م + نق)

= − (نق − أ م) (أ م + نق) = − أب × أجـ

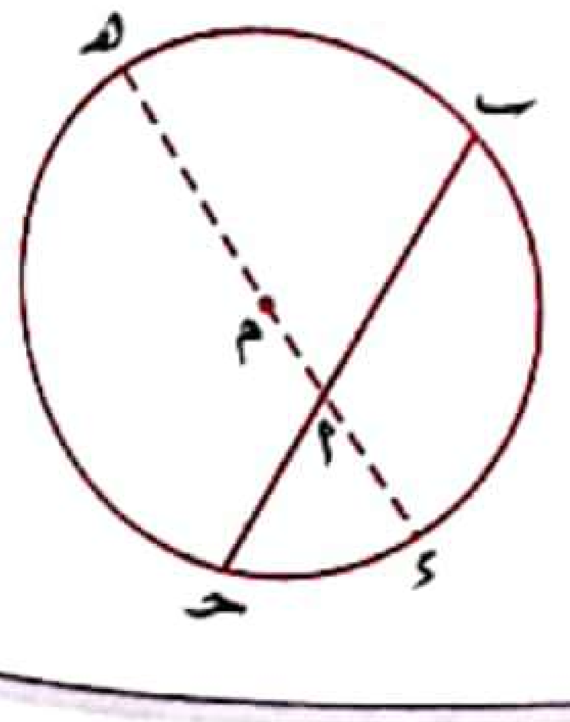
◄ **فمثلًا فى الشكل المقابل :**




إذا كانت : أ نقطة تقع داخل الدائرة التى طول نصف قطرها ٧ سم وتبعد عن مركزها ٤ سم

فإن : $\text{ق}_\text{م}$ (أ) = − أب × أجـ = −٣ × ١١ = −٣٣

### لاحظ أنه




فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overline{\text{ب جـ}}$ وترًا فى الدائرة م

، أ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

فإن : $\text{ق}_\text{م}$ (أ) = − أب × أجـ

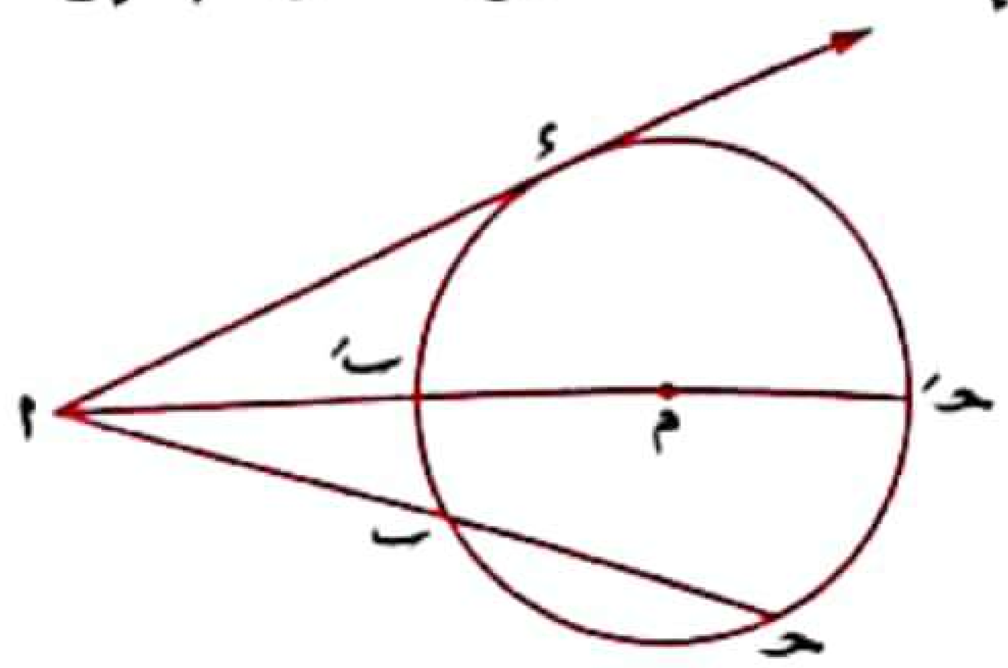
**ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة كما يلى :**

$\text{ق}_\text{م}$ (أ) = − أء × أهـ (حيث $\overline{\text{ءهـ}}$ قطر)

، ∵ أء × أهـ = أب × أجـ ∴ $\text{ق}_\text{م}$ (أ) = − أب × أجـ

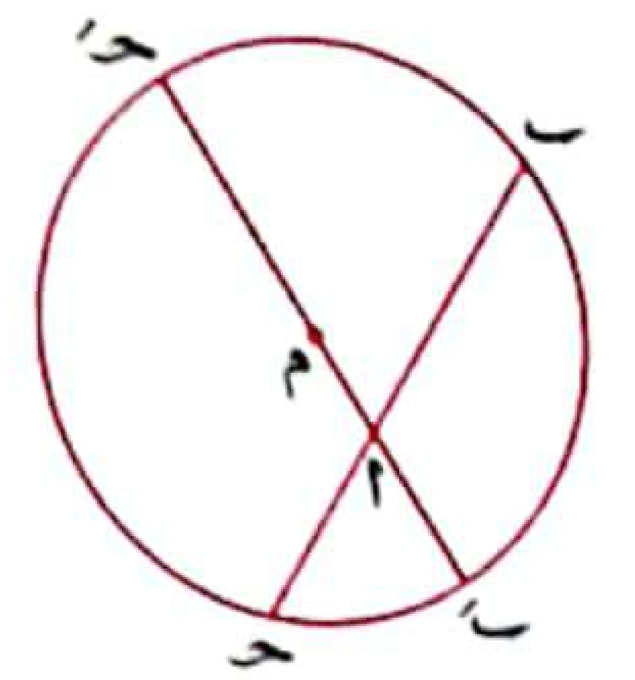
يمكن تلخيص ما سبق كما يلى :

إذا كانت : أ خارج الدائرة م فإن :



ق$_{م}$ (أ) = أ ب × أ حـ = أ بَ × أ حـَ = (أ ء)$^{٢}$

إذا كانت : أ داخل الدائرة م فإن :

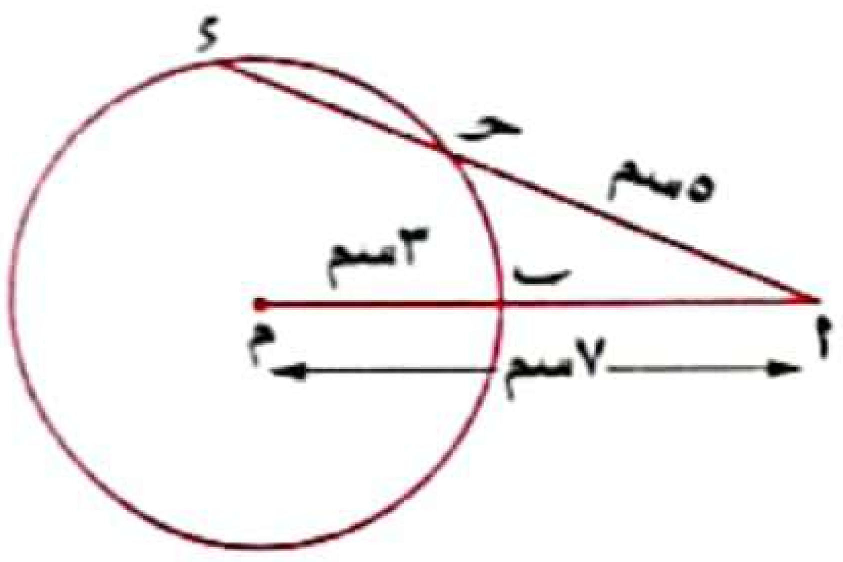


ق$_{م}$ (أ) = − أ ب × أ حـ = − أ بَ × أ حـَ

## مثال ٢

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٧ سم ، رسم من أ مستقيم يقطع الدائرة فى حـ ، ء بحيث حـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ فإذا كان : حـ أ = ٥ سم فاحسب : طول الوتر $\overline{\text{حـ ء}}$

### الحل




∵ ق$_{م}$ (أ) = (أ م)$^{٢}$ − نق$^{٢}$ = ٤٩ − ٩ = ٤٠

، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ حـ × أ ء ∴ ٤٠ = ٥ × أ ء

∴ أ ء = ٨ سم

∴ حـ ء = أ ء − أ حـ = ٨ − ٥ = ٣ سم

(وهو المطلوب)

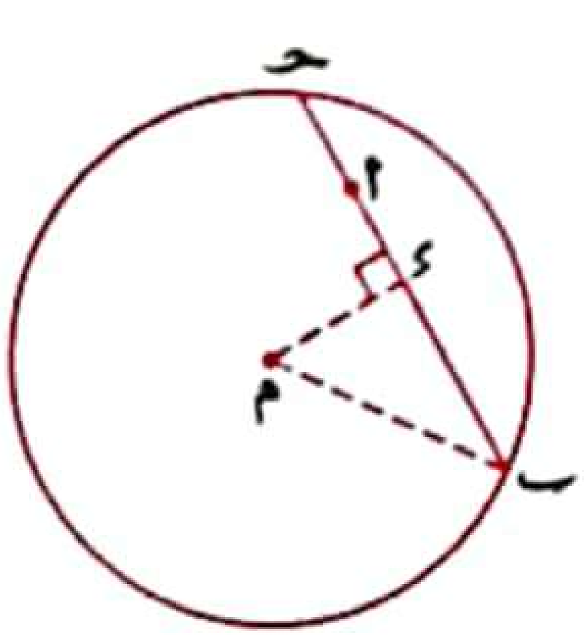
## مثال ٣

دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ يمر بالنقطة أ بحيث أ ب = ٣ أ حـ

احسب : [١] طول الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ [٢] بُعد الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ عن مركز الدائرة.

### الحل

∵ ق$_{م}$ (أ) = (أ م)$^{٢}$ − نق$^{٢}$ = ٢٥ − ٤٩ = −٢٤



، ∵ ق$_{م}$ (أ) = − أ ب × أ حـ ∴ −٢٤ = − أ ب × أ حـ

∴ ٢٤ = أ ب × أ حـ ، ∵ أ ب = ٣ أ حـ

∴ ٢٤ = ٣ أ حـ × أ حـ ∴ (أ حـ)$^{٢}$ = ٨

∴ أ حـ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم ، ∵ أ ب = ٣ أ حـ

∴ أ ب = ٦ $\sqrt{٢}$ سم ∴ ب حـ = أ حـ + أ ب = ٨ $\sqrt{٢}$ سم (المطلوب أولًا)

، وبفرض أن بُعد الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ عن مركز الدائرة هو م ء حيث : $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق$_{\text{م}}$ (ء) = $(\text{ء م})^2$ − $\text{نق}^2$ = − ب ء × ء حـ

∴ $(\text{ء م})^2 - 49 = -4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

∴ $(\text{ء م})^2 = 17$ ∴ ء م = $\sqrt{17} \simeq 4.1$ سم **(المطلوب ثانيًا)**

**حاول بنفسك**

الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم ، أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم ، رُسم الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث أ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ب = ٢ أ حـ

احسب : [١] طول الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ [٢] بُعد الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ عن مركز الدائرة.

**ملاحظة هامة**

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين

فإذا كان : ق$_{\text{م}}$ (أ) = ق$_{\text{ن}}$ (أ) فإن أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

**فمثلًا** إذا كان : ق$_{\text{م}}$ (أ) = ق$_{\text{ن}}$ (أ) ، ق$_{\text{م}}$ (ب) = ق$_{\text{ن}}$ (ب) فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن

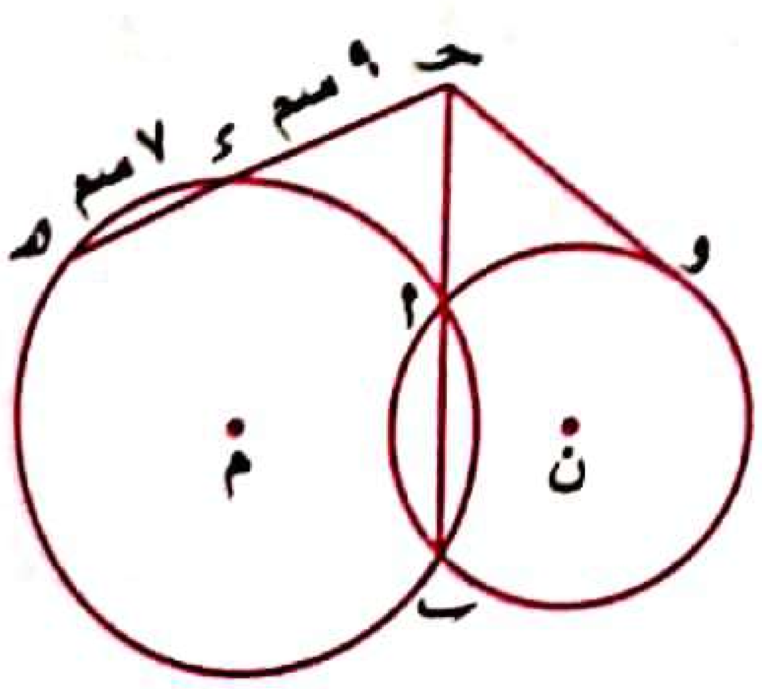
## مثال ٤

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، حـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{ب أ}}$ ، رسم $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ فقطع الدائرة م فى ء ، هـ حيث : حـ ء = ٩ سم ، ء هـ = ٧ سم ، ورسم $\overrightarrow{\text{حـ و}}$ يمس الدائرة ن عند و

[١] **أثبت أن :** حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

[٢] إذا كان : أ ب = ١٠ سم **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$

## الحل




∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق$_{\text{م}}$ (أ) = ق$_{\text{ن}}$ (أ) = صفر

، بالمثل : ق$_{\text{م}}$ (ب) = ق$_{\text{ن}}$ (ب) = صفر

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور أساسى للدائرتين م ، ن ، ∵ حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ النقطة حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن **(المطلوب أولًا)**

، ∵ ق$_{\text{م}}$ (حـ) = حـ ء × حـ هـ = ٩ × ١٦ = ١٤٤

، ق$_{م}$ (حـ) = حـ أ × حـ ب

∴ ١٤٤ = (حـ أ)$^{٢}$ + ١٠ حـ أ

∴ (حـ أ − ٨) (حـ أ + ١٨) = ٠

، ∵ حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

∴ ق$_{ن}$ (حـ) = ق$_{م}$ (حـ) ، ق$_{ن}$ (حـ) = (حـ و)$^{٢}$

∴ (حـ و)$^{٢}$ = ١٤٤

∴ ١٤٤ = حـ أ (حـ أ + ١٠)

∴ (حـ أ)$^{٢}$ + ١٠ حـ أ − ١٤٤ = ٠

∴ حـ أ = ٨ سم

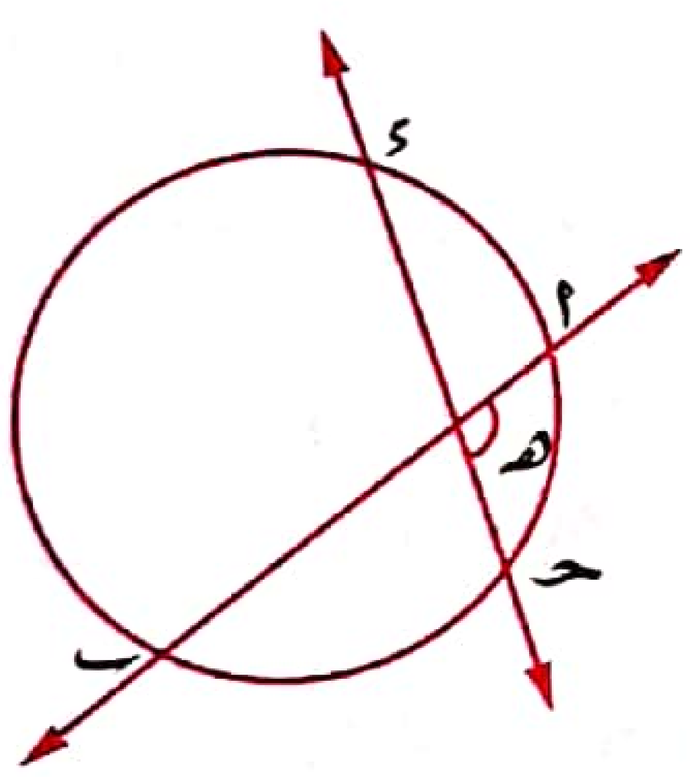
∴ حـ و = ١٢ سم **(المطلوب ثانيًا)**

## القاطع والمماس وقياسات الزوايا

**تذكر أن :**

**١** إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.

**فى الشكل المقابل :**




$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ}

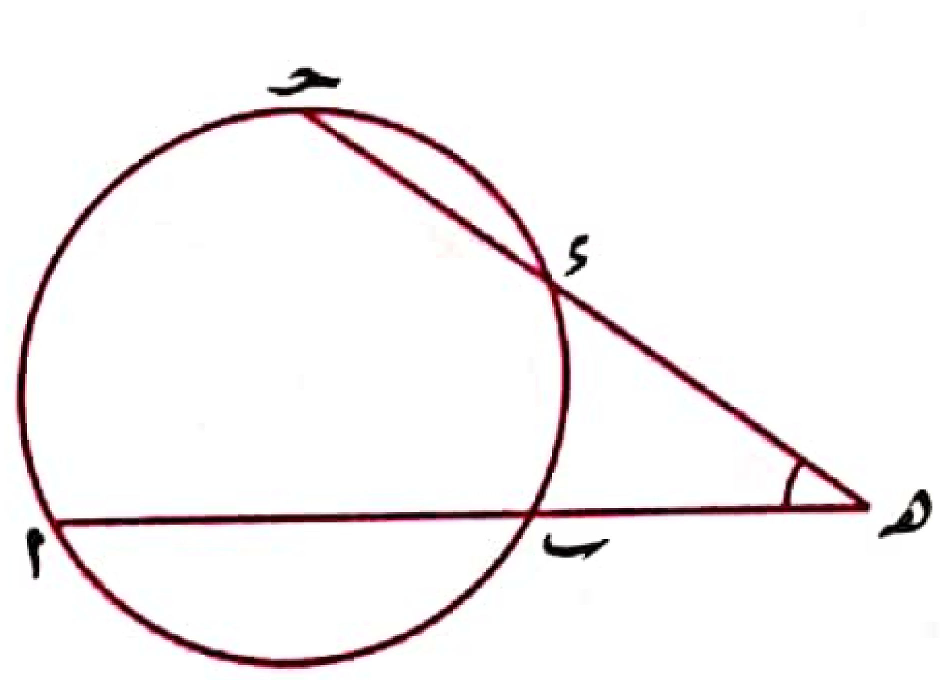
فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أحـ) + ق (⌒ب ء)]

**فمثلًا** إذا كان : ق (⌒أحـ) = ٥٠° ، ق (⌒ب ء) = ١٧٠°

فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [٥٠° + ١٧٠°] = ١١٠°

**٢** إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.

**فى الشكل المقابل :**




$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ}

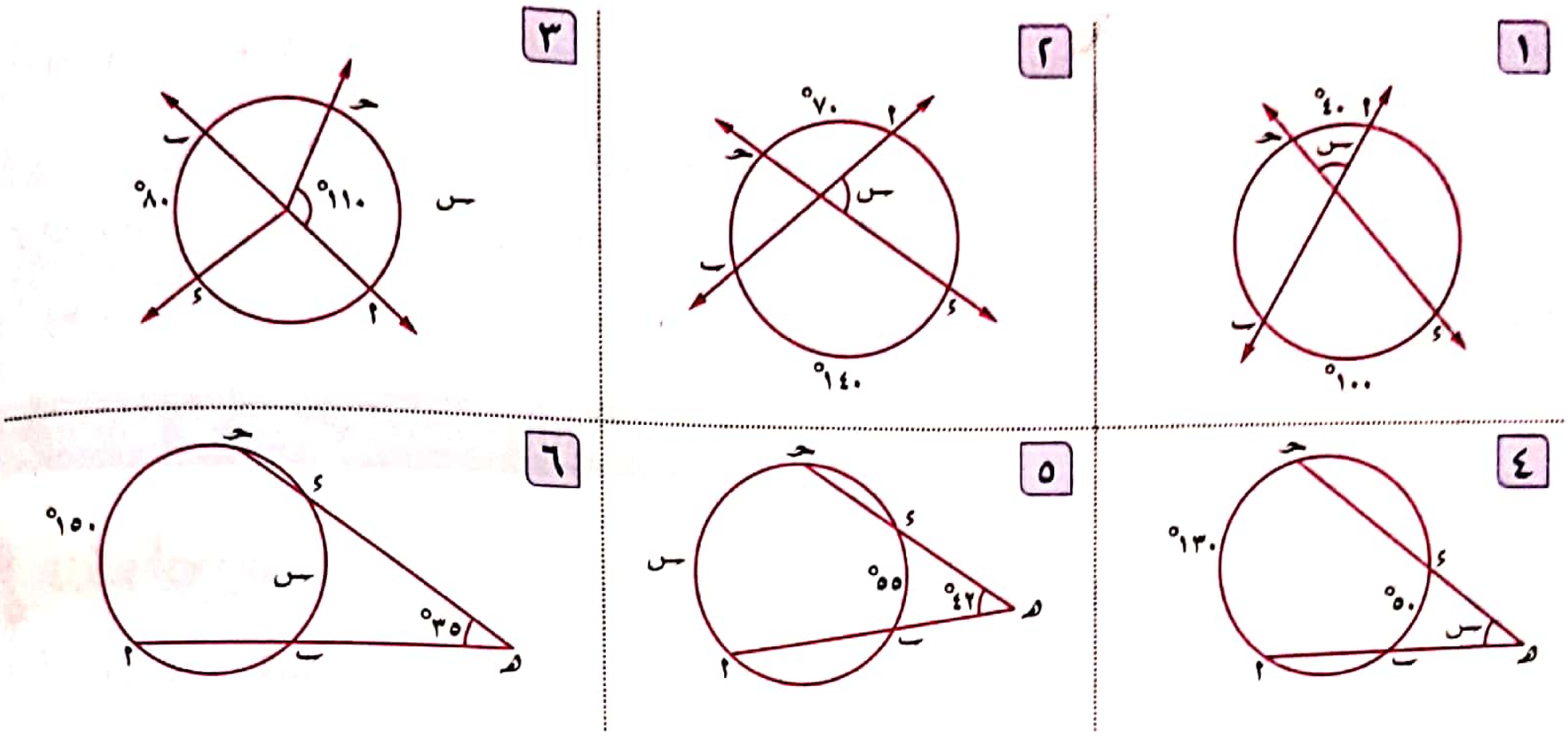
فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أحـ) − ق (⌒ب ء)]

**فمثلًا** إذا كان : ق (⌒أحـ) = ١٢٠° ، ق (⌒ب ء) = ٥٠°

فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [١٢٠° − ٥٠°] = ٣٥°

## مثال ٥

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س :




## الحل

١ س = ½ [٤٠° + ١٠٠°] = ٧٠°

٢ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ، ق(أ⌒ح) + ق(ء⌒ب) = ٧٠° + ١٤٠° = ٢١٠°

∴ ق(أ⌒ء) + ق(ب⌒ح) = ٣٦٠° − ٢١٠° = ١٥٠° ∴ س = ½ × ١٥٠° = ٧٥°

٣ ∵ ½ [س + ٨٠°] = ١١٠° ∴ س + ٨٠° = ٢٢٠° ∴ س = ١٤٠°

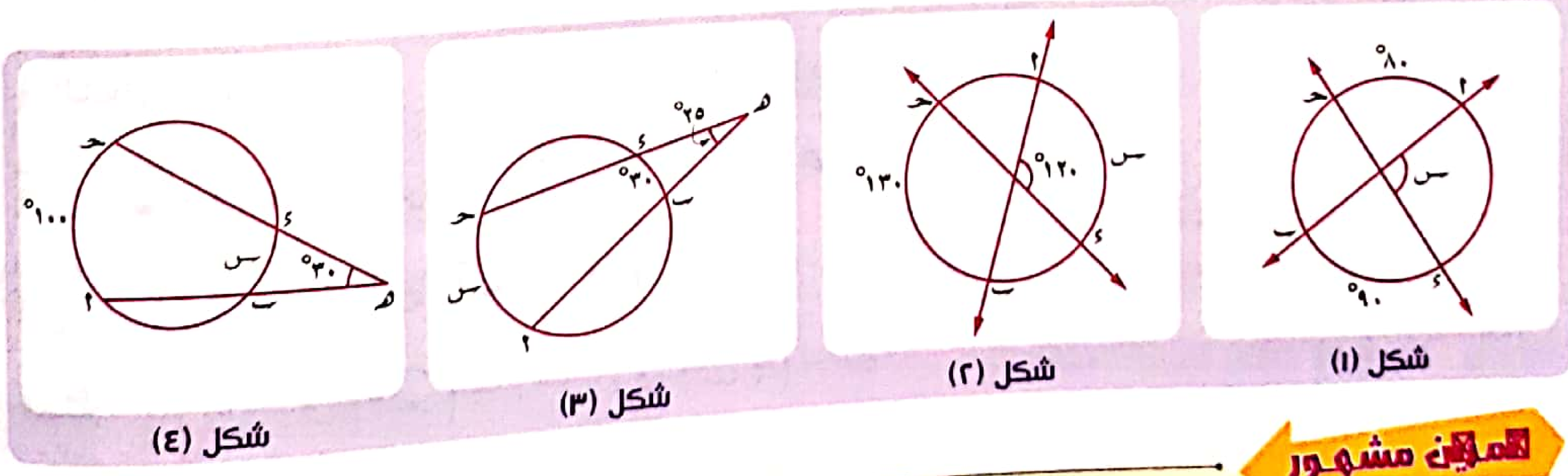
٤ س = ½ [١٣٠° − ٥٠°] = ٤٠°

٥ ∵ ½ [س − ٥٥°] = ٤٢° ∴ س − ٥٥° = ٨٤° ∴ س = ١٣٩°

٦ ∵ ½ [١٥٠° − س] = ٣٥° ∴ ١٥٠° − س = ٧٠° ∴ س = ٨٠°

## حاول بنفسك

أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

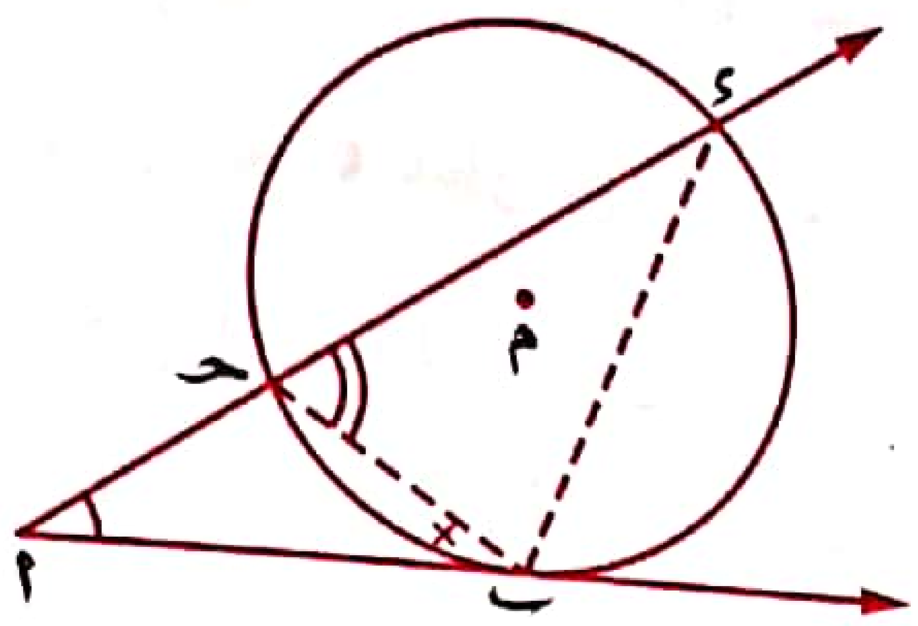


شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

**تمرين مشهور**

القاطع والمماس لدائرة (أو المماسان لدائرة) المتقاطعان في نقطة خارجها ، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

## الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة




**المعطيات:** $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overrightarrow{أء}$ ∩ الدائرة م = {حـ ، ء}

**المطلوب:** إثبات أن : ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بء}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)]

**العمل:** نرسم $\overline{بحـ}$ ، $\overline{بء}$

**البرهان:** ∵ ∠ ب حـ ء خارجة عن △ أ ب حـ

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ أ ب حـ)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب حـ ء) − ق (∠ أ ب حـ)

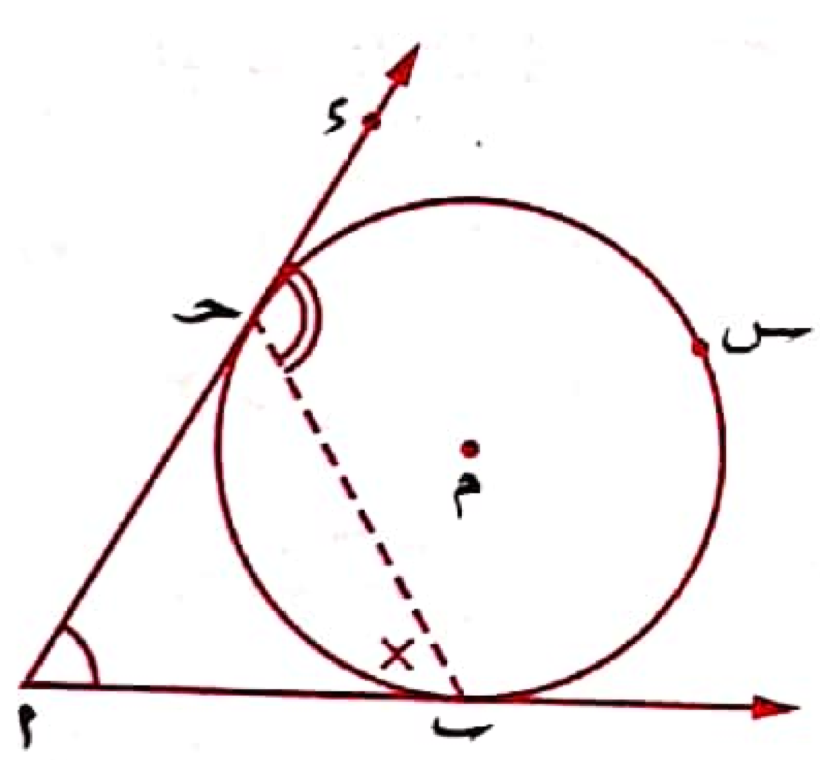
، ∵ ∠ ب حـ ء محيطية. ∴ ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بء}$)

، ∵ ∠ أ ب حـ مماسية. ∴ ق (∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بء}$) − $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بء}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)] (وهو المطلوب)

## الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة




**المعطيات:** $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م عند ب ، حـ

**المطلوب:** إثبات أن : ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بسحـ}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)]

**العمل:** نرسم $\overline{بحـ}$

**البرهان:** ∵ ∠ ب حـ ء خارجة عن △ أ ب حـ

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ ب)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب حـ ء) − ق (∠ ب)

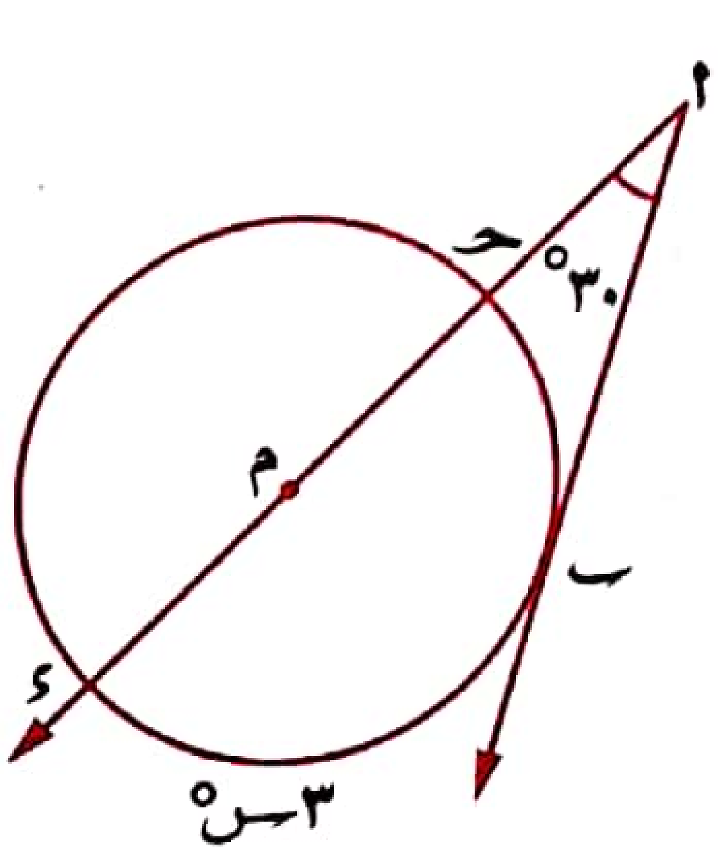
، ∵ ∠ ب حـ ء مماسية. ∴ ق (∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بسحـ}$)

، ∵ ∠ ب مماسية. ∴ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)

∴ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بسحـ}$) − $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{بسحـ}$) − ق ($\overset{\frown}{بحـ}$)] (وهو المطلوب)

### مثال ٦




**فى الشكل المقابل :**

إذا كان $\overleftarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م عند ب ، ق (∠ أ) = °٣٠

، $\overrightarrow{أم}$ يقطع الدائرة فى حـ ، ء ، ق ($\overset{\frown}{بء}$) = ٣ س°

**أوجد :** قيمة س

**الحـل**

∵ أب⟵ مماس للدائرة م ، أء⟵ قاطع لها ∴ ق(∠أ) = ١/٢ [ق(⌒ب ء) − ق(⌒ب ح)]

∴ ١/٢ [ق(⌒ب ء) − ق(⌒ب ح)] = ٣٠° ∴ ق(⌒ب ء) − ق(⌒ب ح) = ٦٠° (١)

، ∵ حء قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌒ب ء) + ق(⌒ب ح) = ١٨٠° (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ ق(⌒ب ء) = ٢٤٠° ∴ ق(⌒ب ء) = ١٢٠°

، ∵ ق(⌒ب ء) = ٣ س° ∴ ٣ س° = ١٢٠°

∴ س = ٤٠°

(وهو المطلوب)

**مثـال ٧**

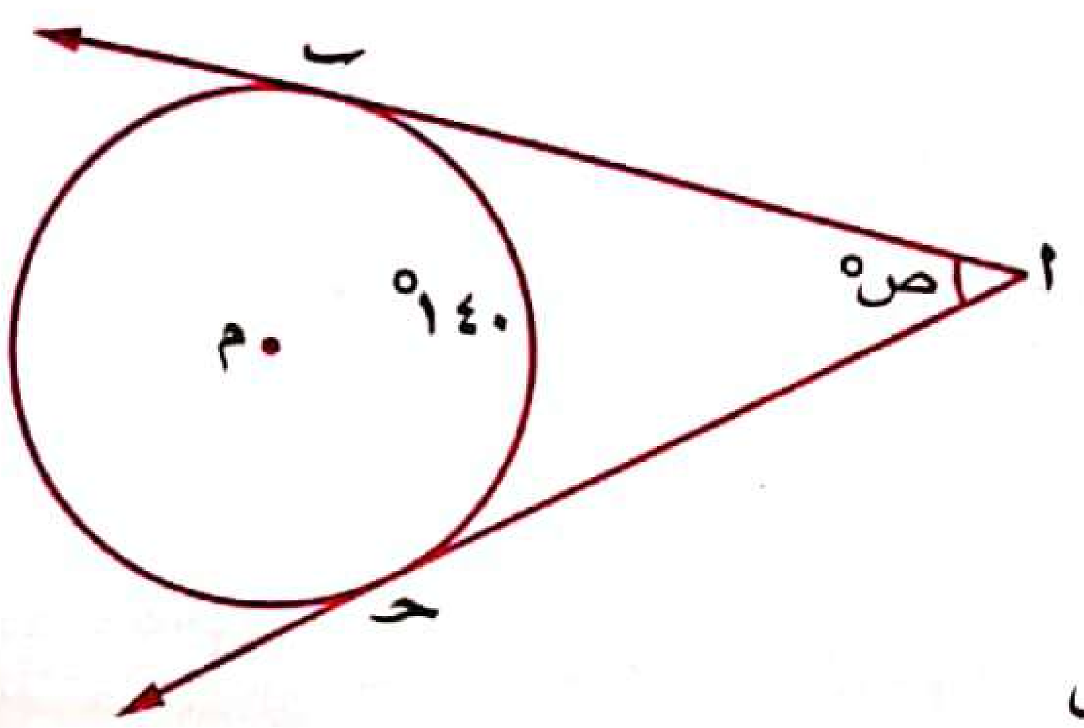
**فى الشكل المقابل :**

إذا كان : أب⟵ ، أح⟵ مماسين للدائرة م

عند ب ، ح على الترتيب ، ق(∠أ) = ص°

، ق(⌒ب ح) الأصغر = ١٤٠°

، ق(⌒ب ح) الأكبر = (٣ س + ١٠)° **فأوجد :** قيمتى س ، ص




**الحـل**

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(⌒ب ح) الأصغر + ق(⌒ب ح) الأكبر = ٣٦٠°

∴ ١٤٠° + (٣ س + ١٠)° = ٣٦٠° ∴ ٣ س° + ١٥٠° = ٣٦٠°

∴ ٣ س° = ٢١٠° ∴ س = ٧٠

∴ ق(⌒ب ح) الأكبر = (٣ × ٧٠° + ١٠°) = ٢٢٠° ، ∵ أب⟵ ، أح⟵ مماسان للدائرة م

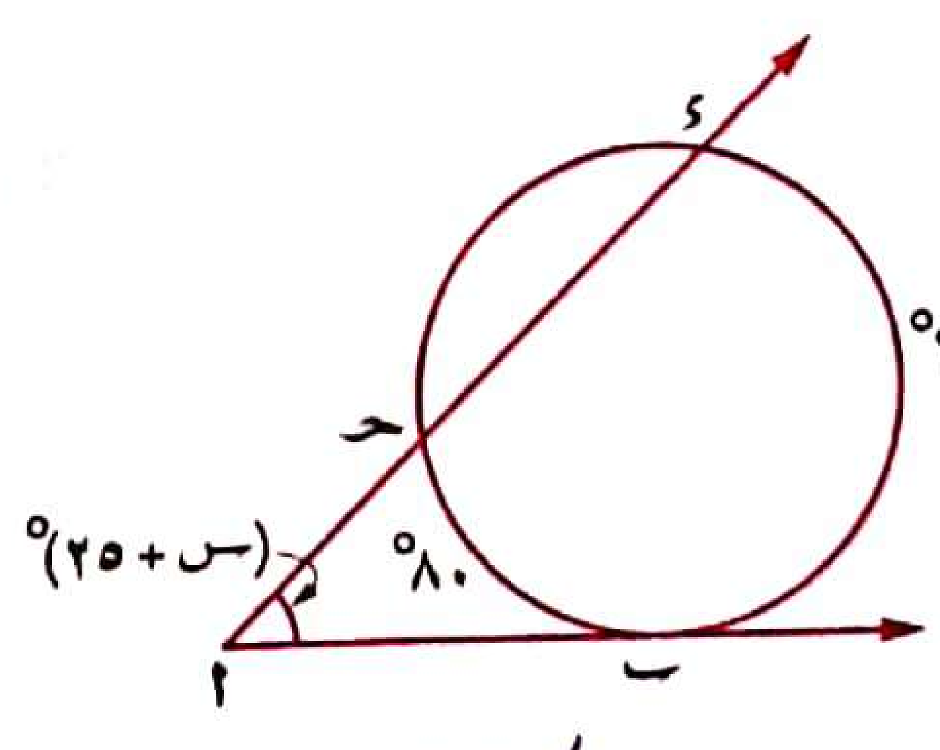
∴ ق(∠أ) = ١/٢ [ق(⌒ب ح) الأكبر − ق(⌒ب ح) الأصغر]

∴ ص° = ١/٢ [٢٢٠° − ١٤٠°] = ٤٠° ∴ ص = ٤٠

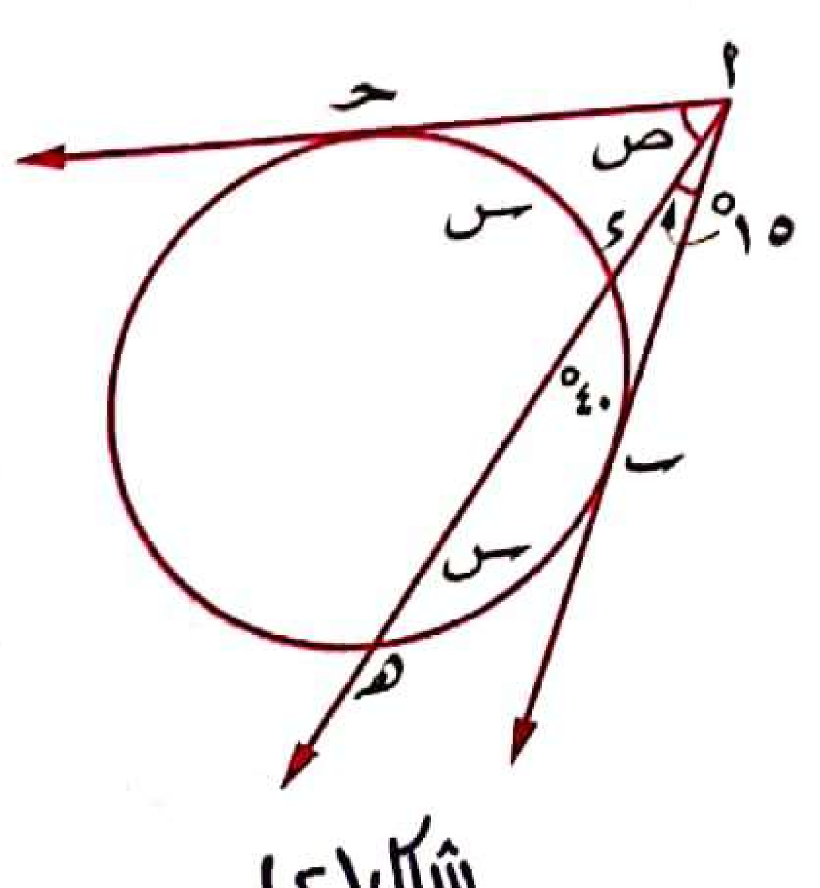
(وهو المطلوب)

**حاول بنفسك**

**باستخدام معطيات الشكل ، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس :**




شكل (١)




شكل (٢)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق :

(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

(٢) النقطة ب حيث ب م = ٨ سم ، نق = ١٥ سم

(٣) النقطة حـ حيث حـ م = ٧ سم ، نق = ٧ سم

(٤) النقطة ء حيث ء م = $\sqrt{١٧}$ سم ، نق = ٤ سم

---

**٢** حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، حـ بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة فى كل من الحالات الآتية :

(١) $ق_م$ (أ) = −٣٦ (٢) $ق_م$ (ب) = ٩٦ (٣) $ق_م$ (حـ) = صفر

---

**٣** إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوى ٤٠٠

أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة. «١٥ سم»

---

**٤** إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{أء}$ مماسة للدائرة عند ء بحيث أء = ٨ سم

فأوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م «٦٤»

---

**٥** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة فإن : أ تقع ..............

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٢) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة تقع فى مستويها بحيث $ق_م$ (أ) = ٠ فإن : أ تقع ..............

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٣) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٤ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ..............

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) −٧

(٤) إذا كانت ن دائرة طول قطرها ١٦ سم ، ب نقطة فى مستويها بحيث ن ب = ٥ سم

فإن : $ق_ن$ (ب) = ..............

(أ) ٣٩ (ب) −٣٩ (جـ) $\sqrt{٣٩}$ (د) −٢٣١

(٥) إذا كانت قوة نقطة بالنسبة لدائرة م تساوى −٦٢٥ ، بُعد هذه النقطة عن مركز الدائرة يساوى ١٥ سم فإن طول قطر هذه الدائرة يساوى .............. سم

(أ) ٤٠٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٥\sqrt{٣٤}$ (د) $١٠\sqrt{٣٤}$

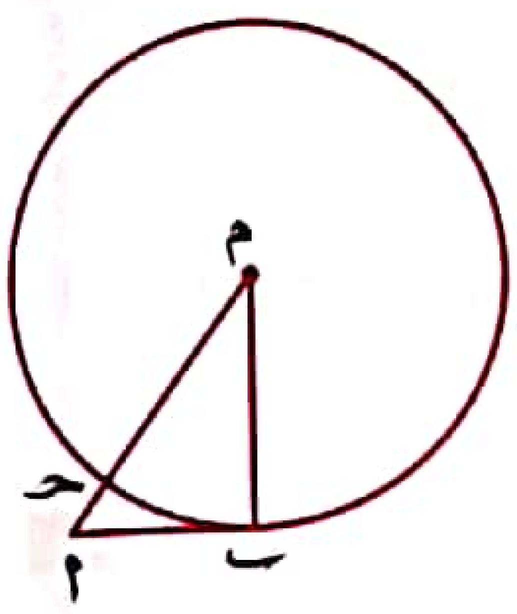
(٦) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٦ سم ، $ق_م$ (أ) = −١٣ فإن مساحة هذه الدائرة = .............. سم$^٢$ ( $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ )

(أ) ١٥٤ (ب) ٤٤ (جـ) ١٤٤ (د) ٧

(٧) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستويها تبعد عن مركز الدائرة ٢٥ سم فإن طول القطعة المماسة المرسومة من أ للدائرة م يساوى .............. سم

(أ) ٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

**٦** فى الشكل المقابل :




$\overline{أب}$ تمس الدائرة م عند ب ، $\overline{مأ}$ تقطع الدائرة م فى نقطة حـ

إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٢ سم

، $ق_م$ (أ) = ٨١

فأوجد : (١) طول $\overline{أب}$ (٢) طول $\overline{أحـ}$ «٩ سم ، ٣ سم»

**٧** الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم ، رسم الوتر $\overline{بحـ}$ حيث : أ ∈ $\overline{بحـ}$ ، أب = ٣ أحـ

احسب : (١) طول الوتر $\overline{بحـ}$ (٢) بعد الوتر $\overline{بحـ}$ عن مركز الدائرة. «٤٨ سم ، ١٩,٦ سم»

**٨** الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم ، النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة ، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة فى نقطتين حـ ، ء حيث حـب = حـء

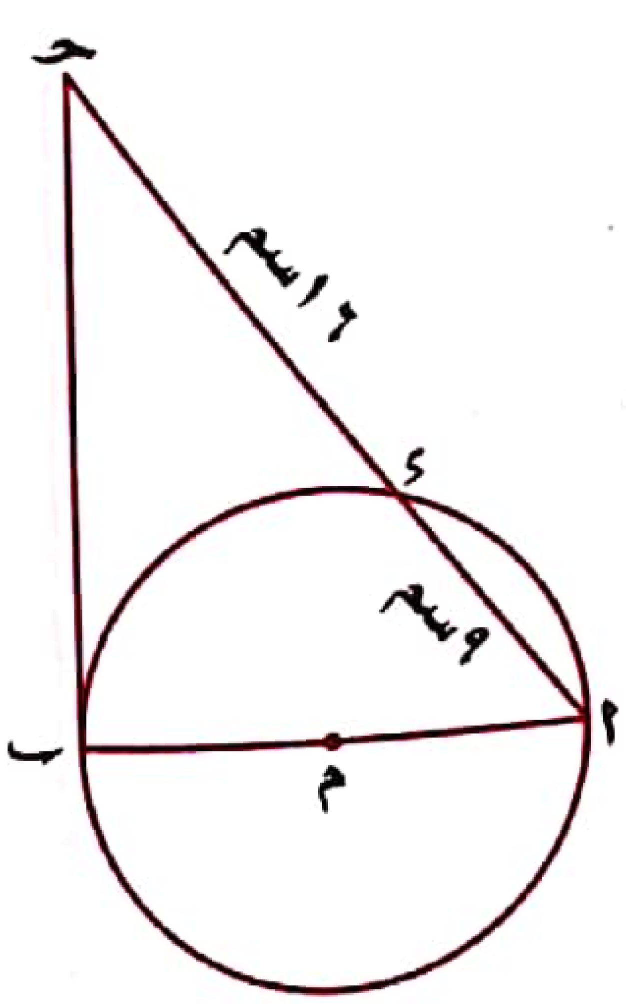
احسب طول الوتر $\overline{حـء}$ وبعده عن النقطة ن «$٢\sqrt{١٠}$ سم ، $٣\sqrt{٦}$ سم»

**٩** فى الشكل المقابل :

م دائرة ، $\overline{أب}$ قطر فيها ، $\overline{حـب}$ تمس الدائرة م فى ب ، $\overline{حـأ}$ تقطع الدائرة م فى ء بحيث : حـء = ١٦ سم ، ءأ = ٩ سم

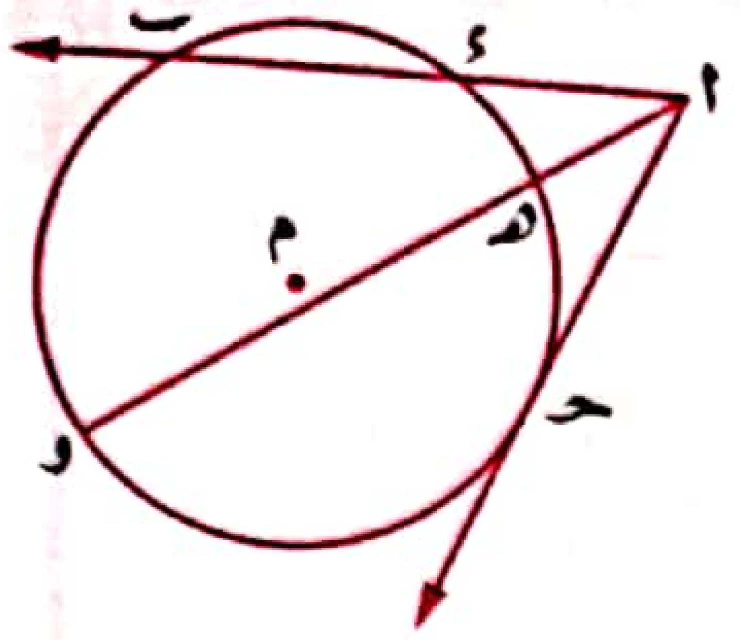
أوجد : (١) طول نصف قطر الدائرة.

(٢) مساحة المثلث أب حـ




«٧,٥ سم ، ١٥٠ سم$^٢$»

**١٠** في الشكل المقابل :




أ نقطة خارج الدائرة م ، أب يقطع الدائرة في ء ، ب

، أو يقطع الدائرة في هـ ، و ، أحـ يمس الدائرة عند حـ

، أء = ٨ سم ، هـ و = ١٨ سم

(١) إذا كان : ق م (أ) = ١٤٤ **فأوجد** : طول كل من أحـ ، ءب ، أهـ

(٢) إذا كان : س ∈ ب ء حيث ء س = ٤ سم

**فأوجد** : ق م (س)

«١٢ سم ، ١٠ سم ، ٦ سم ، -٢٤»

---

**١١** الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، أب مماس مشترك للدائرتين م ، ن

، ب حـ يقطع الدائرة م في حـ ، ء ، ب هـ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب.

(١) **أثبت أن** : أب محور أساسي للدائرتين م ، ن

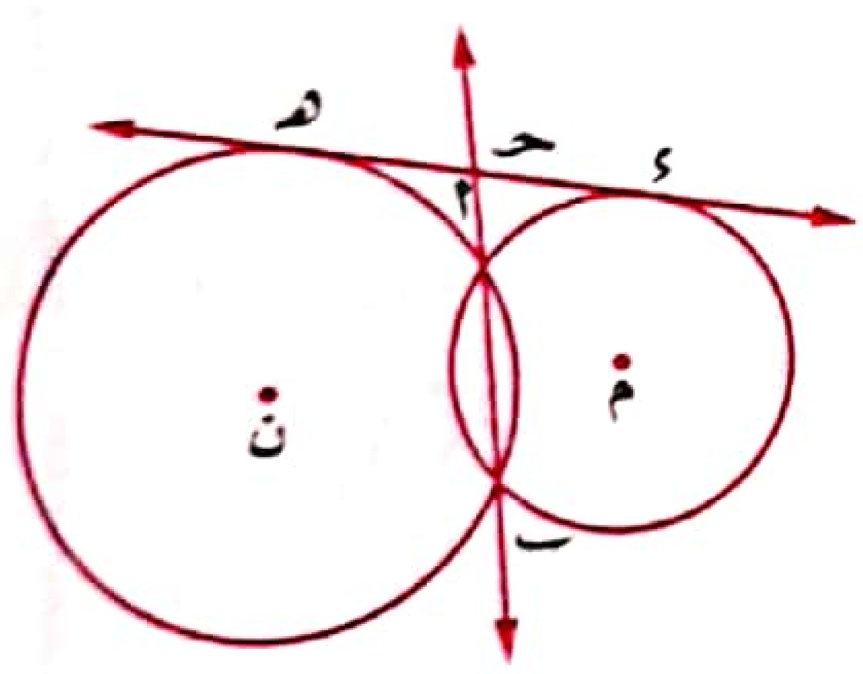
(٢) إذا كان : ق م (ب) = ٣٦ ، ب حـ = ٤ سم ، هـ و = ٩ سم

**أوجد** : طول كل من حـ ء ، أب ، ب هـ

«٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم»

---

**١٢** في الشكل المقابل :




م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، هـ ء مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند ء ، هـ

على الترتيب ، ب أ ∩ ء هـ = {حـ}

(١) **أثبت أن** : ب حـ محور أساسي للدائرتين.

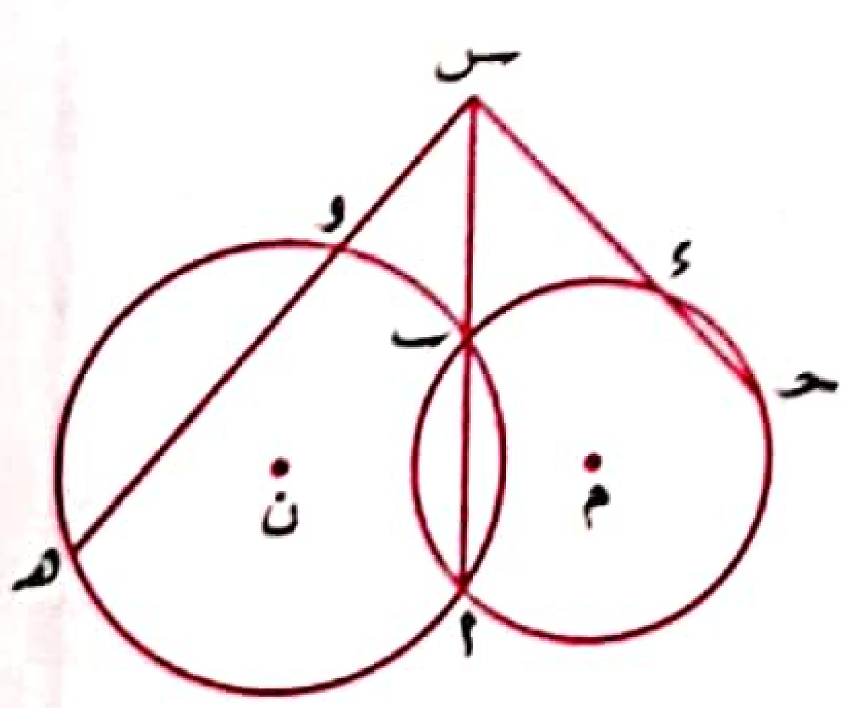
(٢) إذا كان : أب = ١٢ سم ، ق ن (حـ) = ٦٤

**أوجد** : طول كل من حـ أ ، حـ ء

«٤ سم ، ٨ سم»

---

**١٣** في الشكل المقابل :




الدائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب

حيث : أب ∩ حـ ء ∩ هـ و = {س}

، س ء = ٢ ء حـ ، هـ و = ١٠ سم ، ق ن (س) = ١٤٤

(١) **أثبت أن** : أب محور أساسي للدائرتين م ، ن

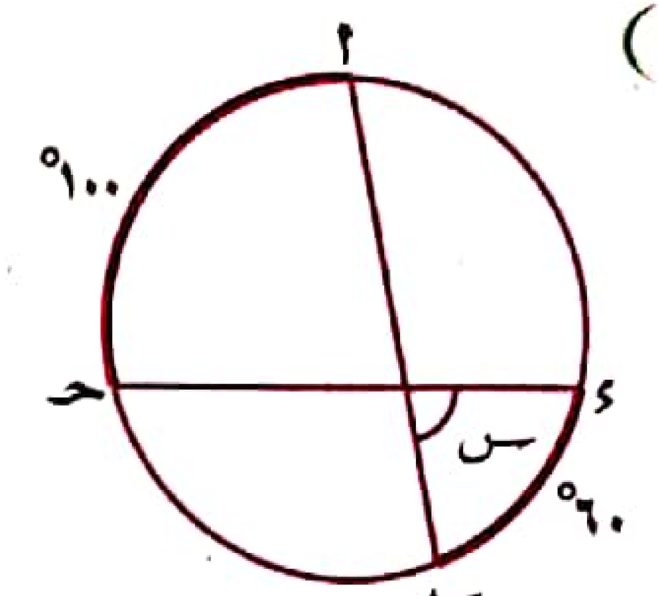
(٢) **أوجد** : طول كل من س حـ ، س و

(٣) **أثبت أن** : الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري.

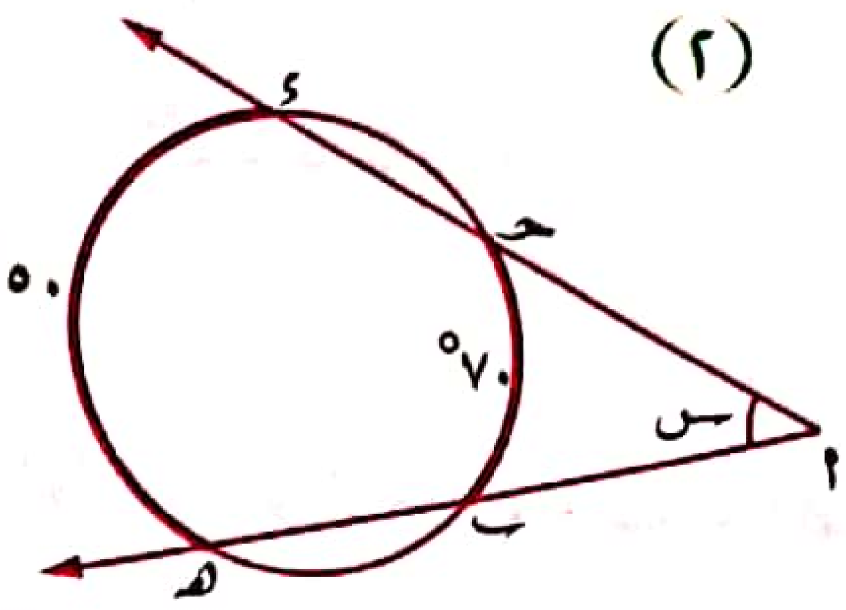
«٦√٦ سم ، ٨ سم»

**١٤** مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس :

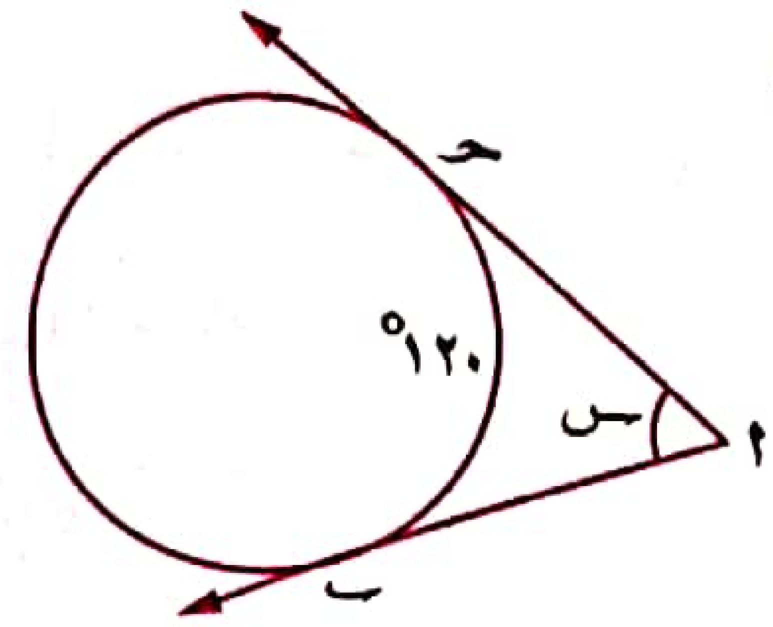
(١)



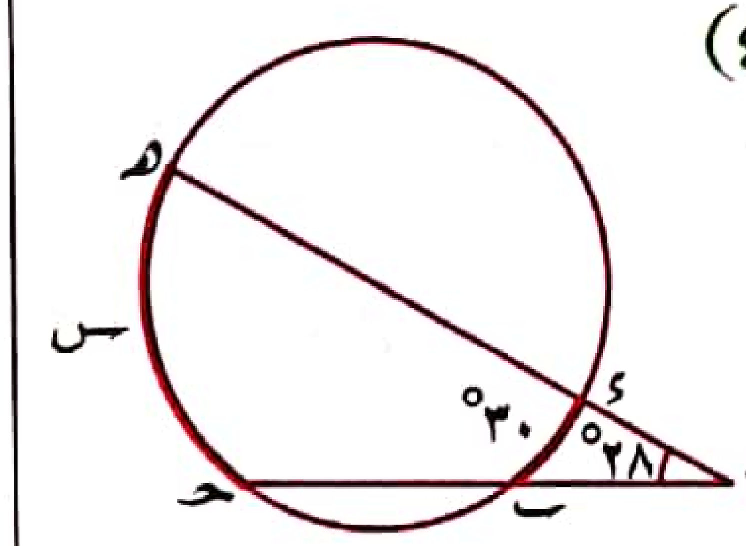

(٢)



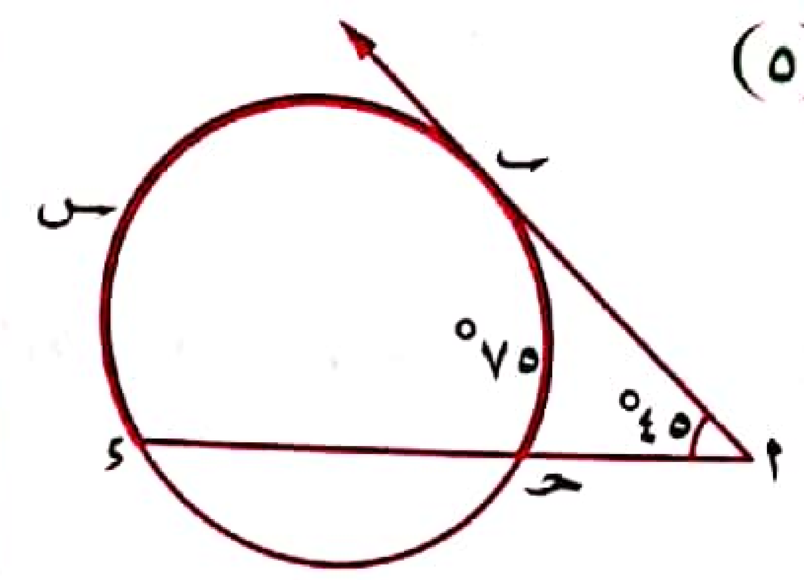

(٣)



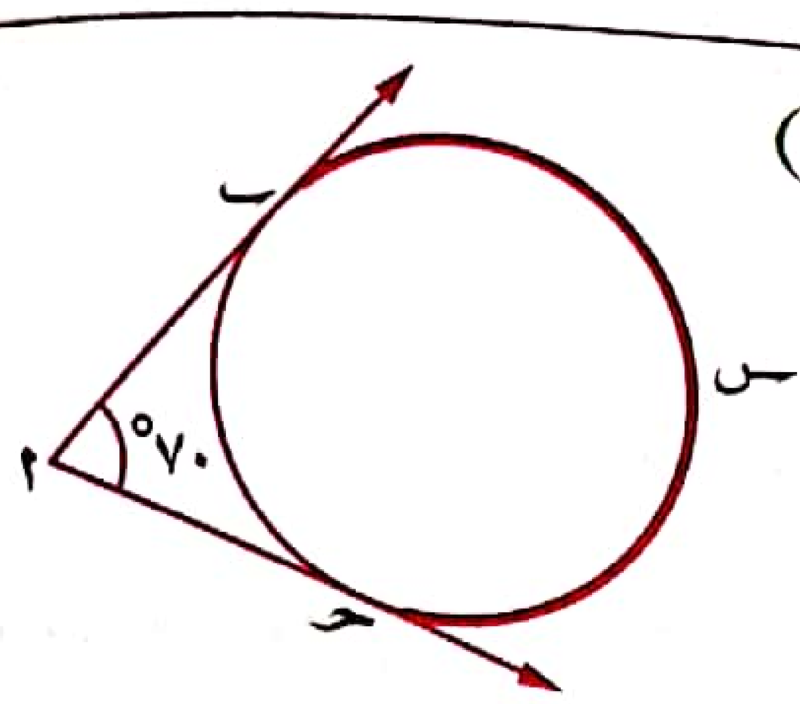

(٤)



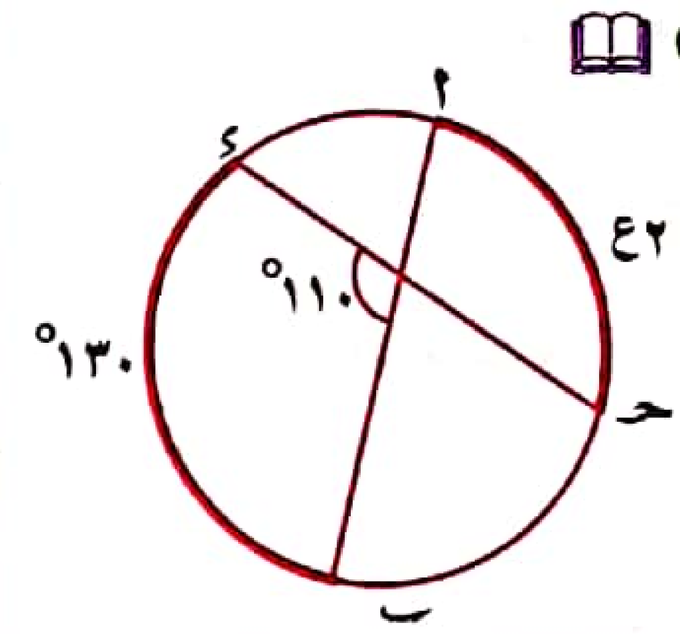

(٥)



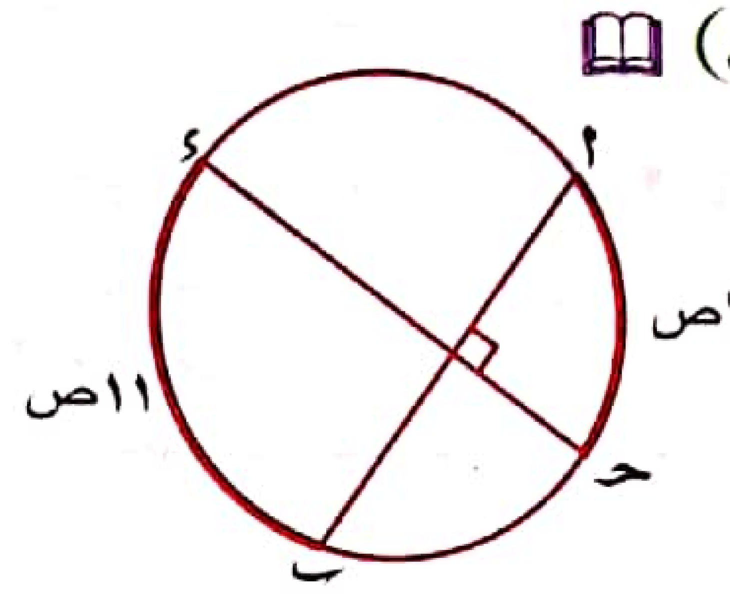

(٦)



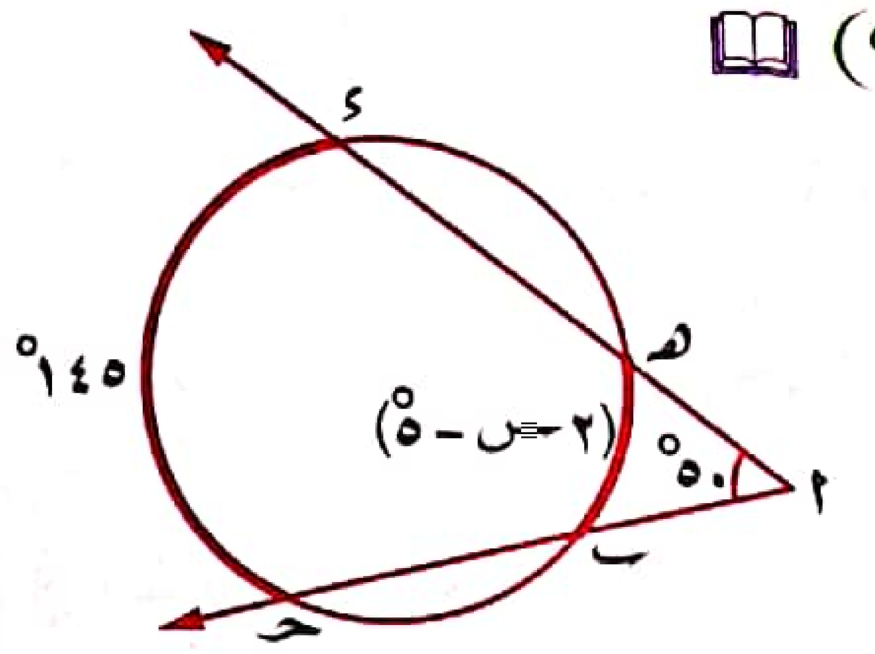

(٧)



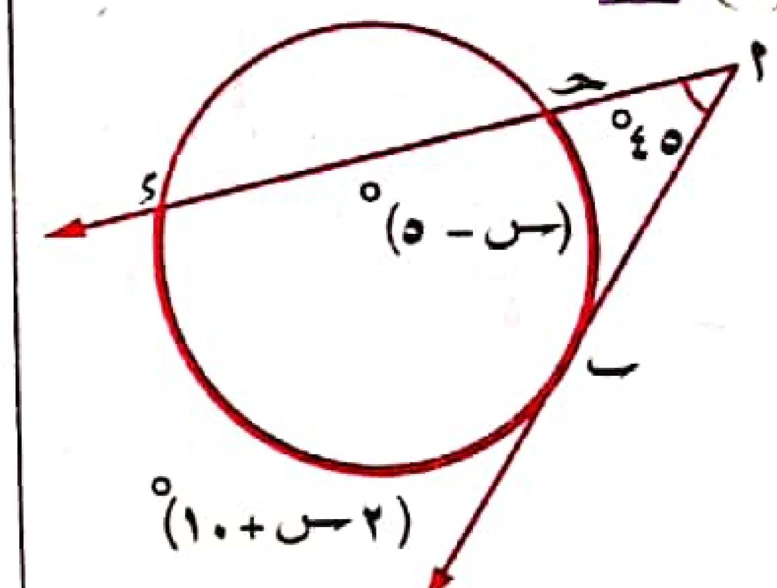

(٨)



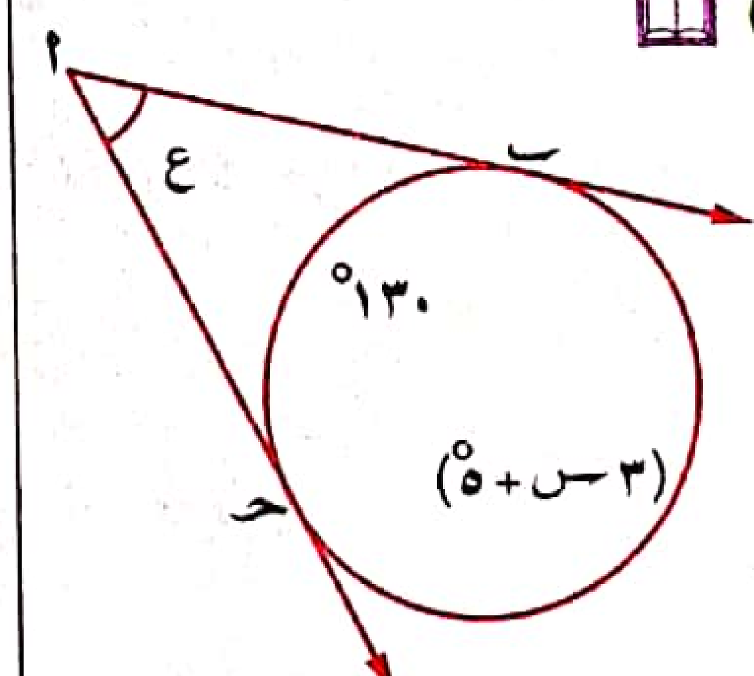

(٩)



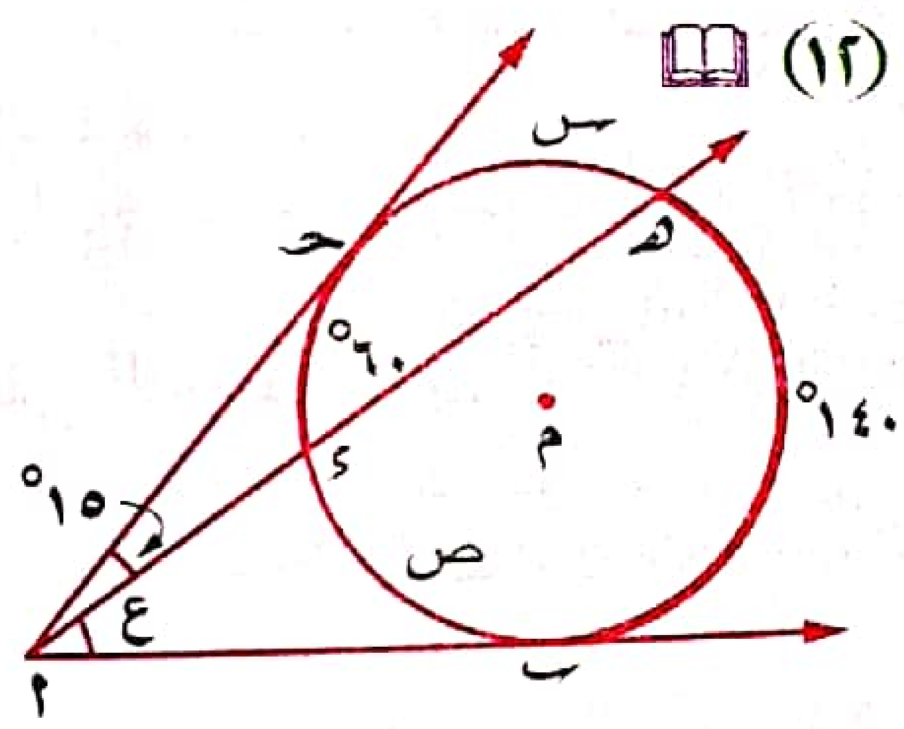

(١٠)



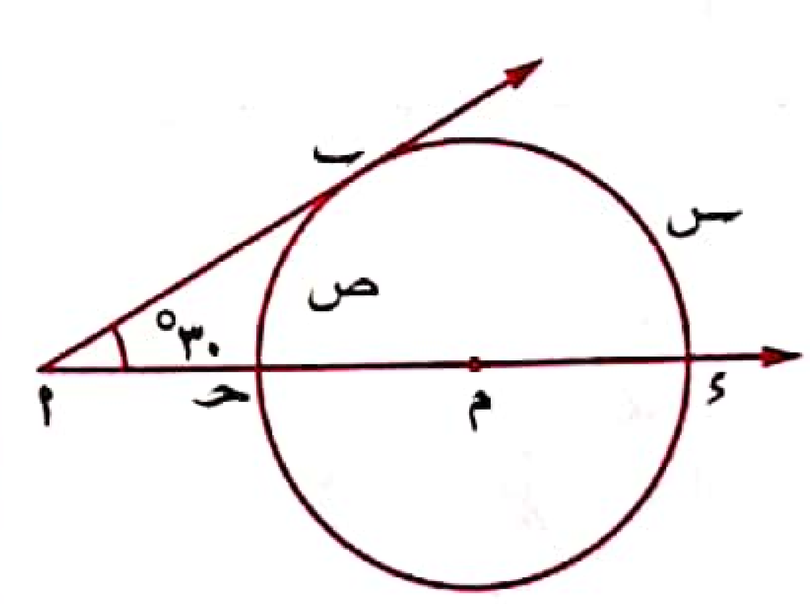

(١١)



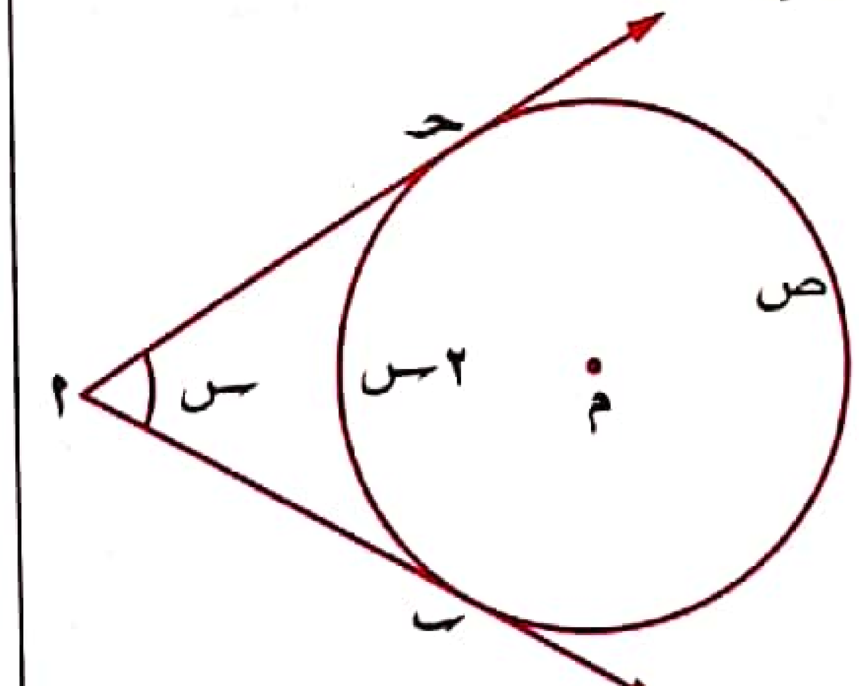

(١٢)



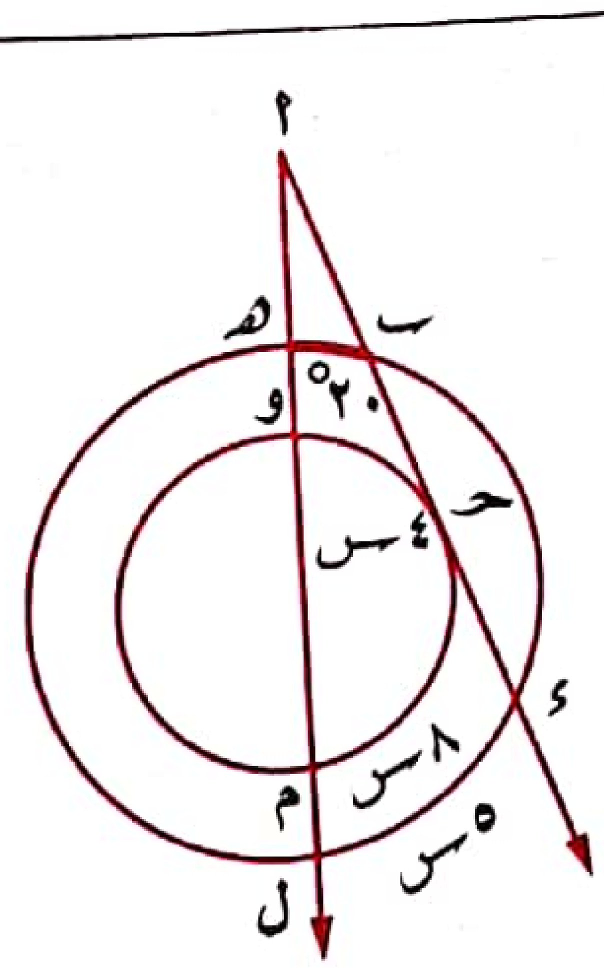

(١٣)



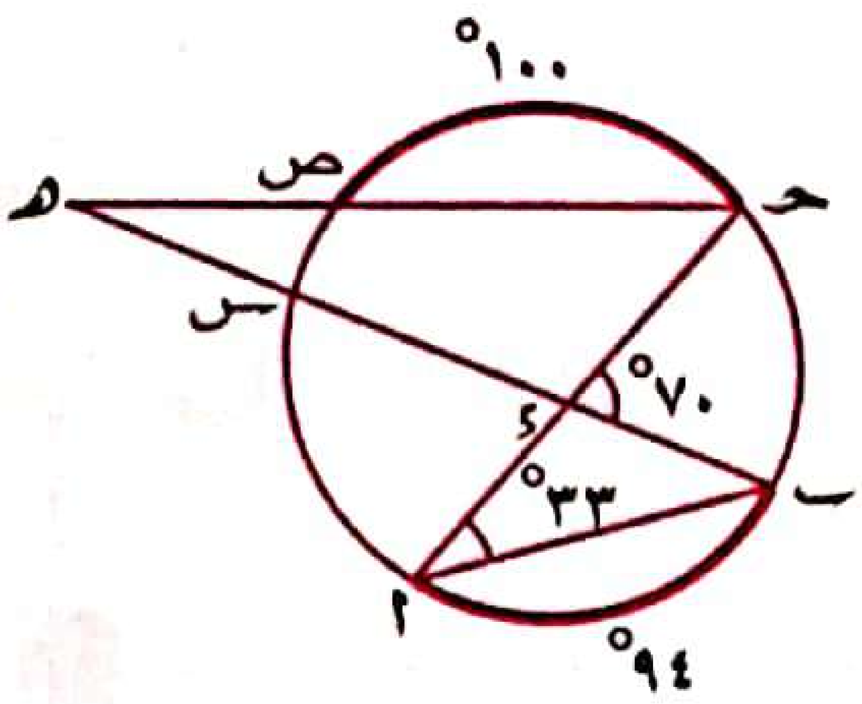

(١٤)




(١٥)



**١٥** في الشكل المقابل :




ق (∠ ب أ حـ) = ٣٣° ، ق (∠ ب ء حـ) = ٧٠°

، ق (⌒أ ب) = ٩٤° ، ق (⌒حـ ص) = ١٠٠°

أوجد قياس كل من :

(١) ⌒س ص

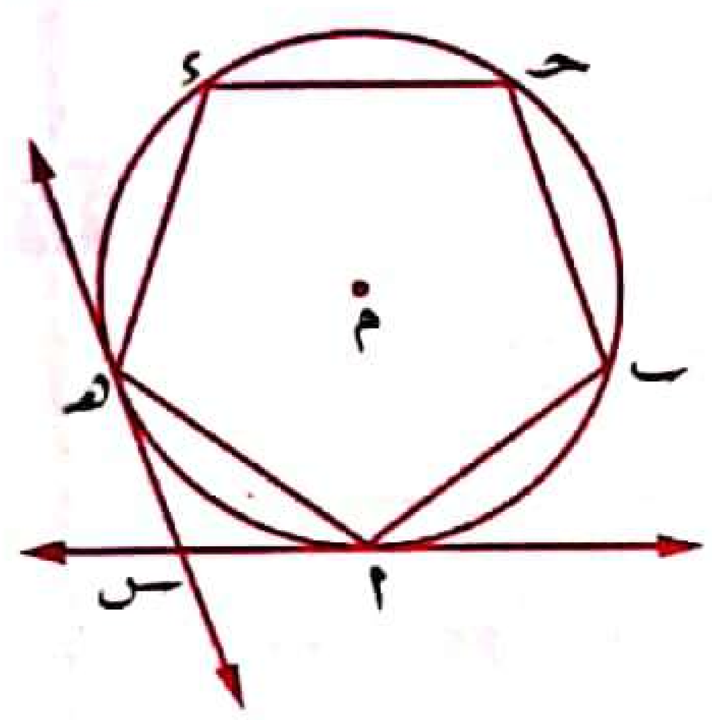
(٢) ⌒أ س

(٣) ∠ ب هـ حـ

«٢٦° ، ٧٤° ، ٢٠°»

---

**١٦** في الشكل المقابل :




أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م

، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ = {س}

أوجد : (١) ق (⌒أ هـ)

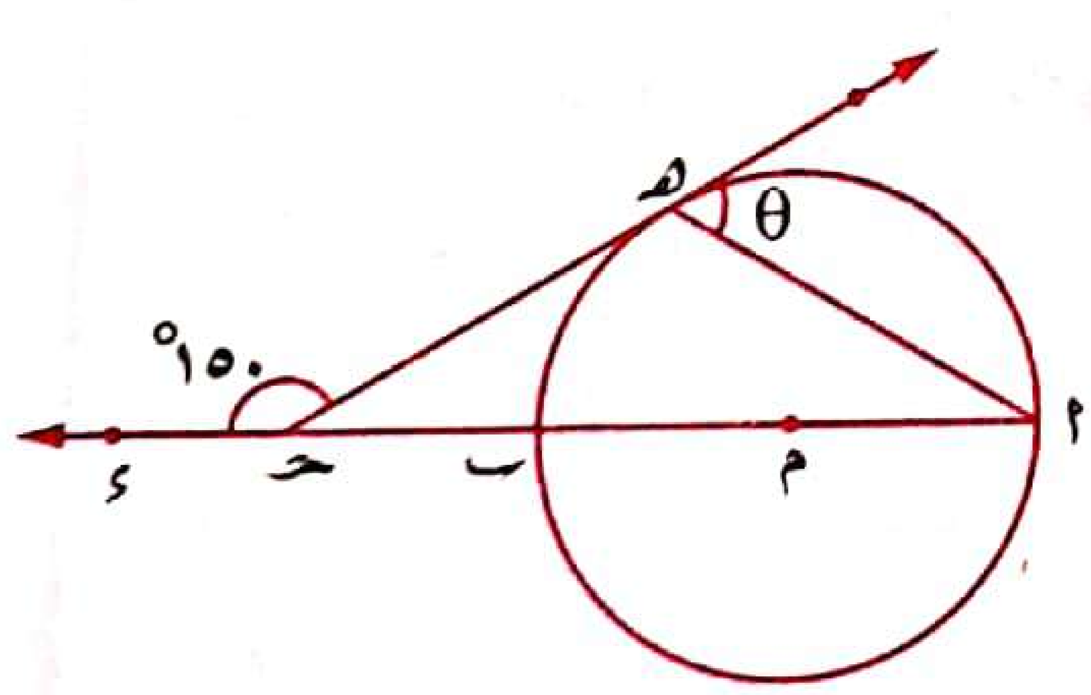
(٢) ق (∠ أ س هـ)

«٧٢° ، ١٠٨°»

## مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

**١٧** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

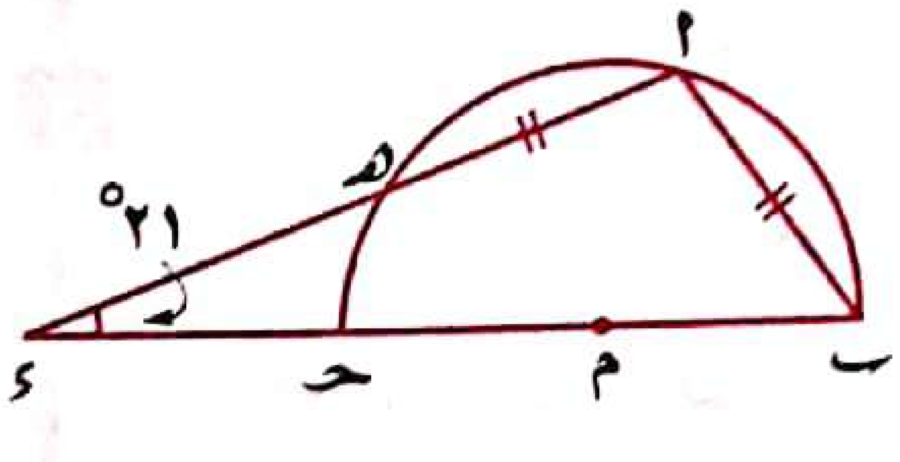



θ = ............... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٥٥ (د) ٦٠

(٢) في الشكل المقابل :




إذا كان : أ هـ = أ ب ، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطراً ، ق (∠ ء) = ٢١°

فإن : ق (∠ أ) = ............... °

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤ (جـ) ١٠٦ (د) ١١٠

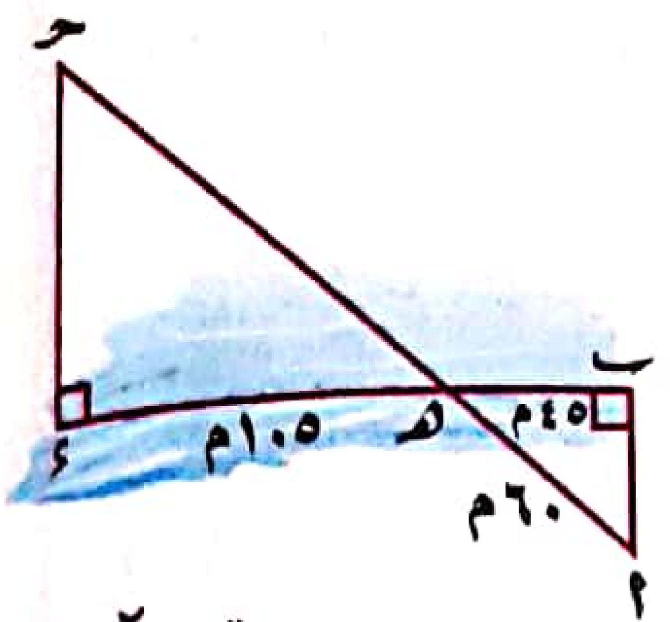
# تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

**١** 📖 لتحديد الموقع حـ ،

قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع حـ عن الموقع أ




«٢٠٠ متر»

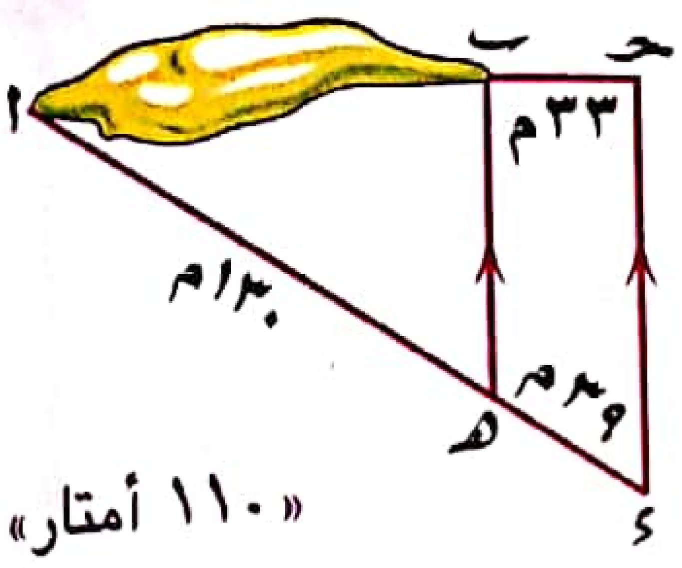
---

**٢** 📖 قام فريق مكافحة التلوث

بتحديد موقع بقعة زيت على أحد

الشواطئ كما فى الشكل المقابل.

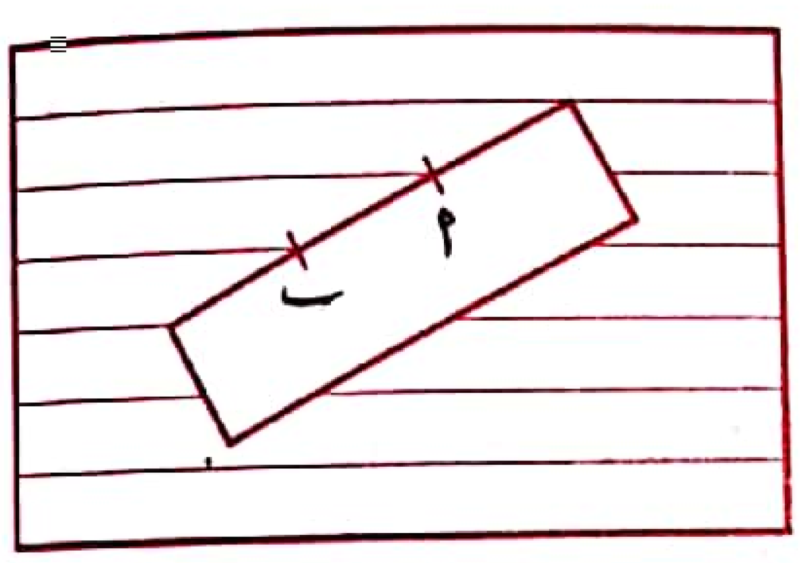
احسب طول بقعة الزيت.




«١١٠ أمتار»

---

**٣** 📖 أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعه على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ ، ب هل تقسيم يوسف للشريط صحيح ؟ فسر إجابتك. استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.




---

**٤** 📖 تنقل عبوات الأسمدة

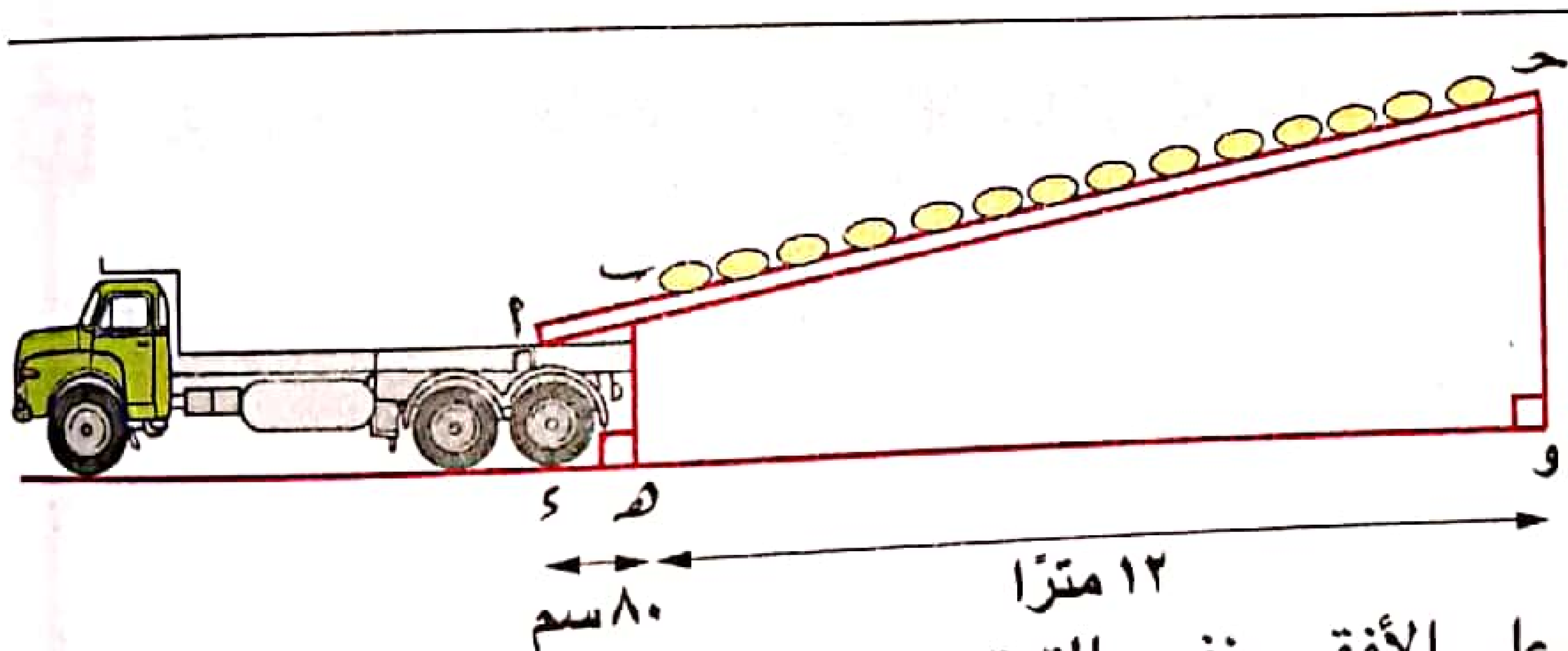
من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب

مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع

كما فى الشكل المقابل.

فإذا كانت ء ، هـ ، و مساقط النقط أ ، ب ، حـ على الأفقى بنفس الترتيب

، أب = ١,٢ م ، ء هـ = ٨٠ سم ، هـ و = ١٢ مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.




«١٩ مترًا»

---

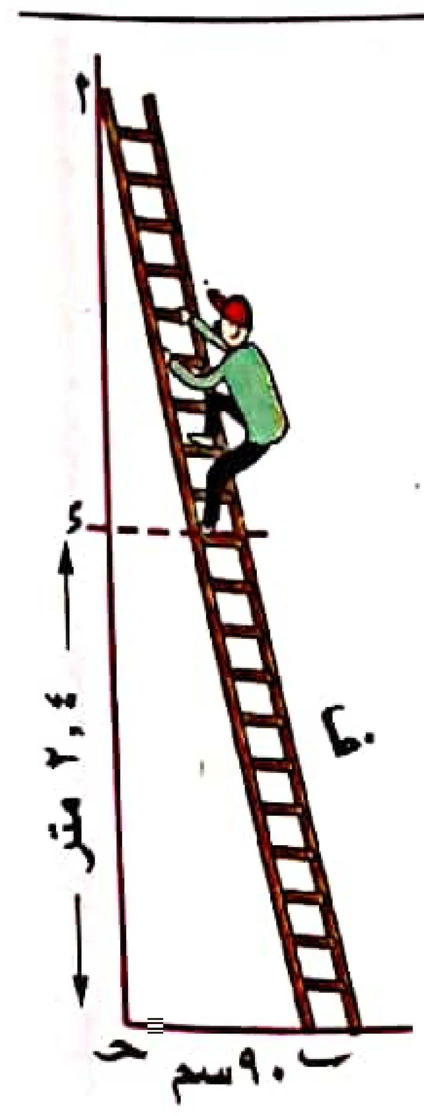
**٥** 📖 $\overline{أب}$ سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ

على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية

خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠ سم.

فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح

على ارتفاع ٢,٤ متر من الأرض.

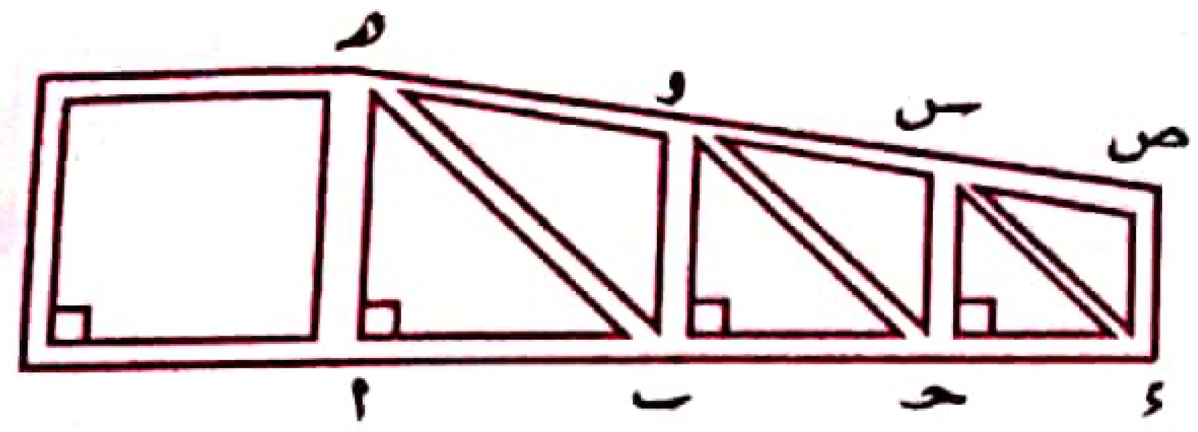



«٢,٤٦ مترًا»

٦ 🕮 إذا كان : أب = ١٨٠ سم ، هـ و = ٢ متر

، أب : ب حـ : حـ ء = ٥ : ٤ : ٣

أوجد : طول كل من $\overline{هـ ص}$ ، $\overline{حـ ء}$




«٤٨٠ سم ، ١٠٨ سم»

---

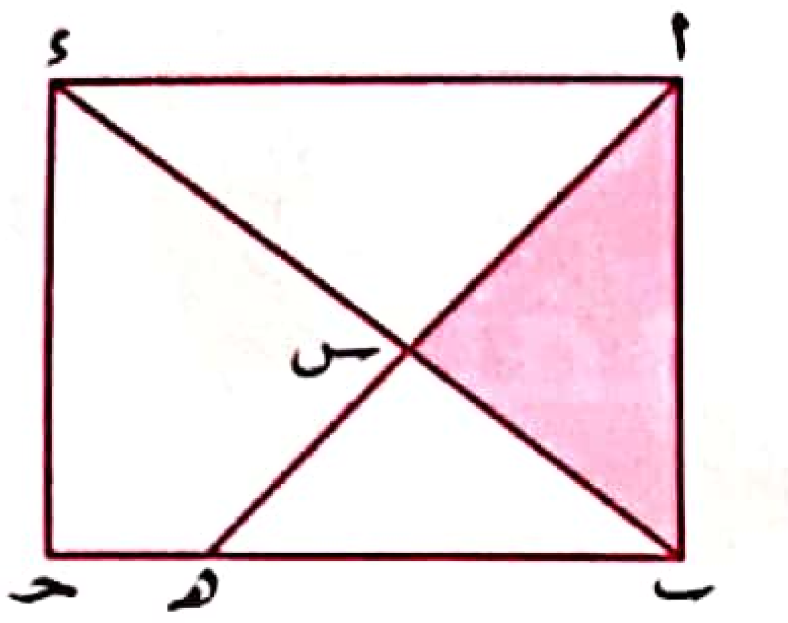
٧ 🕮 يبين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل

إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين $\overleftrightarrow{ب ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ،

حيث هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ ∩ $\overleftrightarrow{أ هـ}$ = {س}

فإذا كان : أب = ب هـ = ٤٢ مترًا ، أ ء = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أ ب س بالأمتار المربعة وطول $\overline{أ س}$




«٥٠٤ متر مربع ، ٢٤ $\sqrt{2}$ متر»

---

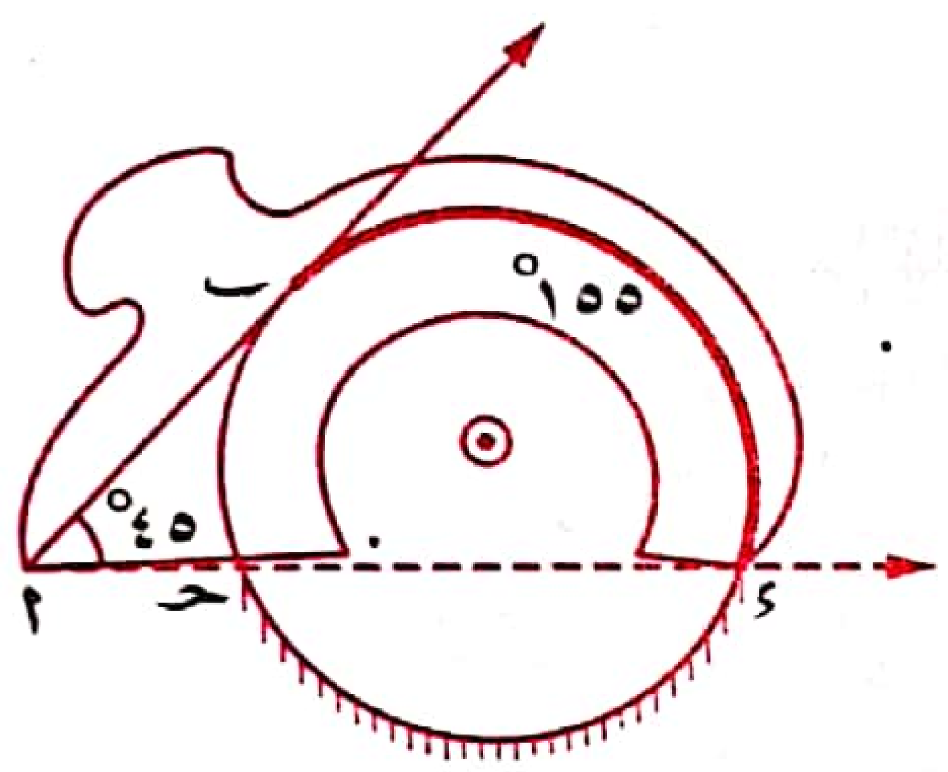
٨ 🕮 منشار دائرى لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته

١٠ سم ، يدور داخل حافظة حماية ،

فإذا كان : ق (∠ ب أ ء) = ٤٥° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٥٥°

أوجد طول قوس قرص المنشار

خارج حافظة الحماية.




«٢٤,٤ سم»

---

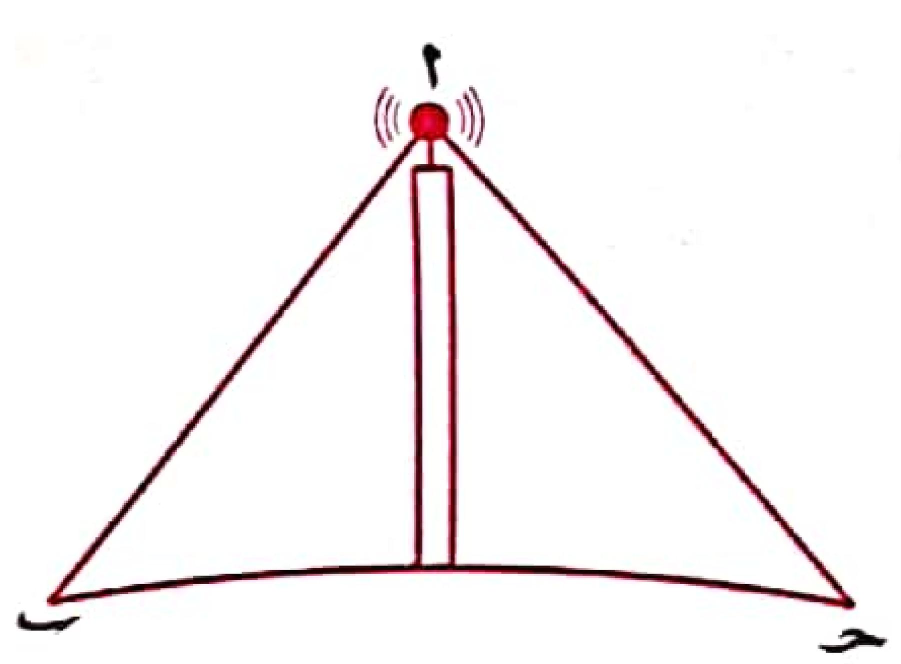
٩ 🕮 تتبع الإشارات التى تصدر عن برج الاتصالات فى مسارها شعاعًا

، نقطة بدايته على قمة البرج ، ويكون مماسًا لسطح الأرض ، كما

فى الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين بفرض أن

البرج يقع على مستوى سطح البحر

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٠°



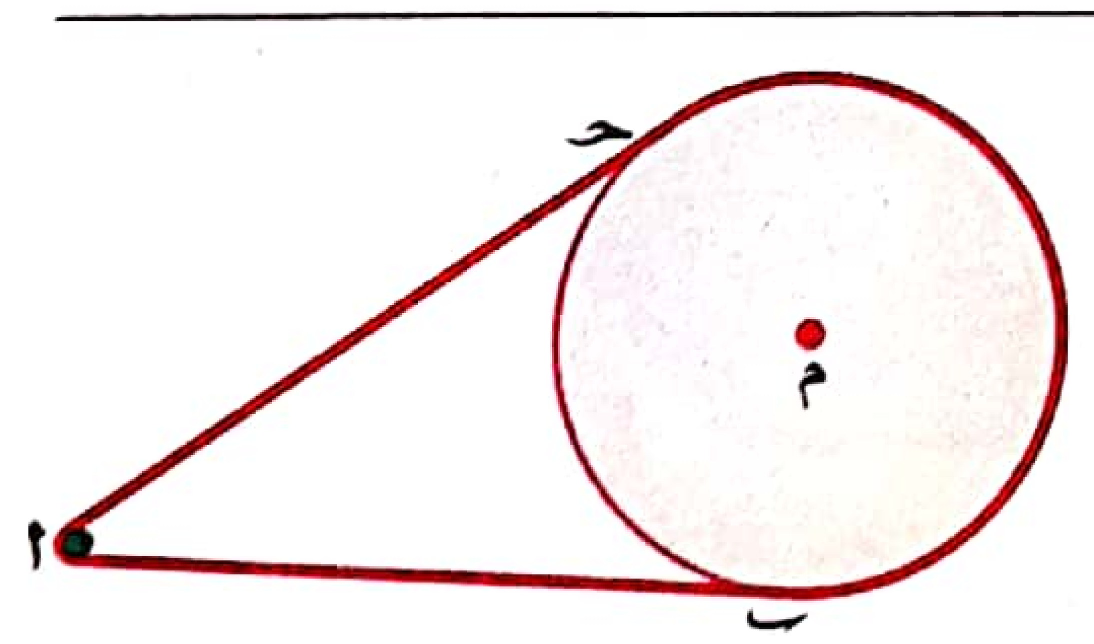

«١٠٠°»

---

١٠ 🕮 تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة

عند أ فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠° فأوجد طول

$\overset{\frown}{ب حـ}$ الأكبر ، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩ سم




«٣٤,٥٦ سم»

---

١١ 🕮 يدور قمر صناعى فى مدار، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء ،

وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°

فأوجد :

(١) قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.

(٢) طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

«١٢٦° ، ٦٣٧٨ كم»

# الرياضيات

## الجزء الخاص بالامتحانات

الفصل الدراسي الأول

- أختبارات تراكمية
- امتحانات نهائية

تقنية جديدة
امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR



المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

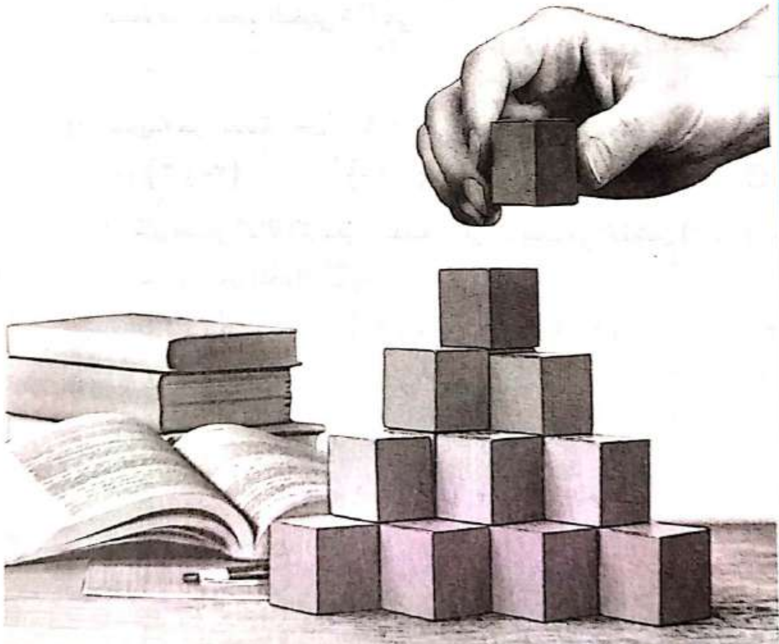
1
ثانوى
2020

# محتويات الكتاب

- الاختبارات التراكمية القصيرة
- امتحانات الكتاب المدرسي
- الامتحانات النهائية
- الإجابـات



# الاختبارات التراكمية القصيرة



الدرجة الكلية

١٠

## اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} =$ ...............

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٤ ت (د) −١٦

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٢}$ هى ...............

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ت (د) − ت

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ك هى ...............

(أ) {٣ ، −٣} (ب) {−٣ت} (جـ) {٣ ت ، −٣ ت} (د) ∅

(٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٣ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ...............

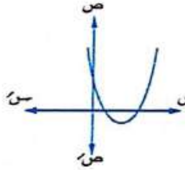
(أ) {٣ ، ٠} (ب) {−١ ، ٠} (جـ) {−٣ ، ١} (د) {٣ ، −١}

(٥) $١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ... + ت^{١٦} =$ ...............

(أ) ت (ب) ١ (جـ) ١٦ (د) ٤

(٦) الشكل المقابل يمثل المنحنى : $ص = أ س^٢ + ب س + جـ$

فأى مما يأتى صحيح ؟




(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠ (ب) أ < ٠ ، جـ > ٠

(جـ) أ > ٠ ، جـ < ٠ (د) أ < ٠ ، جـ < ٠

**السؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٢ س + ٤ = ٠$

(ب) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان أن : $س + ت ص = \frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٢ ت}$

الدرجة الكلية
......
١٠

# اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان جذرا المعادلة : ٤ س$^{٢}$ − ١٢ س + حـ = ٠ متساويين فإن : حـ = ..............

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

(٢) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − أ س − ٢ = ٠ فإن : أ = ..............

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٣ (د) −٣

(٣) إذا كان : أ = ١ + $\sqrt{٢}$ ت ، ب = ١ − $\sqrt{٢}$ ت فإن : أ ب = ..............

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٦ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : ك ∈ ..............

(أ) ]−∞ ، ٩[ (ب) ]٩ ، ∞[ (جـ) ]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ مركبان مترافقان فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ > ٠ (ب) ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = ٠

(جـ) ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ < ٠ (د) ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ ≥ ٠

(٦) (٢ + ٢ ت)$^{٢٠}$ = ..............

(أ) ٢$^{٢٠}$ (ب) ٢$^{٣٠}$ (جـ) ٢$^{٣٠}$ ت (د) −٢$^{٣٠}$

**السؤال الثانى** **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

**(أ) أثبت أن جذرى المعادلة : ٣ س$^{٢}$ − ٤ س + ٥ = ٠ غير حقيقيين**

**ثم أوجد : مجموعة حل المعادلة فى ك**

**(ب) أوجد قيم ك التى تجعل للمعادلة : ك س$^{٢}$ − ٤ س + ٤ = ٠**

**جذرين مركبين وغير حقيقيين.**

الدرجة الكلية
١٠

# اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م - ٣) س + ٥ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر فإن : م = ..............

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٣١}$ هى ..............

(أ) ت (ب) − ت (جـ) ١ (د) −١

(٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ٢ س + ٥ = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ..............

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ك = ٠$ حقيقيين فإن : ك ∈ ..............

(أ) [٤ ، ∞[ (ب) ]٤ ، ∞[ (جـ) ]−∞ ، ٤] (د) ]−∞ ، ٤[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س - جـ =$ صفر مختلفى الأشارة فإن : ..............

(أ) ب = صفر (ب) جـ > ٠ (جـ) $\frac{جـ}{أ} > ٠$ (د) $\frac{جـ}{أ} < ٠$

(٦) إذا كان : $(١ + ت^٨)(١ - ت^{١١}) = س + ت ص$ فإن : س + ص = ..............

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

**السؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س + ٢ + \frac{١}{م} = ٠$ متساويين **فأوجد : قيمة م**

(ب) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ٣ س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر.

الدرجة الكلية

١٠

# اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٤ س = -٤$ فى ح هى ..............

(أ) {−٢} (ب) {٢} (جـ) {−٢ ، ٢} (د) ∅

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها : ت ، − ت هى ..............

(أ) $س^٢ - ١ = ٠$ (ب) $س^٢ + ١ = ٠$

(جـ) $(س + ١)^٢ = ٠$ (د) $(س - ١)^٢ = ٠$

(٣) يكون جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢ س + ك = ٠$ حقيقيين مختلفين إذا كان : ..............

(أ) ك = ١ (ب) ك < ١ (جـ) ك > ١ (د) ك = ٤

(٤) أبسط صورة للمقدار : $(١ - ت)^٤$ هى ..............

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) −٤ ت (د) ٤ ت

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ + ب س + حـ = ٠$ عددان فرديان متتاليان فإن : $ب^٢ - ٤ حـ =$ ..............

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) حاصل ضرب جذور المعادلات : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ ، $ب س^٢ + حـ س + أ = ٠$ ، $حـ س^٢ + أ س + ب = ٠$ يساوى ..............

(أ) أ ب حـ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

**السؤال الثانى** **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + ٢ س + ٣ = ٠$

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$

(ب) أوجد فى أبسط صورة المقدار : $(٣ - ٢ ت)^٢ (٣ + ٢ ت)$

الدرجة الكلية

......

١٠

# اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : [−٢ ، ٤] ⟵ ح ، د (س) = ٤ − ٢ س تكون إشارتها سالبة فى الفترة ..............

(أ) [−٢ ، ٠[ (ب) ]٠ ، ٤] (جـ) [٢ ، ٤] (د) ]٢ ، ٤]

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : $س^2$ − ٦ س + ك = ٠ متساويين فإن : ك = ..............

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ١٢

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها (١ + ت) ، (١ − ت) هى ..............

(أ) $س^2$ − ٢ س + ٢ = ٠ (ب) $س^2$ + ٢ س − ٢ = ٠

(جـ) $س^2$ + ٢ س + ٢ = ٠ (د) $س^2$ − ٢ س − ٢ = ٠

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^2$ − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^2$ − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٢

(٥) إذا كانت د : د (س) = أ $س^2$ + ب س + جـ موجبة لجميع قيم س الحقيقية فإن ..............

(أ) $ب^2$ − ٤ أ جـ > ٠ (ب) $ب^2$ − ٤ أ جـ < ٠

(جـ) $ب^2$ − ٤ أ جـ = ٠ (د) $ب^2$ − ٤ أ جـ ≥ ٠

(٦) أي مما يأتى تحليل للمقدار ($س^2$ + ٩) ؟

(أ) (س − ٣) (س + ٣) (ب) $(س + ٣)^2$

(جـ) $(س − ٣ ت)^2$ (د) (س − ٣ ت) (س + ٣ ت)

**السؤال الثانى** ٤ درجات (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

عيِّن إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) = (س − ١) (س + ٢) (٢) د (س) = − $س^2$ + ٩

الدرجة الكلية

١٠

## اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السـؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الدالة د : د (س) = −٣ تكون سالبة فى ...............

(أ) ]−∞ ، −٣[ (ب) ]−٣ ، ٣[ (جـ) ]−∞ ، ∞[ (د) ]−∞ ، ٠[

(٢) مجموعة الحل للمتباينة : س (س − ٢) ≤ ٠ فى ح هى ...............

(أ) {٠ ، ٢} (ب) [٠ ، ٢] (جـ) ح − [٠ ، ٢] (د) ح − ]٠ ، ٢[

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^٥٢ هى ...............

(أ) ت (ب) − ت (جـ) ١ (د) −١

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س^٢ + ٤ س + ٧ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : أ = ...............

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) −٧

(٥) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة (س − ٥) (٣ س − ٤) ≤ ٠

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ٩

(٦) أى مما يأتى عدد تخيلى ؟

(أ) π (ب) ٥ − ت (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) ت^٢

**السـؤال الثانى** **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان : ١ + ت أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٢ س + حـ = ٠ حيث حـ ∈ ح

**فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد : قيمة حـ**

(ب) ابحث إشارة الدالة د : د (س) = ٢ س^٢ + ٧ س − ١٥

**ومن ذلك استنتج مجموعة حل المتباينة : ٢ س^٢ + ٧ س ≥ ١٥**

الدرجة الكلية
١٠

## اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

### أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها ٥٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ..............

(أ) ١٣٠° (ب) ٣١٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٤١٠°

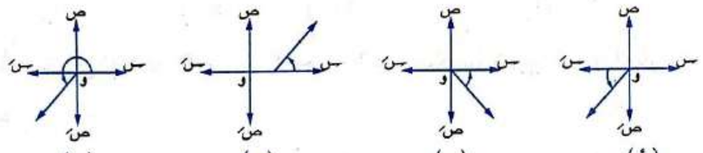
(٢) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ..............

(أ) -٢١٠° (ب) ١٢٠° (جـ) -١٢٠° (د) ٨٥٠°

(٣) الزاوية التى قياسها (-٧٥٠°) تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) جميع الزوايا الموجهة التالية ليست فى وضعها القياسى ما عدا ..............




(أ) (ب) (جـ) (د)

(٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (-١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ..............

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) الربع الثالث. (د) غير ذلك.

(٦) إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين فإن : -أ ، -ب يكونا ..............

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين. (جـ) متتامتين. (د) مجموعهما -٣٦٠°

**السؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

**(أ) عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :**

(١) -٥٢° (٢) ٢٢٠° (٣) ١١٢٠° ١٥َ

**(ب) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :**

(١) -١٣٢° (٢) ٧٠° (٣) -٧٣٠°

الدرجة الكلية

١٠

# اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السـؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع ...............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) القياس الستينى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتقابل قوسًا طوله ٣ π سم يساوى ...............

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣) الزاوية التى قياسها −٣,٧ ^ء تكافئ الزاوية التى قياسها الستينى ...............

(أ) ٣٢ً ١٥َ ٥٨° (ب) ٢٧ً ٤٤َ ٣٠١° (جـ) −٣٢ً ١٥َ ٢٣٣° (د) ٢٧ً ٤٤َ ٢١١°

(٤) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ سم فى دائرة طول قطرها ٤ سم يساوى ...............

(أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ء}$ (ب) $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ء}$ (جـ) ٥^ء (د) ٦^ء

(٥) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ...............

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٦) إذا كان : أ ، − أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ...............

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

**السـؤال الثانى** **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠° أوجد : ق (∠ حـ) بالتقدير الدائرى.

الدرجة الكلية

١٠

# اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السـؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٥ سم من دائرة طول قطرها ١٠ سم يساوى ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ ^ء (ب) ١^ء (جـ) ٢^ء (د) π^ء

(٢) قياس أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (-٨٧٠°) هو ...............

(أ) ٢١٠° (ب) ١٥٠° (جـ) -٢١٠° (د) ١٢٠°

(٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة مرسومة فى الوضع القياسى بحيث : جا θ < ٠

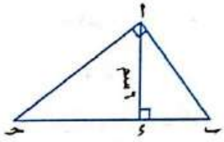
ففى أى ربع يقع الضلع النهائى لهذه الزاوية ؟

(أ) الأول. (ب) الأول والثانى. (جـ) الثانى والثالث. (د) الثالث والرابع.

(٤) إذا كان : قا θ = ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...............

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٥) فى الشكل المقابل :




إذا كان : ظا ب + ظا جـ = $\frac{٥}{٢}$

فإن : ب جـ = ............... سم.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{١}{١٠}$ π فإن طول قوسه ≃ ............... سم.

(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

**السـؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

٣ جا ٣٠° جا^٢ ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا^٢ ٤٥°

(ب) إذا كان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، θ ∈ ]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

## اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية ١٠

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السؤال الأول** ٦ درجات (كل جزئية درجة)

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) أبسط صورة للمقدار : ظا (١٨٠° + $\theta$) + ظتا (٢٧٠° − $\theta$) هى ..............

(أ) ٠ (ب) ٢ ظا $\theta$ (جـ) ٢ ظتا $\theta$ (د) ٢

(٢) إذا كان : جا $\theta$ > ٠ ، ظا $\theta$ < ٠ فإن : $\theta$ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) إذا كانت $\theta$ زاوية حادة وكان : جتا ($\theta$ + ٢٥°) = جا ٣٠° فإن : $\theta$ = ..............

(أ) ٥° (ب) ٢٠° (جـ) ٢٥° (د) ٣٥°

(٤) القياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ $\pi$ سم من دائرة طول نصف قطرها ٤ سم هو ..............

(أ) $\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)^{ء}$ (ب) ٤٥° (جـ) ١٣٥° (د) ٢٧٠°

(٥) جتا ١° × جتا ٢° × جتا ٣° × ... × جتا ١٠٠° = ..............

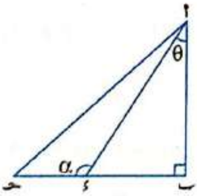
(أ) جا ١° × جا ٢° × جا ٣° × جا ٤° × ... × جا ١٠٠°

(ب) ١

(جـ) ١° × ٢° × ٣° × ٤° × ... × ١٠٠°

(د) صفر

(٦) فى الشكل المقابل :



$\Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ظا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$

فإن : جتا $\alpha$ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) − $\frac{٣}{٤}$ (جـ) − $\frac{٤}{٥}$ (د) − $\frac{٣}{٥}$

**السؤال الثانى** ٤ درجات ((أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة)

(أ) إذا كان الضلع النهائى لزاوية $\theta$ مرسومة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{٥}$) فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

جتا (١٨٠° − $\theta$) ظتا (٩٠° − $\theta$) + جا (١٨٠° − $\theta$) ظا (− $\theta$)

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة : قتا (٢ $\theta$ − ١٥°) = قا ($\theta$ − ٣٠°)

ثم أوجد : جميع قيم $\theta$ حيث $\theta$ ∈ ]٠° ، ٩٠°[ التى تحقق المعادلة.

الدرجة الكلية
١٠

# اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) القيمة العظمى للدالة د : د (θ) = ٤ جا ٢ θ هى ..............

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢) الزاوية التى قياسها ٦٢٠° تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى قياسها ١٢٠° بدلالة π هو ..............

(أ) $\frac{١}{٣}$ π (ب) $\frac{٢}{٣}$ π (جـ) $\frac{٣}{٢}$ π (د) $\frac{١}{٢}$ π

(٤) إذا كانت : جا θ = جتا ٢ θ حيث θ ∈ ]٠° ، ٩٠°[ فإن : جا ٣ θ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) الدالة د : د (θ) = ٣ جتا ٢ θ دالة دورية ودورتها تساوى ..............

(أ) ٢ π (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) ٦ π (د) π

(٦) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ..............

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

**السؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

**(أ) أوجد الحل العام للمعادلة : ظا ٤ θ = ظتا ٢ θ**

(ب) إذا كانت الدالة د : د (θ) = جتا θ أوجد :

(١) مجالها. (٢) مداها. (٣) دورتها.

الدرجة الكلية

......

١٠

# اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثانية

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ٢ حتا θ = − $\sqrt{٢}$ فإن قياس أقل زاوية موجبة تحقق ذلك هى ..............

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٢) أبسط صورة للمقدار : طا (٣٦٠° − θ) + ظتا (٢٧٠° − θ) هى ..............

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٢ طا θ (د) ٢ ظتا θ

(٣) قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٦ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ٩ سم بالدرجات يساوى ..............

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين ؟

(أ) ٥٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٠٠°

(٥) حتا (طا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٤}$)) = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) جا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٤}$)

(٦) إذا كان : جا$^{٢}$ θ = $\frac{١}{٢}$ فأى مما يأتى لا يصلح قيمة تقريبية لـ θ ؟

(أ) ٥١,٨° ، ١٥ ، ٢١٥° (ب) −٥١,٨° ، ١٥ ، ٣٥°

(جـ) ٥٠,٣° ، ٣٠ ، ٧٠° (د) ٨,٢° ، ٤٤ ، ١٤٤°

**السؤال الثانى** ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد بالقياس الستينى قيمة θ التى تحقق أن : حتا θ = −٠,٦٤٢

(ب) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) فأوجد : قيمة θ

الدرجة الكلية ١٠

## اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السؤال الأول** ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ فإذا كان محيط الأصغر ١٤ سم فإن محيط الأكبر .............. سم

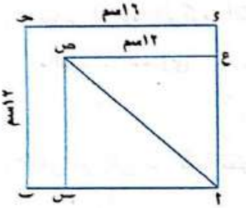
(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ١٥ (د) ٢١

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ س ص ع

، ء حـ = ١٦ سم ، ب حـ = ع ص = ١٢ سم

فإن : أ ص = .............. سم




(أ) ٢٠ (ب) ٩

(جـ) ١٥ (د) ١٨

(٣) مثلثان متشابهان فيهما $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ع س}}$ فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) ∆ أ ب حـ ~ ∆ س ص ع (ب) ق (∠ حـ) = ق (∠ ع)

(جـ) ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ س ص ع) (د) ∆ أ ب حـ ~ ∆ ص س ع

(٤) أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) كل المضلعات المنتظمة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(جـ) كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(٥) إذا كان : ∆ ل م ن ~ ∆ س ص ع وكان ق (∠ ل) = ٣٥° ، ق (∠ ع) = ٧٥°

فإن : ق (∠ م) = ..............

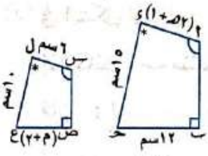
(أ) ١١٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٧٥° (د) ٧٠°

(٦) إذا كان ك هو معامل تشابه مضلعين $م_1$ إلى $م_2$ حيث المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$ فإن ...............

(أ) ك > ٠ (ب) ك = ١ (جـ) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

**السؤال الثانى** **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :




المضلع أب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

(١) أوجد معامل تشابه المضلع أب جـ د للمضلع س ص ع ل

(٢) أوجد قيمة كل من : م ، هـ

الدرجة الكلية ١٠

# اختبار 2 على درس 2 من الوحدة الثالثة

## أجب عن الأسئلة الآتية :

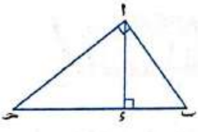
**السؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢ سم ، ٨ سم ومحيط الثانى ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثانى = ...............

(أ) ١٢ سم (ب) ١٨ سم (جـ) ٢٤ سم (د) ١٦ سم

(٢) فى الشكل المقابل :

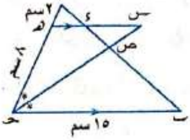



أى العبارات التالية غير صحيحة ؟

(أ) $(أب)^2$ = ب د × د جـ (ب) $(أجـ)^2$ = جـ د × جـ ب

(جـ) $(أد)^2$ = ب د × د جـ (د) أب × أجـ = ب جـ × أد

(٣) فى الشكل المقابل :



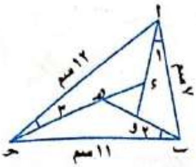

إذا كان : $\overleftrightarrow{جـ س}$ ينصف ∠ أجـ ب ، $\overleftrightarrow{س د}$ // $\overline{ب جـ}$

فإن : س د = ............... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٤) فى الشكل المقابل :



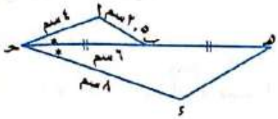

إذا كان : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

فإن : ء هـ : هـ و : و ء = ............ : ............ : ............

(أ) ٧ : ١١ : ١٢  (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١  (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٥) فى الشكل المقابل :

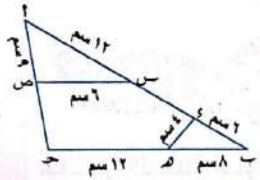



إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ............ سم.

(أ) ٤  (ب) ٥  (جـ) ٦  (د) ٧

(٦) فى الشكل المقابل :



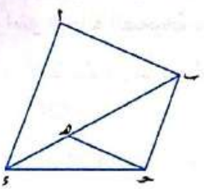

ص حـ = ............ سم.

(أ) ٩  (ب) ١٠

(جـ) ١١  (د) ١٢

**السؤال الثانى** ٤ درجات (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث :

$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{حـ ب}}$

أثبت أن : (١) $\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$  (٢) $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

الدرجة الكلية ............ ١٠

## اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

### أجب عن الأسئلة الآتية :

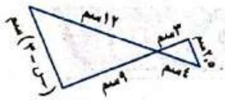
**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتيهما ............

(أ) ٤ : ٩  (ب) ٢ : ٣  (جـ) ١٦ : ٨١  (د) ٨ : ١٨

(٢) فى الشكل المقابل :

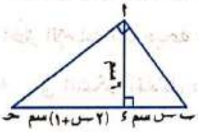


س = ..............

(أ) $\frac{١٥}{٢}$ (ب) ٢٧

(جـ) ١٤ (د) $١٠\frac{١}{٢}$

(٣) فى الشكل المقابل :

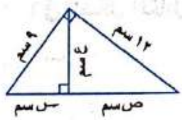


س = ..............

(أ) ٤,٥ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٣٦

(٤) فى الشكل المقابل :

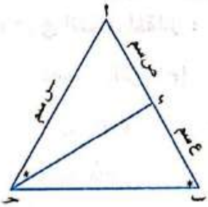


س + ص + ع = ..............

(أ) ١٥ (ب) ١٨,٢

(جـ) ٢٢ (د) ٢٢,٢

(٥) فى الشكل المقابل :



$س^{٢} - ص^{٢}$ = ..............

(أ) $(س - ص)^{٢}$ − ٢ س ص (ب) $ع^{٢}$

(جـ) ع ص (د) صفر

(٦) إذا كان Δ س ص ع ~ Δ أ ب جـ ، مـ(Δ س ص ع) = ٣ مـ(Δ أ ب جـ)

وكان : س ص = ٣ سم فإن : أ ب = ..............

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) ٣

**السؤال الثانى** **٤ درجات**

أ ب جـ ء ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ن منتصف $\overline{ص ع}$

وكان : أ م = ٤ سم ، س ن = ٩ سم

فأثبت أن : مساحة المضلع أ ب جـ ء : مساحة المضلع س ص ع ل = ١٦ : ٨١

الدرجة الكلية

١٠

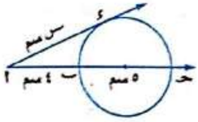
# اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

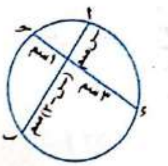
(١) فى الشكل المقابل :




س = ...............

(أ) ٢ $\sqrt{٥}$  (ب) ٣٦  (جـ) ٢٠  (د) ٦

(٢) فى الشكل المقابل :

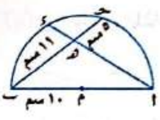


س = ...............

(أ) ٥  (ب) ٢

(جـ) ٣  (د) ٧

(٣) فى الشكل المقابل :




نصف دائرة (م)

فإن : هـ ء = ............... سم.

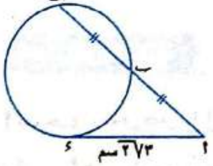
(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$  (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$  (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$  (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(٤) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ...............

(أ) متطابقان.  (ب) متساويان فى المساحة.

(جـ) متساويان فى المحيط.  (د) متشابهان.

(٥) فى الشكل المقابل :



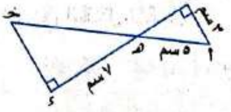

$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة

فإن : أجـ = ............... سم.

(أ) $\sqrt{٣}$  (ب) ٣

(جـ) ١٨  (د) ٦

(٦) فى الشكل المقابل :




$\frac{م(\triangle أ ب هـ)}{م(\triangle حـ ء هـ)}$ = ..............

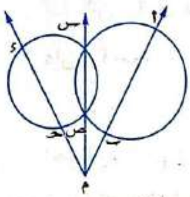
(أ) $\frac{٩}{٤٩}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٦}{٤٩}$

**السؤال الثانى** **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

**(أ)** أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{ب حـ}$

، ص منتصف $\overline{هـ و}$ **أثبت أن :** $\triangle$ أ ب س ~ $\triangle$ ء هـ ص

**(ب)** فى الشكل المقابل :




**أثبت أن :**

النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

الدرجة الكلية

..........

١٠

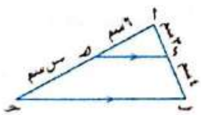
# اختبار 5 حتى درس 1 من الوحدة الرابعة

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) فى الشكل المقابل :

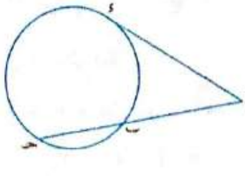



إذا كان : $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$

فإن : س = ..............

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٢) فى الشكل المقابل :

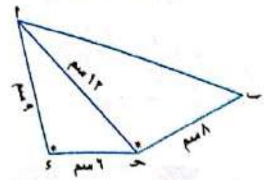



إذا كان : $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماسًا للدائرة فإن : $(أ ء)^2$ = ..............

(أ) أ ب × ب حـ (ب) أ حـ × أ ب

(جـ) أ ء × أ ب (د) $(أ حـ)^2$

(٣) في الشكل المقابل :



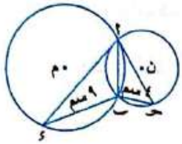

إذا كان : ق (∠ أ ء حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

فإن : أ ب = .............. سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٤) في الشكل المقابل :



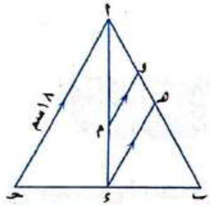

إذا كان : $\overline{\text{أ حـ}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة ن عند أ

فإن : أ ب = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٧

(٥) في الشكل المقابل :



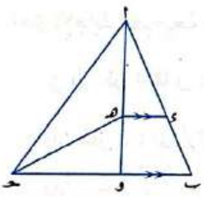

إذا كان م نقطة تلاقي المتوسطات Δ أ ب حـ

، طول $\overline{\text{و م}}$ = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٦) في الشكل المقابل :




إذا كانت مساحة (Δ أ هـ حـ) = ١٥ سم$^2$

، مساحة (Δ و هـ حـ) = ٩ سم$^2$

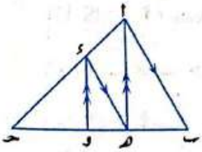
، أ ب = ١٦ سم فإن : أ ء = .............. سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٣

## السؤال الثاني ٤ درجات

في الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$

أثبت أن : (حـ هـ)$^2$ = حـ و × حـ ب

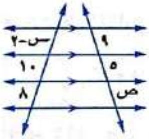
الدرجة الكلية
..........
١٠

# اختبار 6 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**




(١) في الشكل المقابل إذا كانت الأطوال مقدره بالسنتيمتر :

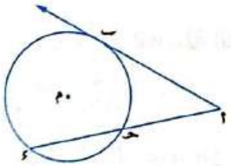
فإن : س + ص = .............. سم.

(أ) ١٨ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(٢) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، مساحة (Δ أ ب حـ) = ٤ مساحة (Δ ء هـ و)

، وكان : ء هـ = ٦ سم فإن : أ ب = .............. سم

(أ) ٣ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨



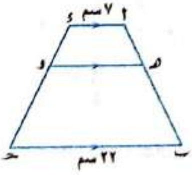

(٣) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

إذا كان : $(أب)^2$ = ..............

(أ) أ حـ × حـ ء (ب) أ حـ × أ ء

(جـ) أ ب × أ حـ (د) أ ب × حـ ء



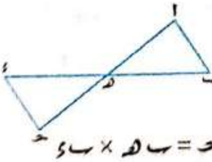

(٤) في الشكل المقابل :

$\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٢}{٣}$

فإن : هـ و = .............. سم.

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥



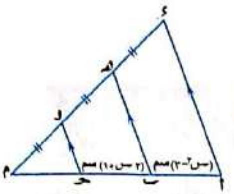

(٥) لأثبات أن أ ب حـ ء رباعي دائري

نحتاج أثبات أن ..............

(أ) أ ب × أ حـ = ء ب × ء حـ (ب) أ هـ × أ حـ = ب هـ × ب ء

(جـ) ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (د) أ هـ × هـ حـ = ب هـ × هـ ء

(٦) فى الشكل المقابل :



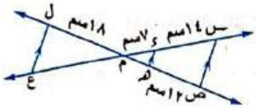

أ م = .............. سم.

(أ) ٩ س　　(ب) ٢ س٢ + ٤

(جـ) ٣٩　　(د) ٢٦

**السؤال الثانى** | **٤ درجات** | (١) ٢ درجة　(٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :




$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

أوجد : (١) طول $\overline{\text{هـ م}}$　　(٢) طول $\overline{\text{م ع}}$

الدرجة الكلية
..........
١٠

# اختبار 7 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** | **٦ درجات** | كل جزئية درجة

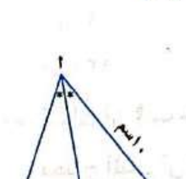
**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : $\Delta$ أ ب جـ ~ $\Delta$ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{\text{م}(\Delta \text{ س ص ع})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٣}$　　(ب) ٣　　(جـ) $\frac{١}{٩}$　　(د) ٩

(٢) فى الشكل المقابل :



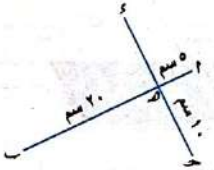

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

، أ ء = .............. سم

(أ) ٨　　(ب) ٦٠

(جـ) ٢ $\sqrt{١٥}$　　(د) ٧ $\sqrt{٣}$

(٣) فى الشكل المقابل :



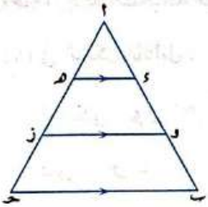

إذا كان : $\overline{أب} \cap \overline{جـ ء} = \{هـ\}$

فإن : النقط أ ، جـ ، ب ، ء تقع على دائرة واحدة

إذا كان : هـ ء = ..............

(أ) ٥ سم (ب) ٨ سم (جـ) هـ جـ (د) هـ ب

(٤) فى الشكل المقابل :

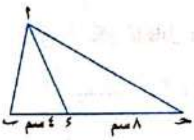



$\frac{ء هـ}{ب جـ}$ = ..............

(أ) $\frac{و ز}{ب جـ}$ (ب) $\frac{أ ء}{أ و}$

(جـ) $\frac{هـ ز}{هـ جـ}$ (د) $\frac{أ هـ}{أ جـ}$

(٥) فى الشكل المقابل :

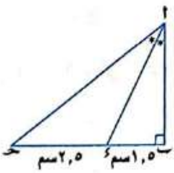



إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠ء أ ب) = ٢ ق (∠ء أ جـ)

فإن : أ ب = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٦) فى الشكل المقابل :




أ جـ = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٧

**السـؤال الثانى** **٤ درجات**

س ص ع مثلث ، نصفت زاوية ص بمنصف قطع $\overline{س ع}$ فى م ، ثم رسم

$\overleftrightarrow{م ن}$ // $\overline{ع ص}$ فقطع $\overline{س ص}$ فى ن **أثبت أن :** $\frac{س ص}{ص ع} = \frac{س ن}{ص ن}$

وإذا كان : س ص = ٦ سم ، ص ع = ٤ سم **فأوجد :** طول $\overline{س ن}$

الدرجة الكلية ١٠

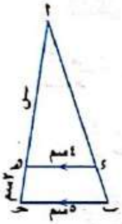
# اختبار 8 حتى درس 4 من الوحدة الرابعة

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**السؤال الأول** ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

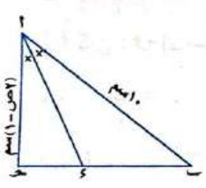



إذا كان : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب حـ}$

فإن : س = ............ سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) في الشكل المقابل :



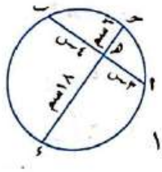

$\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ، $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{٥}{٣}$ فإذا كان : أ ب = ١٠ سم

، أ حـ = (٢ ص − ١) سم

فإن : ص = ............ سم

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

(٣) في الشكل المقابل :




س = ............ سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ١٨

(٤) في الشكل المقابل :



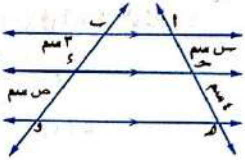

لإثبات أن ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ ء أ حـ)

نحتاج معرفة أن ............

(أ) أ ب = أ حـ (ب) أ ء = $٢\sqrt{٣٠}$

(جـ) ٣ أ حـ = ٥ أ ب (د) ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

(٥) فى الشكل المقابل :

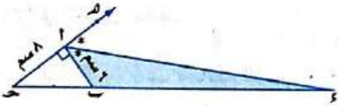



إذا كان : $س^2 + ص^2 = ٥٧$

فإن : س + ص = ............ سم.

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٦) فى الشكل المقابل :

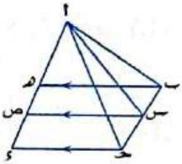



مساحة △ ا ب ء = ............ سم$^2$.

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٤ (د) ٧٢

**السـؤال الثانى** **٤ درجات**

فى الشكل المقابل :




$\overline{بهـ} // \overline{سص} // \overline{جـء}$ ، $\frac{اب}{اجـ} = \frac{هـص}{صء}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{اس}$ ينصف ∠ ب ا جـ

الدرجة الكلية

١٠

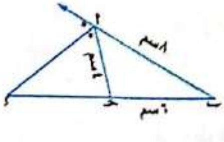
## اختبار 9 حتى درس 5 من الوحدة الرابعة

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**السـؤال الأول** **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

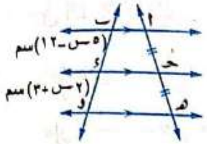



إذا كان : $\overleftrightarrow{اء}$ ينصف الزاوية الخارجة عند ا

فإن : جـ ء = ............ سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢) فى الشكل المقابل :

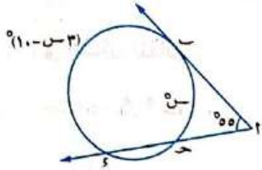



س = ...............

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) ٧ (د) ٢

(٣) فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماساً للدائرة

فإن : س = ...............

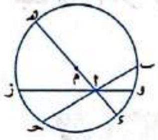
(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ١٥° (د) ٥٥°

(٤) إذا كان : أ م = ٤ سم ، نق = ٣ سم حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$ (أ) = ...............

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ٧

(٥) فى الشكل المقابل :

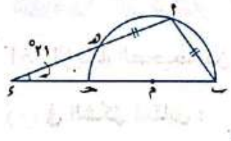


أى مما يأتى لايساوى $ق_م$ (أ) ؟

(أ) $(أ م)^٢ - (ء م)^٢$ (ب) $-$ أب × أجـ

(جـ) $-$ ءأ × أهـ (د) $-$ و أ × أ ز

(٦) فى الشكل المقابل :




إذا كان : أهـ = أب ، $\overline{بجـ}$ قطر ، ق (∠ء) = ٢١°

فإن : ق (∠أ) = ...............

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤

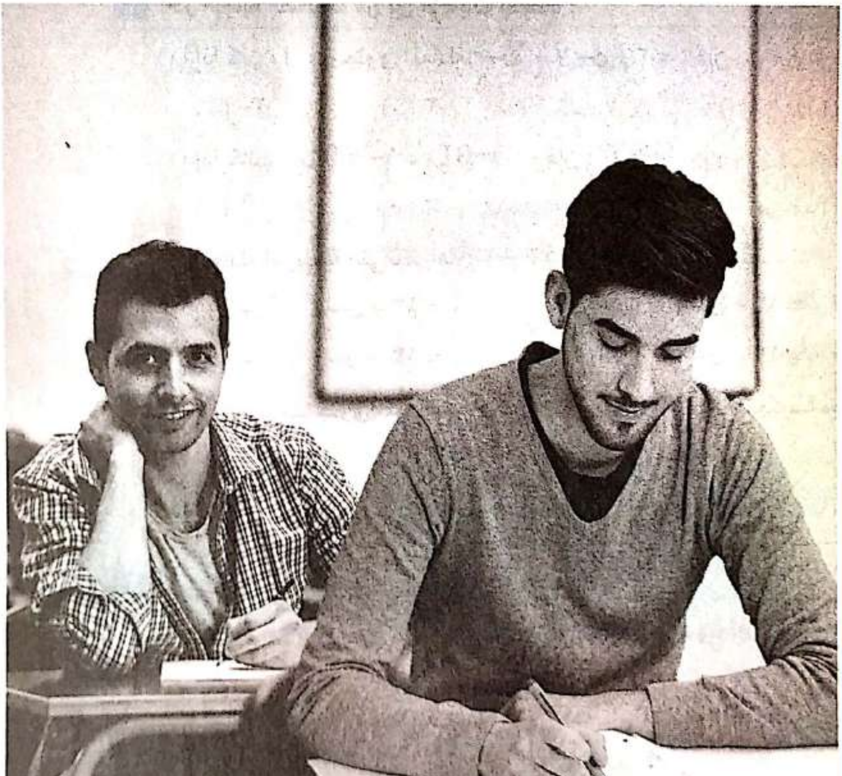
(جـ) ١٠٦ (د) ١١٠

**السؤال الثانى** **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر $\overline{بجـ}$ يمر بالنقطة أ بحيث أب = ٣ أجـ

**احسب :** (١) طول الوتر $\overline{بجـ}$ (٢) بُعد الوتر $\overline{بجـ}$ عن مركز الدائرة.

# امتحانات الكتاب المدرسى



# نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات

## النموذج الأول

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**1** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$ فإن : ل + م = ..............

(أ) $-٣$ (ب) $٣$ (جـ) $٧$ (د) $-٧$

(٢) إذا كانت : $جا \theta = -١$ ، $جتا \theta = ٠$ فإن : $\theta$ = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\pi$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $٢\pi$

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ − ٣ ت ، ٢ + ٣ ت هى ..............

(أ) $س^٢ + ٤ س + ١٣ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٤ س + ١٣ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٤ س - ١٣ = ٠$ (د) $س^٢ - ٤ س - ١٣ = ٠$

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م + ٢) س + ٣ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : م = ..............

(أ) $٣$ (ب) $٢$ (جـ) $-٢$ (د) $-٣$

---

**2** أكمل ما يأتى :

(١) الدالة د حيث د (س) = − (س − ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة ..............

(٢) الزاوية التى قياسها $٩٣٠^\circ$ تقع فى الربع ..............

(٣) إذا كان : $جتا \theta = \frac{١}{٢}$ ، $جا \theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : $\theta$ = ..............

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها ضعف جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هى ..............

---

**3** (أ) ضع العدد : $\frac{٢ - ٣ ت}{٣ + ٢ ت}$ فى صورة عدد مركب حيث : $ت^٢ = -١$

(ب) إذا كان : $٤ جا \theta - ٣ = ٠$ أوجد : $\theta$ حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

٤ (أ) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = − س$^{2}$ + ٨ س − ١٥

(١) ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٧]

(٢) عيِّن من الرسم إشارة هذه الدالة.

(ب) إذا كان : س = ٣ + ٢ ت ، ص = $\frac{٤ - ٢ ت}{١ - ت}$

فأوجد : س + ص فى صورة عدد مركب.

---

٥ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س$^{2}$ + ٣ س − ٤ ≥ ٠

(ب) إذا كان : ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة : حتا (٣٦٠° − θ) − حتا (٩٠° − θ)

## النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى ت$^{٤٣}$ = ..............

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س$^{2}$ − ٦ س + ل = ٠ حقيقيين متساويين فإن : ل = ..............

(٣) إذا كان : ٠° < θ < ٩٠° وكان جا ٢ θ = جتا ٣ θ فإن : ق (∠ θ) = ..............

(٤) مدى الدالة د حيث د (θ) = $\frac{٣}{٢}$ جا θ هو ..............

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة : س$^{2}$ (س − ١) (س + ١) = ٠ من الدرجة ..............

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س$^{2}$ + ٣ س − م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : م = ..............

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) −٥

(٣) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى ١٨٠° (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية المثمن المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) إذا كان : ٢ جتا θ = − $\sqrt{3}$ ، π < θ < $\frac{3\pi}{2}$ فإن : ق (د θ) = ..............

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{6\pi}{7}$ (جـ) $\frac{4\pi}{3}$ (د) $\frac{7\pi}{6}$

---

**٣** (أ) أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ ك س^٢ + ٧ س + ك^٢ + ٤ = ٠

هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(ب) إذا كان : جا θ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (−٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

فأوجد : ق (د θ)

---

**٤** (أ) (١) أوجد قيمتى أ ، ب اللتين تحققان المعادلة : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت

(٢) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س (س + ١) − ٢ ≤ ٠

(ب) زاوية مركزية قياسها θ مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم وتحصر قوسًا طوله ٢٦ سم أوجد θ بالقياس الستينى.

---

**٥** (أ) إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + .... + ن) يعطى بالعلاقة :

حـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا ٢١٠ ؟

(ب) إذا كان : جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث : ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد : جا (١٨٠° − θ) + ظا (٣٦٠° − θ) + ٢ جا (٢٧٠° − θ)

# نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة

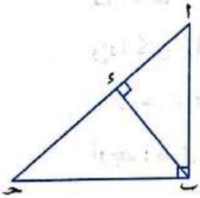
## النموذج الأول

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

**١ أكمل ما يأتى :**

(١) المضلعان المشابهان لثالث يكونان ..............

(٢) فى الشكل المقابل :




أولًا : $(أب)^2$ = أ ء × ..............

، $(حـ ب)^2$ = حـ أ × ..............

ثانيًا : ء أ × ء حـ = ..............

ثالثًا : أ ب × ب حـ = .............. × ..............

---

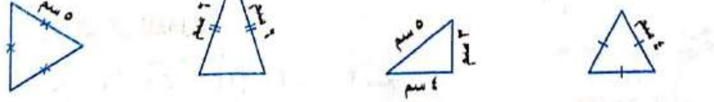
**٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم

، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى تساوى ..............

(أ) ١ : ٥ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

(٢) أى مثلثين من المثلثات الآتية متشابهان ؟

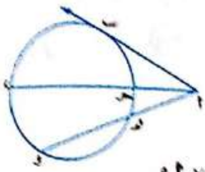



(١) (٢) (٣) (٤)

(أ) (١) ، (٤) (ب) (٢) ، (٤) (جـ) (١) ، (٣) (د) (٣) ، (٤)

(٣) إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين ١ : ٤ فإن النسبة بين مساحتى سطحيهما تساوى ..............

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦



(٤) في الشكل المقابل :

كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

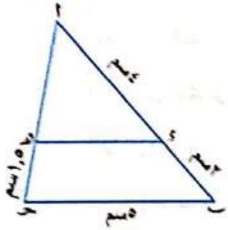
ماعدا العبارة ..............

(أ) $(أب)^٢$ = أحـ × أ ء (ب) $(أب)^٢$ = أهـ × أ و

(جـ) أحـ × أ ء = أهـ × أ و (د) أحـ × حـ ء = أهـ × هـ و

---

٣ (أ) في الشكل المقابل :



△ أ ء هـ ~ △ أ ب حـ أثبت أن : ء هـ // ب حـ

وإذا كان : أ ء = ٤ سم ، ء ب = ٢ سم

، هـ حـ = ١,٥ سم ، ب حـ = ٥ سم

أوجد : طول كل من أهـ ، ء هـ

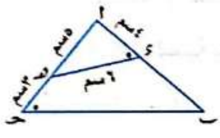
(ب) أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ بحيث : ب ء = ٥ سم ، ء حـ = ٣ سم ، هـ ∈ أ حـ

بحيث : أ هـ = ٢ سم ، حـ هـ = ٤ سم

أثبت أن : △ ء هـ حـ ~ △ أ ب حـ ثم أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

---

٤ (أ) في الشكل المقابل :

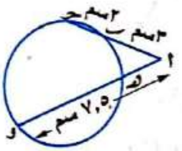


ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ حـ) ، أ ء = ٤ سم ، أ هـ = ٥ سم

، ء هـ = ٦ سم ، هـ حـ = ٣ سم

أوجد طول كل من : ء ب ، ب حـ

(ب) في الشكل المقابل :



حـ ب ∩ و هـ = {أ} ، أ ب = ٣ سم

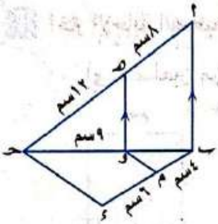
، ب حـ = ٢ سم ، أ و = ٧,٥ سم

أوجد : طول هـ و

---

٥ (أ) أ ء متوسط في المثلث أ ب حـ ، نصفت ∠ أ ء ب بمنصف قطع أ ب في هـ ، نصفت ∠ أ ء حـ بمنصف قطع أ حـ في و ، رسم هـ و أثبت أن : هـ و // ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب} // \overline{هـ و}$ ، أ هـ = ٨ سم ، حـ هـ = ١٢ سم

، حـ و = ٩ سم ، ب م = ٤ سم ، ء م = ٦ سم

أولاً : أوجد : طول $\overline{ب و}$

ثانيًا : أثبت أن : $\overline{و م} // \overline{حـ ء}$

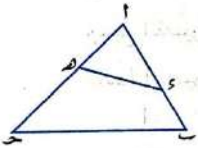
## النموذج الثانى

### أجب عن الأسئلة الآتية :

**١** أكمل ما يأتى :

(١) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ..............

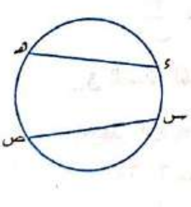
(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان $\Delta$ أ ء هـ ~ $\Delta$ أ حـ ب

فإن : ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ ..............)

(٣) فى الشكل المقابل :

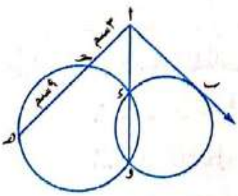


إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين

$\overline{ء هـ}$ ، $\overline{س ص}$ فى نقطة ن

فإن : ن ء × ن هـ = ..............

(٤) فى الشكل المقابل :



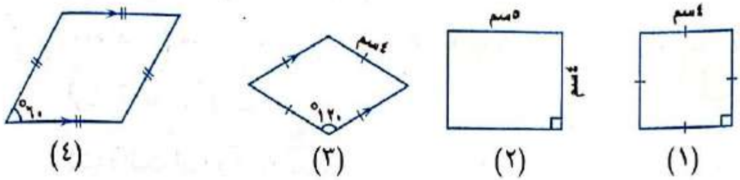
إذا كان : أ حـ = ٣ سم

، حـ هـ = ٩ سم

فإن : أ ب = ..............

**[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) **أى مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟**




(أ) المضلعان (١) ، (٢)      (ب) المضلعان (١) ، (٣)

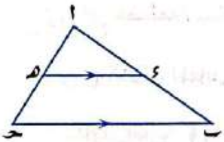
(جـ) المضلعان (٣) ، (٤)      (د) المضلعان (٢) ، (٤)

(٢) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ..............

(أ) ٢ : ٥      (ب) ٤ : ٥      (جـ) ١٦ : ٢٥      (د) ١٦ : ٤١

(٣) **فى الشكل المقابل :**



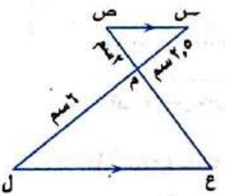

جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ماعدا التعبير ..............

(أ) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$      (ب) $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$      (د) $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$

(٤) **فى الشكل المقابل :**



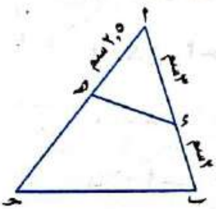

طول $\overline{\text{مع}}$ يساوى ..............

(أ) ٣,٦ سم      (ب) ٤ سم

(جـ) ٤,٢ سم      (د) ٤,٨ سم

---

**[٣] (أ) فى الشكل المقابل :**




$\Delta$ أ ب جـ $\sim \Delta$ أ هـ ء

أثبت أن الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى

وإذا كان : أء = ٣ سم ، ب ء = ٢ سم ، أهـ = ٢,٥ سم

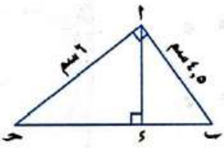
**أوجد :** طول $\overline{\text{هـجـ}}$

(ب) أب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{أب}}$ فى و

، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ فى م   أثبت أن : $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

---

**٤** (أ) فى الشكل المقابل :




ق(∠ب أ حـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

، أب = ٤,٥ سم ، أحـ = ٦ سم

أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

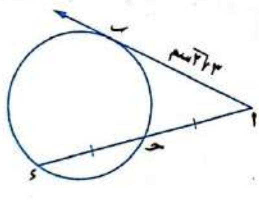
(ب) أب حـ ء شكل رباعى فيه : ب حـ = ٢٧ سم ، أب = ١٢ سم ، أء = ٨ سم

، ء حـ = ١٢ سم ، أحـ = ١٨ سم   أثبت أن : Δ ب أحـ ~ Δ أ ء حـ

وأوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما .

---

**٥** (أ) فى الشكل المقابل :




$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة ، حـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

، أب = ٣ $\sqrt{2}$ سم

أوجد طول : $\overline{\text{أحـ}}$

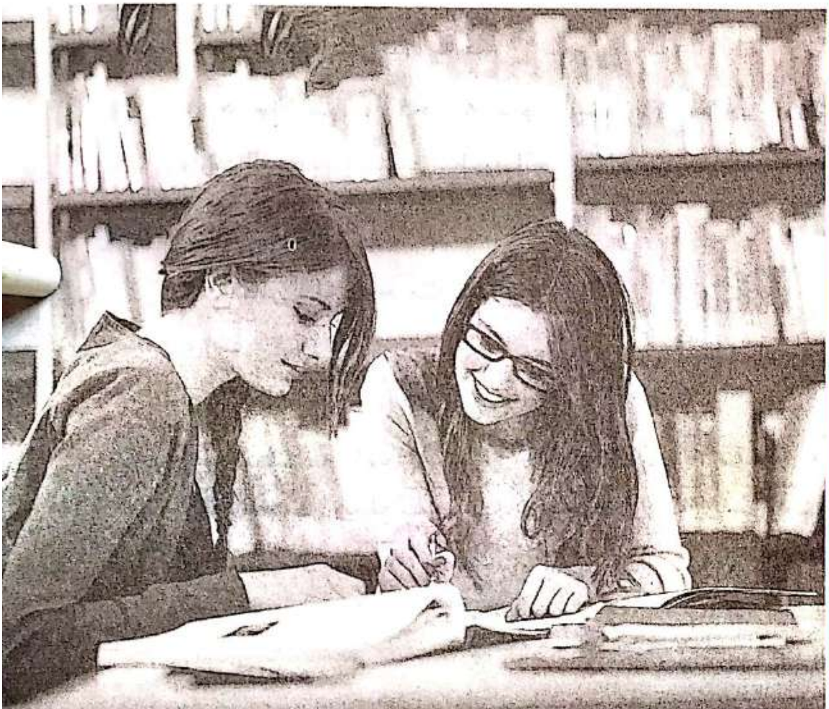
(ب) أب حـ مثلث فيه : أب = ٨ سم ، أحـ = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم

، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ ويقطع $\overline{\text{أحـ}}$ فى هـ

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$

## الامتحانات النهائية

- امتحان الوزارة التجريبى (يناير ٢٠١٩)
- ١٠ نماذج امتحانية
- ١٠ نماذج امتحانية الكترونية مشار إليها بأكواد QR codes



# امتحان الوزارة التجريبى (يناير ٢٠١٩)

**أجب عن الأسئلة الآتية :**

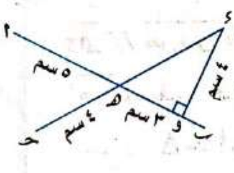
**١** إذا كانت د (س) = س + ٢ حيث : س ∈ ]-٤ ، ٣[

فإن : د (س) تكون موجبة عندما س ∈ ..............

(أ) ]-∞ ، -٢[ (ب) ]-٢ ، ∞[

(جـ) ]-٤ ، -٢[ (د) ]-٢ ، ٣[

**٢** **فى الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ءجـ}$ = {هـ} ، أهـ = ٥ سم

، هـ و = ٣ سم ، هـ جـ = ٤ سم

، ءو = ٤ سم

، $\overline{ءو} \perp \overline{بهـ}$ ، النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على محيط دائرة

فإن : طول $\overline{وب}$ = .............. سم.

(أ) ٠,٥ (ب) ١ (جـ) ١,٥ (د) ٢

**٣** إذا كانت هـ زاوية حادة موجهة فى الوضع القياسى حيث يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٠,٦ ، ب) على دائرة الوحدة. **أوجد :** لأقرب درجة قياس الزاوية س ∈ [٠ ، π]

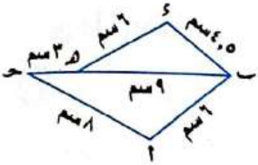
والتى تحقق العلاقة : طا س = ١٠ جا (٩٠° − هـ) − طا$^{٢}$ ٣٩٠°

**٤** إذا كان : (١ + ت$^{٤}$) (١ − ت$^{٧}$) = س + ت ص

فإن : س + ص = ..............

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٥ فى الشكل المقابل :




ب ، هـ ، حـ على استقامة واحدة

إذا كان : حـ هـ = ٣ سم ، ب هـ = ٩ سم

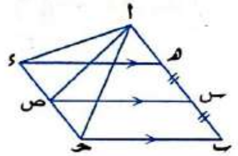
، ب ء = ٤,٥ سم ، ء هـ = ٦ سم

، ب أ = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم

فإن معامل التشابه بين المثلثين Δ أ ب حـ ، Δ ء ب هـ = ..............

(أ) ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١٦ : ٩ (د) ٩ : ١٦

٦ فى الشكل المقابل :




$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ص س}$ // $\overline{حـ ب}$ ،

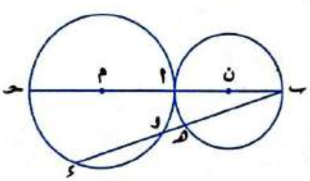
$\overrightarrow{أ ص}$ ينصف ∠ حـ أ ء

أثبت أن : Δ حـ أ ء متساوى الساقين.

٧ قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس الذى طوله يساوى طول قطر الدائرة مقربة لأقرب درجة يساوى ..............°

(أ) ١١٣ (ب) ١١٥ (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٨ فى الشكل المقابل :




إذا كانت : ن دائرة طول نصف قطرها ٣ سم

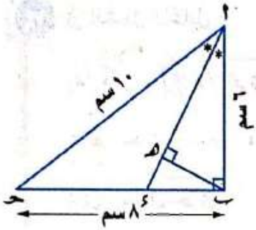
تمس دائرة م طول نصف قطرها ٤ سم

فى أ ، هـ ب = ٥ سم ، هـ و = ٢ سم

فإن : طول $\overline{و ء}$ = .............. سم

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

**(٩) فى الشكل المقابل :**




أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ب حـ = ٨ سم

، أ ب = ٦ سم ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ احسب طول : $\overline{\text{ء هـ}}$

---

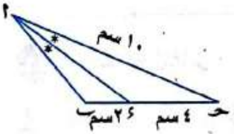
**(١٠)** إذا كان : طا (١٨٠° + ٥ هـ) + طا (٢٧٠° + ٤ هـ) = ٠

فإن : قيمة هـ التى تحقق المعادلة حيث هـ ∈ ] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [ تساوى ...............°

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٩٠

---

**(١١) فى الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ منصف داخلى للزاوية ب أ حـ

، أ حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ٤ سم

، ء ب = ٢ سم فإن : طول $\overline{\text{أ ء}}$ = ............... سم

(أ) ٩ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٤٢}$ (د) $\sqrt{٥٨}$

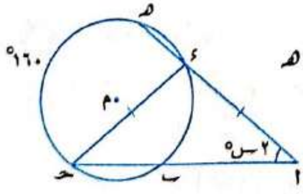
---

**(١٢)** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٧ = صفر

**فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها :** ل$^{٢}$ م ، م$^{٢}$ ل

---

**(١٣) فى الشكل المقابل :**



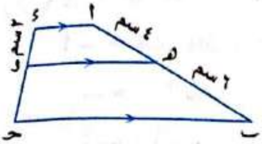

إذا كانت : م دائرة ، رسم $\overline{\text{أ هـ}}$ يقطع الدائرة فى ء ، هـ

، رسم $\overline{\text{أ حـ}}$ يقطع الدائرة فى ب ، حـ ، أ ء = ء حـ

فإن قيمة : س = ...............°

(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

**(١٤) فى الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overline{أ ء} \parallel \overline{هـ و} \parallel \overline{ب جـ}$ ، أ هـ = ٤ سم

، هـ ب = ٦ سم ، ء و = ٢ سم

فإن : طول $\overline{جـ و}$ = .............. سم.

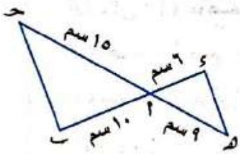
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

**(١٥)** إذا كان جذرا المعادلة : س^٢ + (٢ ك + ٣) س + ك^٢ = ٠ حقيقيين ومتساويين

فإن : ك = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

**(١٦) فى الشكل المقابل :**




$\overline{ء ب} \cap \overline{هـ جـ}$ = {أ} ، أ هـ = ٩ سم ، أ ب = ١٠ سم

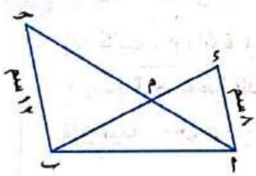
، أ جـ = ١٥ سم

، ء أ = ٦ سم ، م (Δ أ ء هـ) = ٣٦ سم^٢

فإن : م (Δ أ ب جـ) = .............. سم^٢.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٢٥

**(١٧) فى الشكل المقابل :**

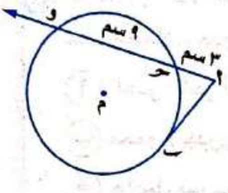



أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : أ ء = ٨ سم

، جـ ب = ١٢ سم

**أوجد :** م (Δ أ م ء) : م (Δ ب م جـ)

**(١٨) في الشكل المقابل :**



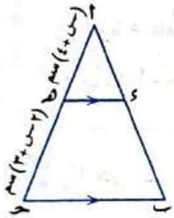

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس الدائرة م عند نقطة ب ، $\overrightarrow{\text{أو}}$ يقطع الدائرة م في النقطتين حـ ، و على الترتيب

فإذا كان أحـ = ٣ سم ، حـ و = ٩ سم

، فإن : $ق_م$ (أ) = ..............

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

**(١٩) في الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ ،

أء : أب = ٢ : ٥

فإن : س = ..............

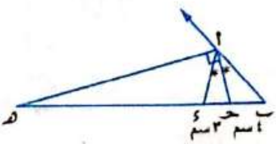
(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٢

**(٢٠)** عين إشارة الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ + ٤

**ثم أوجد في ح مجموعة حل المتباينة** : د (س) ≥ صفر

**(٢١) في الشكل المقابل :**




$\overrightarrow{\text{أحـ}}$ منصف للزاوية الداخلة للمثلث أبء عند ∠ أ

، $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أحـ}}$ ، بحـ = ٤ سم ، حـء = ٣ سم

فإن بهـ : هـء = ..............

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ (د) ٤ : ٣

**٢٢** إذا كان (٢ ت) أحد جذرى المعادلة التربيعية : $س^{٢}$ + أ س + ب = ٠

حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية ، فإن جميع ما يلى صحيح ماعدا :

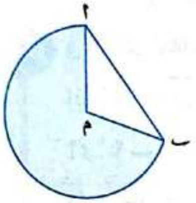
(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (-٢ ت)

(ب) مجموع جذرى المعادلة = صفر

(جـ) حاصل ضرب جذرى المعادلة = -٤

(د) المميز للمعادلة التربيعية < صفر

**٢٣** فى الشكل المقابل :




أوجد محيط الجزء المظلل الذى يمثل جزء من

الدائرة م علمًا بأن مساحة الدائرة ٣٦ π سم$^{٢}$

، جا (∠ أ ب م) = $\frac{١}{٢}$

**٢٤** إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٣ $س^{٢}$ - (ك + ٢) س + $ك^{٢}$ + ٢ ك = ٠

هو معكوس ضربى للجذر الآخر فإن : ك = ..............

(أ) -٣ ، ١ (ب) -٣ ، -١ (جـ) ٣ ، -١ (د) ٣ ، ١

**٢٥** إذا كان : ١٠ جا س = ٦ حيث : س قياس أكبر زاوية موجبة ، س ∈ [ ٠ ، ٢ π]

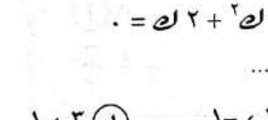
فإن القيمة العددية للمقدار : قا (٥٤٠° + س) تساوى ..............

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{-٥}{٣}$

**٢٦** فى المثلث أ هـ حـ : $\overline{ب ء}$ // $\overline{حـ هـ}$ ،

أ ء : ء هـ = ٣ : ٤ ، أ هـ = ٩ سم

، هـ حـ = ١٢ سم




**أثبت أن :** $\overleftarrow{هـ ب}$ منصف للزاوية أ هـ حـ

(٢٧) إذا كان : د (س) = $س^٢$ − ٧ س + ١٢ ، س ∈ ح فإن جميع ما يلى صحيح ماعدا ..............

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هى ح − [٣ ، ٤]

(جـ) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى ]٣ ، ٤[

(د) د (س) موجبة فى الفترة ح − ]٣ ، ٤[

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = ٤ جا س حيث س ∈ [٠ ، π] يساوى ..............

(أ) [٠ ، ٤] (ب) [٠ ، ٤[

(جـ) [−٤ ، ٠] (د) [−٤ ، ٤]

امتحان إلكترونى ١

# النموذج الأول

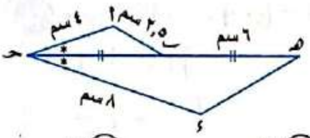
أجب عن الأسئلة الآتية :

**١** إذا كانت : طا (١٨٠° + θ) = ١ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : θ = ..............

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٣٥°

**٢** في الشكل المقابل :




إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

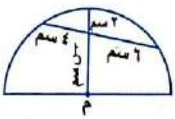
فإن : ء هـ = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

**٣** إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠

فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها : ل + ١ ، م + ١

**٤** في الشكل المقابل :




نصف دائرة مركزها م

فإن : س = .............. سم.

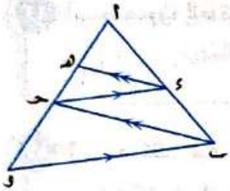
(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٢

**٥** مجموعة حل المتباينة (س − ٣) (س − ٧) < ٠ فى ح هى ..............

(أ) {٣ ، ٧} (ب) ]٣ ، ٧[

(جـ) [٣ ، ٧] (د) ح − [٢ ، ٥]

٦ في الشكل المقابل :




$\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

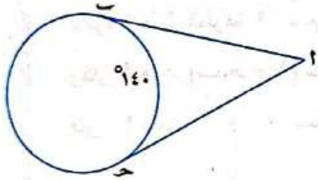
، $\overline{ءحـ} // \overline{بو}$

أثبت أن : $(أحـ)^2 = أهـ \times أو$

٧ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين .............. القاعدة.

(أ) يوازي (ب) عمودى على (جـ) ينصف (د) يساوى

٨ في الشكل المقابل :




$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ مماسان للدائرة

، ق $(\overset{\frown}{بحـ}) = ١٤٠°$

فإن : ق (∠ أ) = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٦٠° (د) ٨٠°

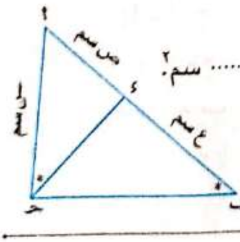
٩ يكون جذرا المعادلة : ك $س^2 - ١٢ س + ٩ = ٠$ متساويين إذا كانت ..............

(أ) ك > ٤ (ب) ك < ٤ (جـ) ك = ٤ (د) ك = ٩

١٠ إذا كانت : $\theta$ قياس زاوية موجبة في وضعها القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (- س ، س) حيث س > ٠ .

أوجد قيمة س ثم أوجد : ٢ جا $(٢٧٠° - \theta)$ - جتا $\theta$

١١ في الشكل المقابل :




إذا كان : $س^2 - ص^2 = ١٦$ فإن : ص × ع = .............. سم$^2$

(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٦

(١٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٢}$ هى ..............

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ت (د) -ت

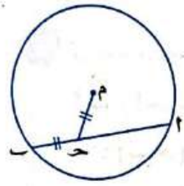
(١٣) أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ $\overline{أ ب}$ حيث : أ ء = ٥ سم ، ء ب = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أ حـ}$

حيث : أ هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٦ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

(٢) الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

(١٤) فى الشكل المقابل :




دائرة م طول قطرها ١٢ سم ، م حـ = حـ ب

وكان أ حـ = (ب حـ + ١) سم

فإن : أ ب = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(١٥) الزاوية التى قياسها $\frac{٧ \pi}{٦}$ قياسها الستينى يساوى ..............

(أ) °١٠٥ (ب) °٢١٠ (جـ) °٤٢٠ (د) °٨٤٠

(١٦) ابحث إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٣ س - ١٠ مع توضيح ذلك على خط الأعداد ،

ثم عين مجموعة حل المتباينة : $س^٢$ + ٣ س ≥ ١٠

(١٧) إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ حيث ء ∈ $\overline{ب حـ}$

فإن : $(أ ب)^٢$ = ..............

(أ) ب ء × ب حـ (ب) ب ء × ء حـ

(جـ) حـ ء × حـ ب (د) أ ب × أ حـ

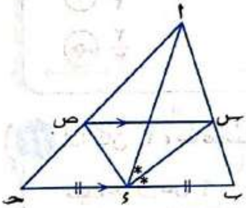
**(١٨)** إذا كانت النقطتين (س١ ، جتا س١) ، (س٢ ، جتا س٢) تقعان على منحنى الدالة د (س) = جتا س حيث س بالتقدير الدائرى فإن أكبر قيمة للمقدار :

(جتا س١ − جتا س٢) = ..............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) ١٨٠°

---

**(١٩)** فى الشكل المقابل :

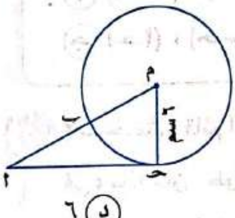



(١) أثبت أن : ءص ينصف ∠ أ ء جـ

(٢) أوجد : ق (∠ س ء ص)

---

**(٢٠)** فى الشكل المقابل :




أجـ تمس الدائرة م فى جـ ، م جـ = ٦ سم

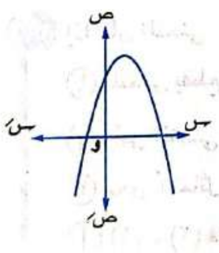
، ق م (أ) = ٦٤

فإن : أب = .............. سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

---

**(٢١)** الشكل المقابل يمثل المنحنى :




ص = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ

فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

(ج) أ < ٠ ، جـ > ٠

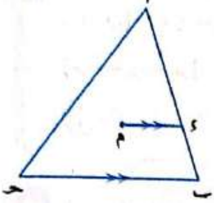
(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

---

**(٢٢)** إذا كان : جتا س = $\frac{٣}{٥}$ ، ٢٧٠° < س < ٣٦٠°

أوجد قيمة : جا (١٨٠° − س) + ظا (٩٠° − س) + ظا (٢٧٠° − س)

**٢٣** في الشكل المقابل :




إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

، كان : $\overline{ءم} // \overline{بحـ}$

فإن : $\frac{ءم}{بحـ}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

**٢٤** إذا كان : أ ، ب قياسًا زاويتان متكافئتين فأى مما يأتى يمثل قياسًا زاويتين متكافئتين أيضًا

حيث حـ ∈ ص ؟

(أ) (أ + حـ) ، (ب + حـ) (ب) (أ − حـ) ، (ب − حـ)

(جـ) (حـ أ) ، (حـ ب) (د) كل ما سبق.

**٢٥** أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رُسم $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{بحـ}$

فى ء فإذا كان : طول $\overline{بء}$ = ٢٤ سم ، ب أ : أ حـ = ٣ : ٥

أوجد : محيط Δ أ ب حـ

**٢٦** إذا كان المنحنى : ص = س (أ − س) فأى من العبارات الآتية يكون صحيحًا ؟

(١) المنحنى يقطع محور السينات عند (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠)

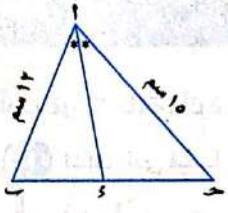
(٢) رأس المنحنى هو $\left(\frac{أ}{٢} ، \frac{أ^٢}{٤}\right)$

(٣) محور التماثل للمنحنى هو س = أ

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٢٧) في الشكل المقابل :




إذا كانت مساحة (Δ أ ب حـ) = ٧٢ سم$^2$

فإن مساحة (Δ أ ء ب) = .............. سم$^2$.

(أ) ٢٤ (ب) ٢٨

(جـ) ٣٢ (د) ٤٠

(٢٨) إذا كانت : جتا θ > صفر ، جا θ < صفر فإن : θ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

امتحان الكترونى ٢

# النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ٦٠° يشابه المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٦٠° ، ..............

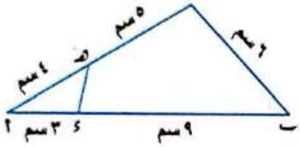
(أ) ٧٠°　(ب) ١١٠°　(جـ) ٨٠°　(د) ٣٠°

٢ إذا كان : ل ، ٢ − ل هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ك س + ٦ = ٠

فإن : ك = ..............

(أ) ١　(ب) −٢　(جـ) −٣　(د) ٥

٣ فى الشكل المقابل :




هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث : أء = ٣ سم

، ءب = ٩ سم ، بجـ = ٦ سم

، هـجـ = ٥ سم ، هـأ = ٤ سم

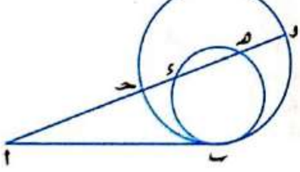
أثبت أن : △ أءهـ ~ △ أجـب ثم أوجد : طول $\overline{\text{هـء}}$

٤ الدالة د : د (س) = (س − ١) (س + ٣) تكون موجبة فى الفترة ..............

(أ) [−٣ ، ١]　(ب) ]−٣ ، ١[

(جـ) ح − [−٣ ، ١]　(د) ح − ]−٣ ، ١[

٥ فى الشكل المقابل :




إذا كانت : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسة مشتركة لدائرتين

متماستين عند ب

فإن أجـ : أء = ..............

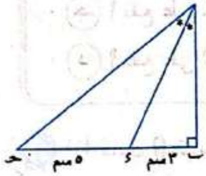
(أ) أب : أو　(ب) ٣ : ٤　(جـ) أء : أو　(د) أهـ : أو

٦ أوجد الحل العام للمعادلة : طا (θ + ٢٠°) = طتا (٣ θ + ٣٠°)

ثم أوجد : قيم θ ∈ ]٠° ، ٩٠°[

---

٧ فى الشكل المقابل :




أب = .............. سم.

(أ) ٤  (ب) ٥

(جـ) ٦  (د) ٧

---

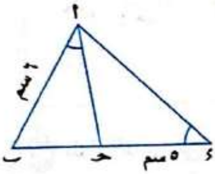
٨ إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين فإن جذرى المعادلة : أ س$^2$ + ب س + ب − أ = ٠ يكونان ..............

(أ) مركبان وغير حقيقيين.  (ب) مركبين مترافقين.

(جـ) نسبيين.  (د) متساويين.

---

٩ فى الشكل المقابل :




جـ ∈ $\overline{\text{ب د}}$ ، ق (∠د) = ق (∠ب أ جـ)

، أب = ٦ سم ، جـ د = ٥ سم

فإن : ب جـ = .............. سم.

(أ) ٢  (ب) ٤  (جـ) ٥  (د) ٦

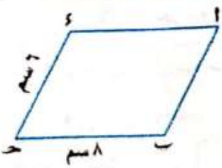
---

١٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^2$ − ٢ س − ٥ = ٠ .

فكون المعادلة التى جذراها : ل$^2$ + ١ ، م$^2$ + ١

---

١١ فى الشكل المقابل :




أ ب جـ د متوازى أضلاع مساحته ٤٠ سم$^2$

فإن : ق (∠أ) = ..............

(أ) ٣٧°  (ب) ٥٦°  (جـ) ٥٣°  (د) ٣٤°

(١٢) إذا كان ق$_م$ (أ) = ق$_ن$ (أ) حيث : م ، ن دائرتان فإن ..............

(أ) أم = أن

(ب) نق$_م$ = نق$_ن$

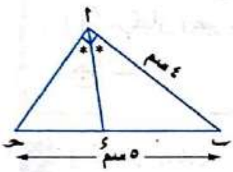
(جـ) أ تقع على خط تقاطع الدائرتين م ، ن

(د) أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

(١٣) إذا كانت $\theta$ قياس زاوية فى وضعها القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، $\frac{٣}{٥}$) حيث س < ٠

فأوجد قيمة المقدار : جا (٩٠° + $\theta$) − ظتا (١٨٠° + $\theta$) جتا (٩٠° + $\theta$)

(١٤) فى الشكل المقابل :




ب جـ = ٥ سم ، أ ب = ٤ سم

، $\overline{أب} \perp \overline{أجـ}$

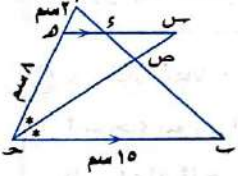
فإن : $\frac{بء}{ءجـ}$ = ..............

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٥) طول القوس فى الدائرة التى طول نصف قطرها ٦ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{٢}$ هو ..............

(أ) $\frac{٣\pi}{٢}$ سم (ب) ٢ $\pi$ سم (جـ) $\frac{٥\pi}{٢}$ سم (د) ٣ $\pi$ سم.

(١٦) فى الشكل المقابل :



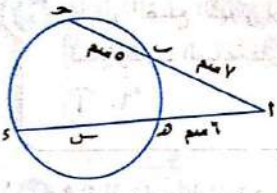

إذا كان : $\overrightarrow{جـس}$ ينصف ∠ أجـب

، $\overline{سء}$ // $\overline{بجـ}$

فإن : سء = .............. سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

**(١٧) في الشكل المقابل :**



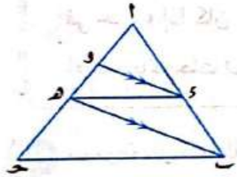

أب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم

، أهـ = ٦ سم ، ءهـ = س سم

**أوجد :** قيمة س

---

**(١٨) في الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overline{ءو}$ // $\overline{ب هـ}$

**لإثبات أن :** $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب حـ}$ يكون كافيًا

الحصول على ...............

(أ) $\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٤}$ فقط.　　(ب) أو × أحـ = $(أهـ)^{٢}$ فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.　　(د) ليس كل ما سبق.

---

**(١٩)** إذا كان : أب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، جا أ + جتا حـ = ١

فإن : طا حـ = ...............

(أ) ١　　(ب) -١　　(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$　　(د) $\sqrt{٢}$

---

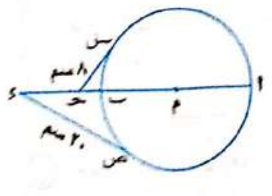
**(٢٠)** أب حـ مثلث فيه : $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الداخلة للمثلث ويقطع $\overline{ب حـ}$ في ء فإذا كان

أحـ = ١٥ سم ، أب = ٢٧ سم ، ب ء = ١٨ سم

**احسب :** طول كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{أء}$

---

**(٢١) الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overline{أب}$ قطر في دائرة م ، $\overline{حـ س}$ ، $\overline{ءص}$

قطعتان مماستان للدائرة م ، أب = ٣٠ سم

، حـ س = ٨ سم ، ءص = ٢٠ سم

فإن : ء حـ = ............... سم.

(أ) ٢　　(ب) ٦　　(جـ) ٨　　(د) ١٠

**٢٢** إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية ..............

(أ) ٦٠°   (ب) ١٢٠°   (جـ) ١٥٠°   (د) ٢٤٠°

---

**٢٣** أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة عند ب ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ قاطعًا للدائرة فى حـ ، ء إذا كان : ق $(\overset{\frown}{\text{ءب}})$ = ١٥٠° ، ق $(\overset{\frown}{\text{ب حـ}})$ = ٨٠°

أوجد : بالدرجات ق (∠ أ)

---

**٢٤** مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ + ٩ = ٠ فى مجموعة الأعداد المركبة هى ..............

(أ) {٣ ، -٣}   (ب) {-٣ت}

(جـ) {٣ت ، -٣ت}   (د) ∅

---

**٢٥** فى الشكل المقابل :




مساحة Δ أبء = .............. سم$^{٢}$

(أ) ٣٦   (ب) ٤٨

(جـ) ٥٤   (د) ٧٢

---

**٢٦** أوجد قيم س ، ص التى تحقق المعادلة : $\frac{(٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت)}{٢ + ت}$ = س + ت ص

---

**٢٧** إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ - ٤ ≤ س + ك هى [-٢ ، ٣]

فإن : ك = ..............

(أ) -٦   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ١٠

---

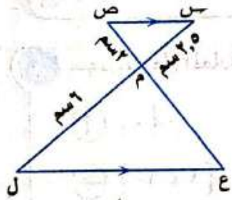
**٢٨** مدى الدالة د : د (θ) = ٣ جا ٢ θ هو ..............

(أ) [-٢ ، ٢]   (ب) ]-٢ ، ٢[   (جـ) [-٣ ، ٣]   (د) ]-٣ ، ٣[

# النموذج الثالث

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**١** فى الشكل المقابل :




ع م = .............. سم.

(أ) ٣,٦ (ب) ٤
(جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

---

**٢** أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٧٣}$ = ...............

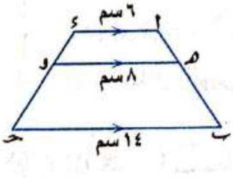
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ت (د) −ت

---

**٣** مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ $سم^٢$ **أوجد** : مساحة كل منهما.

---

**٤** فى الشكل المقابل :




$\frac{أ هـ}{هـ ب}$ = ..............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$
(جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٣}$

---

**٥** إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − (م + ٢) س + ٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : م = ..............

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٣

---

**٦** حل فى ح المتباينة الآتية : $(س + ٣)^٢$ ≤ ١٠ − ٣ (س + ٣)

**(٧)** إذا كان المضلع م١ هو تكبير للمضلع م٢ ، وكانت ك نسبة التكبير فإن ..............

(أ) ك > ١   (ب) ك < ١

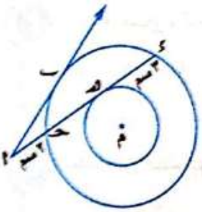
(جـ) ك = ٠   (د) ٠ < ك < ١

**(٨)** مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ = س في ح هي ..............

(أ) {٠}   (ب) {١}

(جـ) {-١ ، ١}   (د) {٠ ، ١}

**(٩)** في الشكل المقابل :

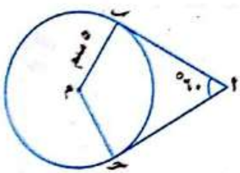



أب = .............. سم.

(أ) ٤   (ب) ٥

(جـ) ٦   (د) ٨

**(١٠)** في الشكل المقابل :




أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

، ق(∠أ) = ٦٠° ، مب = ٥ سم

أوجد : طول القوس الأصغر ب حـ

**(١١)** إذا كان : أب مماسًا للدائرة م عند نقطة ب وكانت : قم (أ) = ٢٥ سم$^{٢}$

فإن : أب = ..............

(أ) ٥ سم   (ب) -٥   (جـ) ١٥ سم   (د) ٢٥ سم

**(١٢)** إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة التربيعية (س − أ) (س − ب) = ك فإن المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى ...............

(أ) (س − ل) (س − م) = ٠ (ب) (س − ل) (س − م) + ك = ٠

(ج) (س − ل) (س − م) = ك (د) س$^{٢}$ − (ل + م) س + ك = ٠

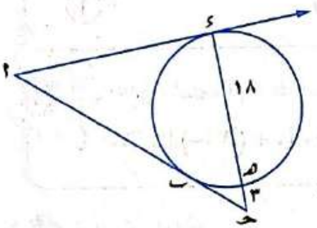
**(١٣)** أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

س + ص ت = (١ + ت)$^{٣}$ حيث س ∈ ح ، ص ∈ ح ، ت$^{٢}$ = −١

**(١٤)** القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ سم من دائرة طول قطرها ٤ سم هو ...............

(أ) $(\frac{٢}{٣})^{ء}$ (ب) $(\frac{٣}{٢})^{ء}$ (ج) ٥$^{ء}$ (د) ٦$^{ء}$

**(١٥)** فى الشكل المقابل :



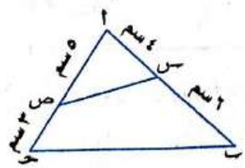

أء ، أب مماسان لدائرة عند ء ، ب على الترتيب ، حـ هـ يقطع الدائرة فى هـ ، ء

إذا كان : حـ هـ = ٣ سم ، هـ ء = ١٨ سم

فإن : (أحـ − أء) = ............... سم.

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢$\sqrt{٧}$ (ج) ٣$\sqrt{٧}$ (د) ٦$\sqrt{٧}$

**(١٦)** فى الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث فيه : س ∈ $\overline{أب}$

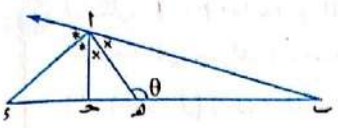
بحيث : أس = ٤ سم ، س ب = ٦ سم ، ص ∈ $\overline{أحـ}$

بحيث : أص = ٥ سم ، ص حـ = ٣ سم

أثبت أن : (١) Δ أس ص ~ Δ أحـ ب

(٢) الشكل س ب حـ ص رباعى دائرى.

(١٧) فى الشكل المقابل :

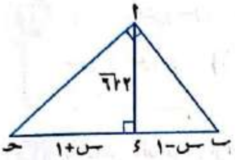


إذا كان : أء = ٨ سم ، أهـ = ٦ سم

فإن : ظا $\theta$ = ...............

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٨) فى الشكل المقابل :



باستخدام المعطيات الموجودة على الرسم

فإن : س = ...............

(أ) ٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٠ (د) ٢,٥

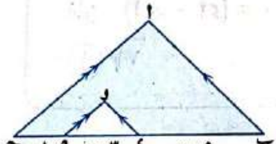
(١٩) إذا كان : جا $\theta$ = جتا $\theta$ حيث $\theta$ قياس زاوية حادة موجبة فإن : ظا ٢ $\theta$ = ...............

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) غير معرف. (د) $\sqrt{٣}$

(٢٠) أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

جا ٦٠٠° جتا (-٣٠°) + جا ١٥٠° جتا ٢٤٠° = جا $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢١) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة $\Delta$ ء هـ و = ٦ سم$^{٢}$

فإن مساحة المنطقة المظللة = ............... سم$^{٢}$.

(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٥٤

(٢٢) الدالة د : د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة فى ح

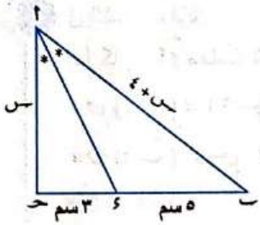
عندما ...............

(أ) ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ > ٠ (ب) ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ < ٠

(جـ) ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ = ٠ (د) ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ ≤ ٠

(٢٣) $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، $\overleftrightarrow{ءس}$ ينصف ∠ أ ء ب ويقطع $\overline{أب}$ فى س ، $\overleftrightarrow{ءص}$ ينصف ∠ أ ء حـ ويقطع $\overline{أحـ}$ فى ص **أثبت أن** : $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

(٢٤) **فى الشكل المقابل :**




س = ............ سم

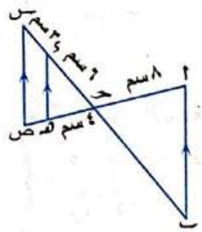
(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٢٥) أبسط صورة للمقدار : جا (١٨٠° + θ) × قا (٢٧٠° + θ) = ............

(أ) ٢ جا θ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ قا θ

(٢٦) **فى الشكل المقابل :**




$\overline{أب}$ // $\overline{ءهـ}$ // $\overline{سص}$

، أ حـ = ٨ سم ، حـ هـ = ٤ سم

، حـ ء = ٦ سم ، ء س = ٣ سم

**احسب** : طول كل من $\overline{بحـ}$ ، $\overline{هـص}$

(٢٧) إذا كان : (٣ س − ٥)° أصغر قياس موجب ، (٣ ص − ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن : س − ص = ............

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

(٢٨) جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = ............

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\pi$

# النموذج الرابع

امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

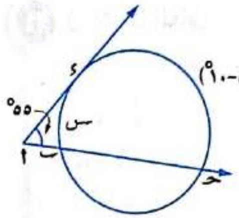
**١** فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أء}$ مماسًا للدائرة ، ق (∠ أ) = ٥٥°

، ق ($\overset{\frown}{ءحـ}$) = (٣ س − ١٠°)

، ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = س

فإن : س = ............°




(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

**٢** إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان : جا (θ + ١٠°) = جتا ٥٠°

فإن : θ = ............

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٢٠° (د) ٥٠°

**٣** دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٣ : ٥ فإذا كانت مساحة الدائرة الصغرى ٢٧ سم$^2$

فإن مساحة الدائرة الكبرى تساوى ............ سم$^2$

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

**٤** ابحث فى ح إشارة الدالة د : د (س) = ٨ + ٢ س − س$^2$ موضحًا ذلك على خط الأعداد

ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٨ + ٢ س − س$^2$ ≤ ٠ .

**٥** إذا كان س = −١ أحد جذرى المعادلة : س$^2$ − ك س − ٦ = ٠ .

فإن : ك = ............

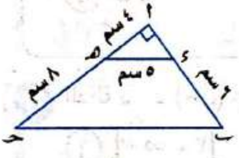
(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٦ (د) −٦

(٦) أ ب جـ مثلث فيه : $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الداخل وكان : أ ب > أ جـ

فإن : ء جـ ............... ء ب

(أ) < (ب) ≤ (جـ) > (د) =

(٧) في الشكل المقابل :




أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

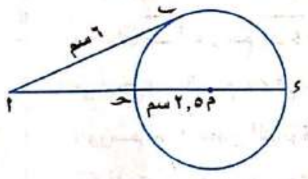
(١) أثبت أن : $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

(٢) أوجد : طول $\overline{ب جـ}$

(٨) الزاوية التي قياسها ٣٩٣٢° تقع في الربع ...............

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٩) في الشكل المقابل :




$\overline{أ ب}$ مماسة للدائرة م ، أ ب = ٦ سم

، جـ م = ٢,٥ سم

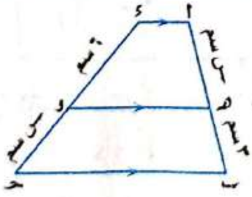
فإن : أ جـ = ............... سم.

(أ) ٩ (ب) ٤ (جـ) ٢,٥ (د) ٥

(١٠) أوجد الحل العام للمعادلة : جا ٢ θ = جتا θ

ثم أوجد قيم : θ ∈ ]٠ ، π[

(١١) في الشكل المقابل :

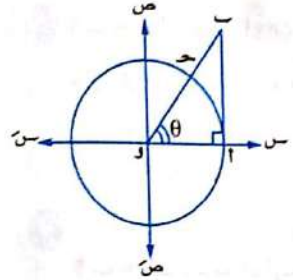



س = ............... سم

(أ) ٦ (ب) ٣ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٣ $\sqrt{٣}$ (د) ١٨

**(١٢) في الشكل المقابل :**




$\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة لدائرة الوحدة

فإن : و ب = ..............

(أ) جا θ (ب) جتا θ

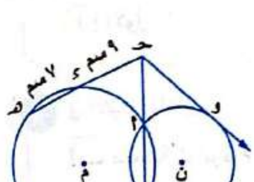
(جـ) قتا θ (د) قا θ

**(١٣)** الدالة د : د (س) = ٣ − س تكون غير سالبة عندما س ∈ ..............

(أ) $]-\infty ، ٣[$ (ب) $]-\infty ، ٣]$

(جـ) $[٣ ، \infty[$ (د) $]٣ ، \infty[$

**(١٤) في الشكل المقابل :**




دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ فقطع الدائرة م في ء ، هـ

حيث حـ ء = ٩ سم ، ء هـ = ٧ سم

، ورسم $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$ يمس الدائرة ن عند و

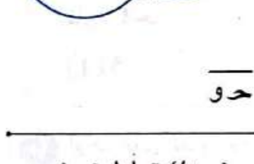
(١) **أثبت أن :** $ق_م$ (حـ) = $ق_ن$ (حـ)

(٢) إذا كان : أب = ١٠ سم **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$

**(١٥)** القياس الستيني لزاوية محيطية تحصر قوسًا طوله ٥ π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يساوي ..............

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

**(١٦) في الشكل المقابل :**




إذا كان : ء ص = ٦ سم وكان : $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : حـ س = .............. سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

**(١٧)** أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ح = ٤ سم ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{أح}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{أح}}$

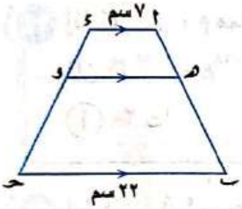
حيث ح ء = ١٢ سم **أثبت أن** : $\overline{\text{أب}}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، ح ، ء

**(١٨)** إذا كانت الدالة د : د (س) = أ جا ب س حيث أ > ٠ دالة دورية و دورتها $\frac{\pi}{٢}$

ومداها [-١ ، ١] فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (ج) $-\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

**(١٩)** **في الشكل المقابل :**




$\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٢}{٣}$

فإن : هـ و = .............. سم.

(أ) ٩ (ب) ١١

(ج) ١٣ (د) ١٥

**(٢٠)** إذا كان : Δ أ ب ح ~ Δ ء هـ و ، ق (∠أ) = ٥٠° ، ق (∠هـ) = ٦٠°

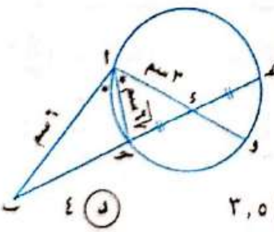
فإن : ق (∠ح) = ..............

(أ) ١١٠° (ب) ٧٠° (ج) ١٠٠° (د) ١٢٠°

**(٢١)** أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم ، ب ح = ٧ سم

، رسم $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ ح ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ في ء **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء ح}}$

**(٢٢)** **في الشكل المقابل :**



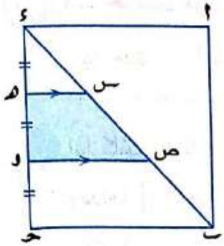

$\overleftarrow{\text{أح}}$ ينصف ∠ب أ ء ، ء منتصف $\overline{\text{هـ ح}}$

، أ ح = $\sqrt{٦}$ سم ، أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم

فإن : ء و = .............. سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٣,٥ (د) ٤

**(٢٣)** في الشكل المقابل :




أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم

، ء هـ = هـ و = و جـ

فإن : مساحة (الشكل س ص و هـ) = .............. سم$^{٢}$.

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

---

**(٢٤)** إذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة التربيعية : س$^{٢}$ + ١ = ٠

فإن : ل$^{٢٠١٨}$ + م$^{٢٠١٨}$ = ..............

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨

---

**(٢٥)** إذا كان : $\Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ ، جا أ + جتا ب = ١ **أوجد قيمة :** جا ٥ أ ؟

---

**(٢٦)** إذا كان أحد جذرى المعادلة : (س + ك)$^{٢}$ − ٦ س = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ك = ..............

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٣ (د) ٩

---

**(٢٧)** إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − ١٠ < ب س هى ]−٢ ، ٥[

فإن : ب = ..............

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) ٥

---

**(٢٨)** كون المعادلة التربيعية التى جذراها :

$\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ ت}{١ - ت}$

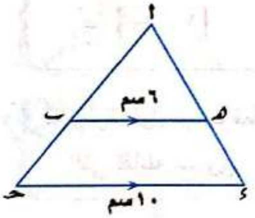
# النموذج الخامس

امتحان إلكترونى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

**١** إذا كان بُعد نقطة أ عن مركز دائرة يساوى ٢٤ سم ، وقوة هذه النقطة بالنسبة للدائرة تساوى ١٧٦ فأوجد : طول نصف قطر الدائرة.

**٢** فى الشكل المقابل :



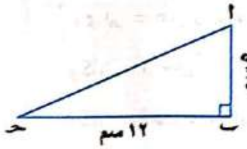

إذا كان : $\overline{ب هـ} // \overline{ء حـ}$

فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة شبه المنحرف ب حـ ء هـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{٢٥}{٨١}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

**٣** فى الشكل المقابل :

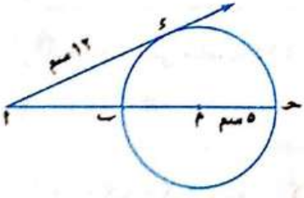



حا (طا$^{-١}$ ($\frac{٥}{١٢}$)) = ..............

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$

(جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) ١٣

**٤** فى الشكل المقابل :




الدائرة م طول نصف قطرها ٥ سم

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس لها عند ء ، أ ء = ١٢ سم

أوجد : طول $\overline{أ حـ}$

**٥** إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ٣ س − ٤ = صفر

فإن : ل م = ..............

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) −٤

**٦** مجموعة حل المعادلة : س$^{٢}$ + ٩ = ٠ في ع هي ...............

(أ) {-٣}  (ب) {٣}  (ج) {-٣ ، ٣}  (د) ∅

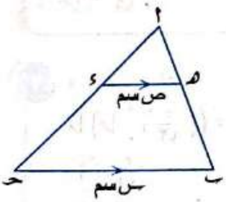
**٧** إذا كان م$_{١}$ هو مجموعة حل المتباينة : س$^{٢}$ − س − ٢ ≥ ٠ ، وكان م$_{٢}$ هو مجموعة حل المتباينة س$^{٢}$ + س − ٢ ≥ ٠ ، فإن : م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ...............

(أ) ∅  (ب) [-٢ ، ٢]

(ج) [-١ ، ١]  (د) ع − ]-١ ، ١[

**٨** دائرة طول نصف قطرها ٨ سم **أوجد** : طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي ١٥٠°

**٩** في الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ءهـ = ص سم ، ب جـ = س سم

وكان : ٢ س$^{٢}$ − ٣ س ص − ٥ ص$^{٢}$ = ٠

وكان : أ ب = ١٠ سم  فإن : هـ ب = ............... سم

(أ) ٣  (ب) ٤  (ج) ٦  (د) ٨

**١٠** الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها ...............

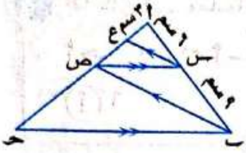
(أ) $\frac{١}{٤}\pi$  (ب) $\frac{٥}{٤}\pi$  (ج) $\frac{٣}{٤}\pi$  (د) $\frac{٧}{٤}\pi$

**١١** إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{\text{م (Δ س ص ع)}}{\text{م (Δ أ ب جـ)}}$ = ...............

(أ) $\frac{١}{٣}$  (ب) $\frac{١}{٩}$  (ج) $\frac{٤}{١}$  (د) $\frac{٩}{١}$

**(١٢) فى الشكل المقابل :**

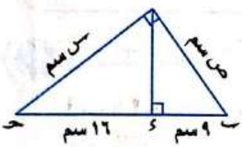



$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ب ص}}$

، أ س = ٦ سم ، س ب = ٩ سم ، أ ع = ٣ سم

**أوجد :** طول كل من $\overline{\text{ع ص}}$ ، $\overline{\text{ص حـ}}$

**(١٣) فى الشكل المقابل :**




$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ..............

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٢

**(١٤)** الدالة ص = جا $\left(\frac{\pi}{٤} + \text{س}\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) صفر

**(١٥)** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س + ٥ = ٠

(١) كون المعادلة التى جذراها : $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$

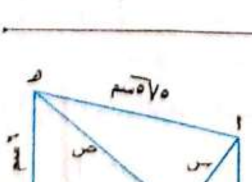
(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار : (ل$^{٢}$ + ٣ م)$^{٢}$

**(١٦)** إشارة د : د (س) = −٥ س تكون سالبة عندما ..............

(أ) س < −٥ (ب) س > −٥

(جـ) س < ٠ (د) س > ٠

**(١٧) فى الشكل المقابل :**




س + ص = .............. سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ١٨ (د) ٢١

(١٨) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة عند ب ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة فى حـ ، ء حيث حـ $\in \overline{أء}$ :

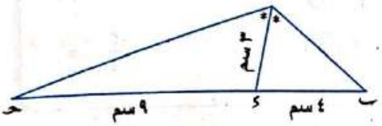
أحـ = ٣ سم ، أب = ٦ سم فإن : حـء = .............. سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(١٩) إذا كان : جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث °٩٠ < θ < °١٨٠

أوجد قيمة : جا (°١٨٠ − θ) + ظا (°٣٦٠ − θ) + ٢ جا (°٢٧٠ − θ)

(٢٠) فى الشكل المقابل :




أب × أحـ = .............. سم$^{٢}$

(أ) ٣٦ (ب) ٤٥

(جـ) ١٢ (د) ٢٧

(٢١) فى الدائرة م إذا تقاطع وتران $\overline{أب}$ ، $\overline{حـو}$ فى نقطة ء فإن : ..............

(أ) $ق_م$ (ء) = (أب)$^{٢}$ − نق$^{٢}$ (ب) أء × ءب = أم × مب

(جـ) $ق_م$ (ء) + أء × ءب = صفر (د) $ق_م$ (ء) = حـء × ءو

(٢٢) إذا كان : س = $\frac{١٣ + ١٢ ت}{٥ + ت}$ ، ص = $\frac{٥ + ت}{١ + ت}$ أوجد : س + ص

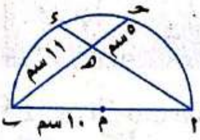
(٢٣) إذا كانت : ظا (٤ θ) = ظتا (٥ θ) ، فإن : جا (٣ θ) = .............. حيث ٣ θ قياس زاوية حادة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية هو ٤٨َ °٦٤ فإن قياسها الدائرى هو ..............

(أ) ٠,١٨ ء (ب) ٠,٣٦ ء (جـ) ١١,٣ ء (د) $\frac{٩}{٢٥}\pi$

(٢٥) في الشكل المقابل :

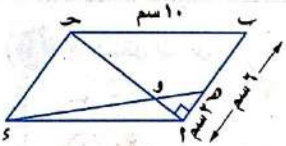



نصف دائرة (م) طول نصف قطر دائرتها = ١٠ سم

فإن : هـ ء = ............... سم.

(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(٢٦) في الشكل المقابل :




أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه :

أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم

، ق (∠ب أ حـ) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$

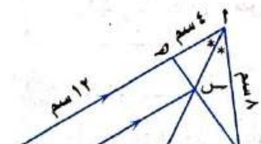
بحيث : أ هـ = ٢ سم ، $\overline{\text{ء هـ}}$ تقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في و

أثبت أن : △ أ و هـ متساوي الساقين.

(٢٧) إذا كان جذري المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ متساويان في المقدار ومختلفان في الإشارة فإن :...............

(أ) حـ = ٠ (ب) أ = ٠ (جـ) ب = ٠ (د) غير ذلك.

(٢٨) في الشكل المقابل :




$\frac{\text{ء و}}{\text{ب حـ}}$ = ...............

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

امتحان إلكترونى ٦

# النموذج السادس

أجب عن الأسئلة الآتية :

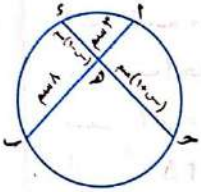
**١** إذا كان جذرا المعادلة : ٤ س$^{٢}$ − ١٢ س + حـ = ٠ حقيقيين متساويين

فإن : حـ = ..............

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) ٩   (د) ١٦

---

**٢** فى الشكل المقابل :




س = ..............

(أ) ٢٥   (ب) ٢٤

(جـ) ٥   (د) ٨

---

**٣** مجموعة حل المعادلة : (س + ١)$^{٢}$ = صفر فى ح هى ..............

(أ) {−١}   (ب) {١}   (جـ) {−١ ، ١}   (د) ∅

---

**٤** إذا كان : (٢ + ٣ ت) + (١ − ت) = س + ص ت

فما قيمتى : س ، ص (حيث : ت$^{٢}$ = −١) ؟

---

**٥** إذا كان ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ < ٠ فى المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ < ٠ حيث أ سالب هى ..............

(أ) ح   (ب) ∅   (جـ) ح$^{+}$   (د) ح$^{-}$

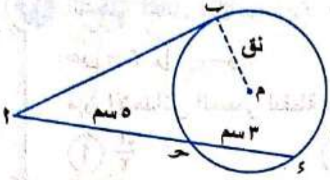
---

**٦** جميع .............. تكون متشابهة.

(أ) المثلثات.   (ب) المستطيلات.

(جـ) متوازيات الأضلاع.   (د) المربعات.

**٧** في الشكل المقابل :

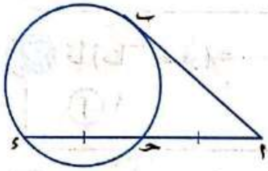



$ق_م(أ)$ = ..............

(أ) ٢٥ (ب) $(أب)^٢ - نق^٢$

(جـ) ٤٠ (د) $(أم)^٢ - (أب)^٢$

**٨** في الشكل المقابل :

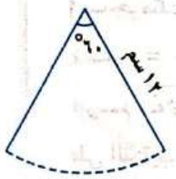



$\overline{أب}$ مماس ، حـ منتصف $\overline{أء}$ ، أب = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

**أوجد :** (١) طول $\overline{حـ ء}$

(٢) قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة.

**٩** في الشكل المقابل :



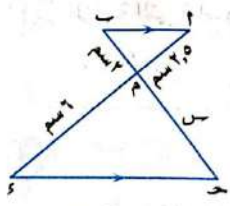

يتأرجح بندول بزاوية قياسها ٦٠°

فإذا كان طول نصف قطر البندول ١٢ سم

فإن طول المسار الدائرى الذى يقطعه البندول يساوى ..............

(أ) ٣ $\pi$ سم. (ب) ٤ $\pi$ سم. (جـ) ٦ $\pi$ سم. (د) ٨ $\pi$ سم.

**١٠** في الشكل المقابل :




س = .............. سم.

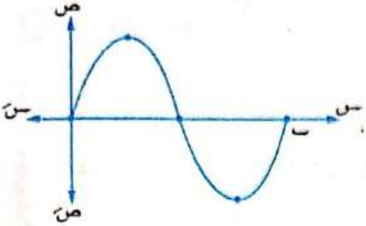
(أ) ٣,٦ (ب) ٤

(جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

**١١** أوجد إحدى قيم $\theta$ حيث $٠° \leq \theta \leq ٩٠°$ التى تحقق :

طا $(\theta + ٢٠°)$ = ظتا $(٣\theta + ٣٠°)$

**١٢** الشكل المقابل يمثل منحنى :




ص = ٣ جا $\frac{١}{٢}$ س

فإن الإحداثى السينى لنقطة ب هو ..............

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\pi$

(جـ) ٢ $\pi$ (د) ٤ $\pi$

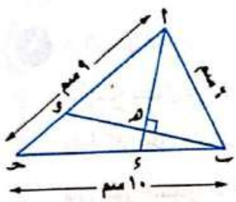
---

**١٣** ظا (جا$^{-١}$ صفر) = ..............

(أ) ١ (ب) ‎-١ (جـ) غير معرفة. (د) صفر

---

**١٤** فى الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٠ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث ب ء = ٤ سم

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، و

على الترتيب.

(١) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ (٢) أوجد : م (△ أ ب و) : م (△ حـ ب و)

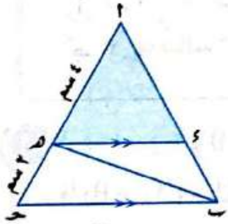
---

**١٥** الزاوية التى قياسها (-١٢٠°) تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

---

**١٦** فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

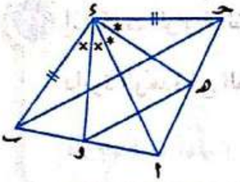
وكانت مساحة (△ هـ ب حـ) = ٩ سم$^{٢}$

فإن مساحة (△ أ ء هـ) = .............. سم$^{٢}$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

**(١٧)** في الشكل المقابل :

أثبت أن : $\overline{هـ و} \parallel \overline{حـ ب}$

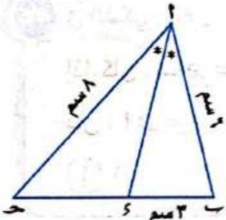



**(١٨)** في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ب أ حـ ، أ ب = ٦ سم

، أ حـ = ٨ سم ، ب ء = ٣ سم

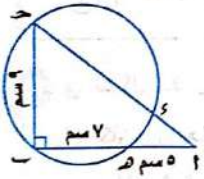
فإن : أ ء = .............. سم.




(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

**(١٩)** في الشكل المقابل :

ء حـ = .............. سم.




(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

**(٢٠)** إذا كان : أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة ، أ + ب + حـ = ٠ ، أ ≠ حـ

فإن جذرى المعادلة : (ب + حـ − أ) $س^٢$ + (حـ + أ − ب) س + (أ + ب − حـ) = ٠

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) حقيقيان مختلفان نسبيان.

(جـ) حقيقيان مختلفان غير نسبيين. (د) غير حقيقيين.

**(٢١)** في الشكل المقابل :

س = ..............



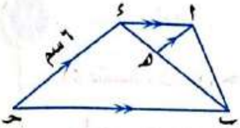

(أ) ٩ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٥

**٢٢** إذا كانت الزاوية التى قياسها θ والمرسومة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣} ، -\frac{٢}{٣}\right)$

فأوجد قيمة المقدار : جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ + ظتا $(٢\pi - \theta)$

**٢٣** فى الشكل المقابل :




إذا كان : ب هـ = ٢ هـ ء

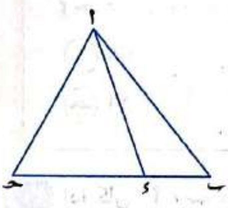
فإن : أ هـ = .............. سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

**٢٤** إشارة الدالة د : د (س) = ٧ - س تكون سالبة فى الفترة ..............

(أ) ]-∞ ، ٧[ (ب) ]-∞ ، ∞[ (جـ) ]٧ ، ∞[ (د) ]-٧ ، ٧[

**٢٥** فى الشكل المقابل :




إذا كان : $(أجـ)^٢$ = جـ ء × جـ ب

أثبت أن : Δ أجـ ء ~ Δ ب جـ أ

**٢٦** إذا كانت : جا θ = $-\frac{١}{٢}$ ، جتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

**٢٧** في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{ب ٢}$ مماس للدائرة م عند ب

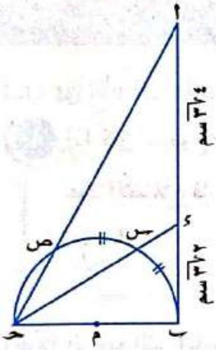
، ق $(\overset{\frown}{ب س})$ = ق $(\overset{\frown}{س ص})$

، ب ء = ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ء = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : ٢ ص = .............. سم.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢




**٢٨** إذا كان : $\frac{٣}{ل}$ ، $\frac{٣}{م}$ هما جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = صفر

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$

# النموذج السابع

امتحان إلكتروني ٧

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**١** إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم = ١٨٠° (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية السداسى المنتظم بالقياس الدائرى = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

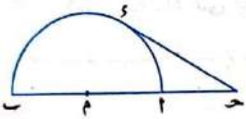
---

**٢** الزاوية التى قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

---

**٣** في الشكل المقابل :



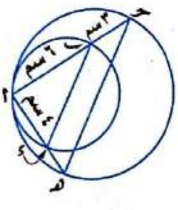

$\overline{حـ ء}$ تمس نصف الدائرة م فى ء

إذا كانت : ٢ حـ أ = أ ب = ٦ سم فإن : حـ ء = .............. سم.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) ٢٧

---

**٤** في الشكل المقابل :




دائرتان متماستان من الداخل فى أ

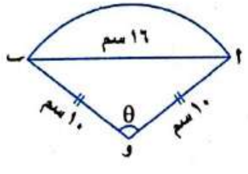
فإن : هـ ء = .............. سم.

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٣,٥ (د) ٤

---

**٥** في الشكل المقابل :

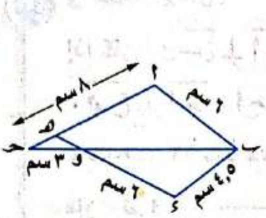



$\overset\frown{أ ب}$ قوس فى دائرة مركزها و

، طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ ب = ١٦ سم

**أوجد** : θ بالقياس الدائرى **ثم أوجد** : طول القوس $\overset\frown{أ ب}$

**٦** في الشكل المقابل :




أب = ٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم ،

جـ أ = ٨ سم ، و جـ = ٣ سم

، ب د = ٤,٥ سم ، د و = ٦ سم

**أثبت أن :** (١) Δ أ ب جـ ~ Δ د ب و

(٢) Δ هـ و جـ متساوى الساقين.

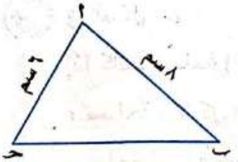
---

**٧** إذا كان : ٢ جا θ = $-\sqrt{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ فإن : θ = ..............

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٦\pi}{٧}$ (جـ) $\frac{٤\pi}{٣}$ (د) $\frac{٧\pi}{٦}$

---

**٨** في الشكل المقابل :




إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

فإن : ب جـ = .............. سم.

(أ) $٣\sqrt{١٠}$ (ب) $٢\sqrt{٢١}$

(جـ) ١٢ (د) ١٠

---

**٩** إذا كان : جا θ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (−٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

**فأوجد :** θ

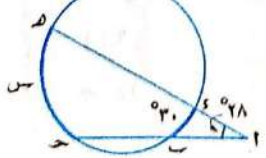
---

**١٠** إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٤ $س^{٢}$ + ٤ = ١٣ س

**فكون المعادلة التربيعية التى جذراها :** ل + م ، ل م

---

**١١** في الشكل المقابل :




س = ..............

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٨٦° (د) ٢٦°

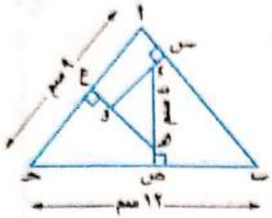
**١٢** في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{وس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{ءص} \perp \overline{بحـ}$

، $\overline{هـع} \perp \overline{أحـ}$ ، أحـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٢ سم ، ء هـ = ٤ سم

فإن : هـ و = ............ سم.




(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

**١٣** أى مما يأتى تحليل للمقدار : $س^٢ + ٤$

(أ) (س - ٢) (س + ٢)

(ب) $(س + ٢)^٢$

(جـ) $(س - ٢ ت)^٢$

(د) (س - ٢ ت) (س + ٢ ت)

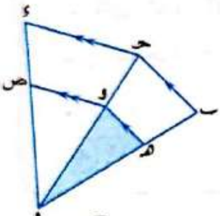
**١٤** في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة (الشكل ء ص و حـ) = ٤٠ $سم^٢$

، مساحة (الشكل و هـ ب حـ) = ٣٢ $سم^٢$

ومساحة (△ أ و ص) = ٥ $سم^٢$

فإن مساحة (△ أ هـ و) = ............ $سم^٢$.



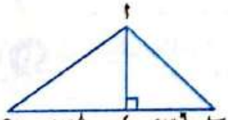

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

**١٥** عين إشارة الدالة د : د (س) = $س^٢$ - س + ١٢ ومن ذلك عين في ح

مجموعة حل المتباينة : $س^٢$ + ١٢ > س موضحًا الحل على خط الأعداد.

**١٦** في الشكل المقابل :

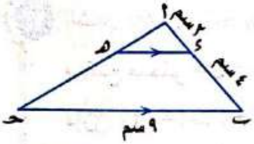
أ ب ‾ظتا ب + أ حـ ‾ظتا حـ = ............ سم




(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٤ (د) ٤٨

(١٧) في الشكل المقابل :

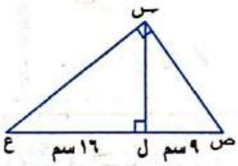



إذا كانت : مساحة Δ أ ء هـ = ٨ سم

فإن مساحة الشكل ء ب جـ هـ = ............ سم$^{٢}$.

(أ) ٢٧ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٤ (د) ١٦

(١٨) في الشكل المقابل :

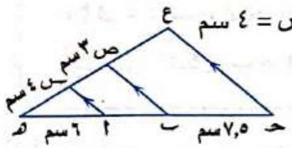



س ل = ............ سم.

(أ) ٧ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٤٤

(١٩) في الشكل المقابل :




$\overline{أس}$ // $\overline{ب ص}$ // $\overline{جـ ع}$ ، هـ أ = ٦ سم ، هـ س = ٤ سم

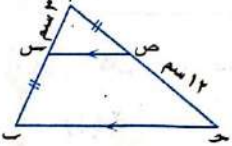
، س ص = ٣ سم ، ب جـ = ٧,٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ع ص}$

(٢٠) الدالة د : د (س) = ٢ س موجبة في ............

(أ) ح (ب) ح$_+$ (جـ) ح$_-$ (د) ح - {٠}

(٢١) في الشكل المقابل :

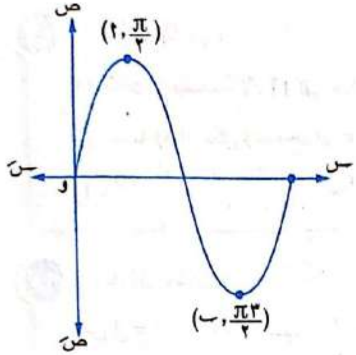



أ جـ = ............ سم.

(أ) ١٥ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

**٢٢** الشكل المقابل :



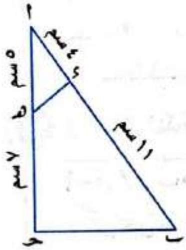

يوضح منحنى ص = جا س

فإن : |أ| + |ب| = ..............

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) $\pi$ (د) ٢ $\pi$

**٢٣** فى الشكل المقابل :




أ ب حـ مثلث ، أ ء = ٤ سم

، ء ب = ١١ سم

، أ هـ = ٥ سم ، هـ حـ = ٧ سم

**أثبت أن :** الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

**٢٤** حاصل ضرب جذور المعادلات :

أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠

، ب $س^٢$ + حـ س + أ = ٠

، حـ $س^٢$ + أ س + ب = ٠ يساوى ..............

(أ) أ ب حـ (ب) -١ (جـ) ١ (د) صفر

**٢٥** إذا كان : س + ت ص = $ت^{١٥}$ + ٢ $\sqrt{-٤}$ فإن : س + ص = ..............

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) -٣

**٢٦** إذا كان جذرا المعادلة $س^٢$ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين

فإن : ك $\in$ ..............

(أ) ]-∞ ، ٤[ (ب) ]٤ ، ∞[ (جـ) ]-∞ ، ٤] (د) {٤}

٢٧ إذا كان : أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم ، حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$(أ) = ..............

(أ) ٦٥ (ب) ٦٣ (جـ) ٤٩ (د) ٧

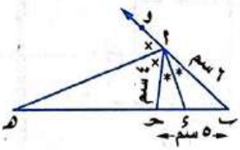
٢٨ فى الشكل المقابل :

$\Delta$ أ ب جـ فيه : أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء

، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ احسب : طول $\overline{ء هـ}$

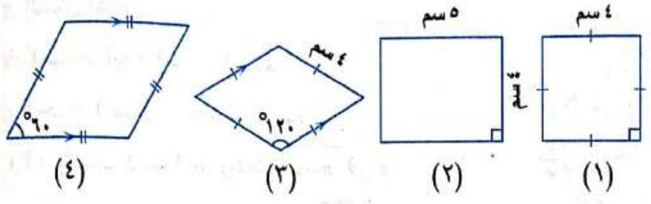


# النموذج الثامن

امتحان إلكترونى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أى مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟




(أ) المضلعان (١) ، (٢)　　(ب) المضلعان (١) ، (٣)

(جـ) المضلعان (٣) ، (٤)　　(د) المضلعان (٢) ، (٤)

(٢) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجبة $(٩٠^\circ - \theta)$ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(-\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : جا $(٩٠^\circ - \theta)$ = ..............

(أ) $-\frac{٣}{٥}$　　(ب) $\frac{٣}{٥}$　　(جـ) $-\frac{٤}{٥}$　　(د) $\frac{٤}{٥}$

(٣) الدالة د : د (س) = ٤ − ٢ س تكون غير موجبة إذا كانت ..............

(أ) س < ٢　　(ب) س > ٢　　(جـ) س ≤ ٢　　(د) س ≥ ٢

(٤) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

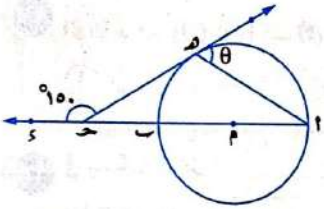
، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى هـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ فى و

(١) أثبت أن : $(\text{أ ب})^٢$ = أ و × أ ء　　(٢) أوجد : طول $\overline{\text{أ و}}$

(٥) قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله $\pi$ سم فى دائرة طول قطرها ٨ سم يساوى ..............

(أ) $\frac{\pi}{٨}$　　(ب) $\frac{\pi}{٤}$　　(جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$　　(د) $٢\pi$

**٦** في الشكل المقابل :




إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ مماس للدائرة

فإن : $\theta$ = ............... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٥٥ (د) ٦٠

---

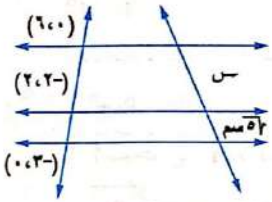
**٧** المعادلة التربيعية التى معاملات حدودها أعداد حقيقية وأحد جذريها (٣ − ت) هى ...............

(أ) س$^{٢}$ − ٦ س − ١٠ = ٠ (ب) ٢ س$^{٢}$ + ٦ س + ١٠ = ٠

(جـ) س$^{٢}$ − ٦ س + ١٠ = ٠ (د) س$^{٢}$ + ٦ س + ١٠ = ٠

---

**٨** في الشكل المقابل :




س = ............... سم.

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$

(جـ) ٣ $\sqrt{٥}$ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

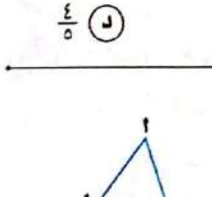
---

**٩** إذا كان : جتا $\theta$ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠° < $\theta$ < ٩٠° فإن : جا (٩٠° − $\theta$) = ...............

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

---

**١٠** في الشكل المقابل :




Δ أ ب حـ ~ Δ أ هـ ء

أثبت أن : الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

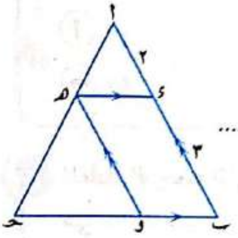
وإذا كان : أ ء = ٣ سم ، ب ء = ٢ سم

، أ هـ = ٢,٥ سم أوجد : طول $\overline{\text{هـ حـ}}$

**11** الدالة د : د $(\theta)$ = حا (ب $\theta$) دالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{3}$ فإن : ب = ..............

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) ٣ (د) ٦

**12** في الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ، $\overline{هـو} // \overline{أب}$

، $\frac{أء}{ءب} = \frac{2}{3}$ فإن : $\frac{\text{مساحة } (\square \text{ ءبوهـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أبحـ})}$ = ..............

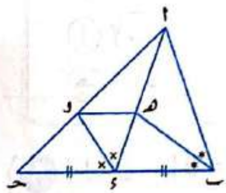
(أ) $\frac{21}{25}$ (ب) $\frac{16}{25}$

(جـ) $\frac{12}{25}$ (د) $\frac{13}{25}$

**13** إذا كان : ٤ س + ٢ ص ت = ٨ + ٤ س ت فإن : س + ص = ..............

(أ) ٢− (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

**14** في الشكل المقابل :




$\Delta$ أبحـ فيه : ء منتصف $\overline{بحـ}$ ، أب = أء

، $\overrightarrow{بهـ}$ ينصف ∠ب ، $\overrightarrow{ءو}$ ينصف ∠أءحـ

**أثبت أن :** $\overline{هـو} // \overline{بحـ}$

**15** إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^2 - 4 س - 4 = 0$

**أوجد :** (١) المعادلة التي جذراها : $ل^2$ ، $م^2$

(٢) القيمة العددية للمقدار : $ل^2 - 4 ل + 3$

**16** إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي ..............

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥

(جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١

**١٧** إذا كانت سـ = ٤ أحد جذرى المعادلة : سـ$^{٢}$ + م سـ = ٤ فإن ..............

(أ) م = −٣ (ب) م عدد زوجي.

(جـ) (١ − م) مربع كامل. (د) (أ) ، (جـ) صحيحان.

---

**١٨** مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة (سـ − ٢) (٣سـ − ١) ≤ ٠

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

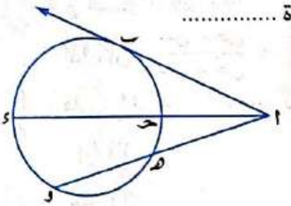
---

**١٩** مضلعان متشابهان مجموع مساحتى سطحيهما ٢٢٥ سم$^{٢}$ والنسبة بين محيطيهما ٤ : ٣

**أوجد :** مساحة سطح كل منهما.

---

**٢٠** في الشكل المقابل :




كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ما عدا العبارة ..............

(أ) (أب)$^{٢}$ = أحـ × أء

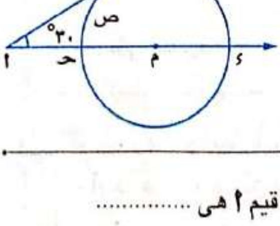
(ب) (أب)$^{٢}$ = أهـ × أو

(جـ) أحـ × أء = أهـ × أو

(د) أحـ × حـء = أهـ × هـو

---

**٢١** في الشكل المقابل :




سـ$^{٢}$ − ص$^{٢}$ = ..............

(أ) ٣٠° × ١٨٠° (ب) ١٨٠° × ٦٠°

(جـ) ٦٠° (د) ١٥٠°

---

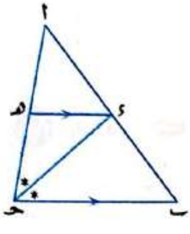
**٢٢** إذا كان : أ ، − أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ..............

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٣) أوجد فى أبسط صورة بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : حا (−٣٠°) حتا ٤٢٠° + $\frac{\text{طا } ٢٥°}{\text{طتا } ٦٥°}$

(٢٤) أوجد الحل العام للمعادلة : قتا ٦ θ = قا ٣ θ

(٢٥) فى الشكل المقابل :

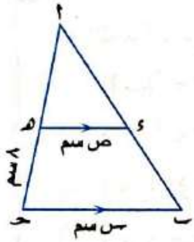



$\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ = ..............

(أ) $\frac{\text{ءهـ}}{\text{بحـ}}$ (ب) $\frac{\text{أء}}{\text{أب}}$

(جـ) $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$

(٢٦) فى الشكل المقابل :




إذا كان : $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{٢}{٧}$

فإن : أهـ = .............. سم.

(أ) ١٦ (ب) ١٥

(جـ) ١٢ (د) ١٠

(٢٧) دائرة م طول قطرها ٦ سم ، د$_{\text{م}}$ (ب) = صفر فإن : ب تقع ..............

(أ) داخل الدائرة. (ب) خارج الدائرة.

(جـ) على الدائرة. (د) فى مركز الدائرة.

(٢٨) أثبت أن جذرى المعادلة : ٧ س$^{٢}$ − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان غير حقيقيين ،
ثم أوجد هذين الجذرين باستخدام القانون العام.

# النموذج التاسع

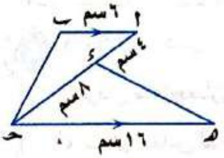
امتحان إلكترونى ٩

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إشارة الدالة د حيث د (س) = ٦ − ٢ س تكون موجبة إذا كانت ..............

(أ) س < ٣  (ب) س ≤ ٣  (جـ) س > ٣  (د) س = ٣

(٢) فى الشكل المقابل :




إذا كان $\overline{أب} // \overline{هـ حـ}$

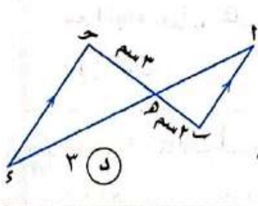
فإن $\frac{هـ ء}{ب حـ}$ = ..............

(أ) $\frac{٤}{٣}$  (ب) $\frac{٣}{٤}$  (جـ) $\frac{٢}{٣}$  (د) $\frac{١}{٢}$

(٣) إذا كان : طا (٩٠° − θ) = طا ٢ θ حيث ٠° < θ < ٩٠°  فإن : جا ٢ θ = ..............

(أ) −١  (ب) صفر  (جـ) ١  (د) $\frac{١}{٢}$

(٤) فى الشكل المقابل :

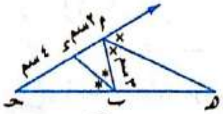



$\overline{أب} // \overline{حـ ء}$ ، ب هـ = ٢ سم ، حـ هـ = ٣ سم

، أ ء = ١٠ سم فإن : أ هـ = .............. سم.

(أ) ٤  (ب) ٦  (جـ) ٢  (د) ٣

(٥) فى الشكل المقابل :




ب هـ = .............. سم.

(أ) ٦  (ب) ٨  (جـ) ٩  (د) ١٠

(٦) زاوية محيطية فى دائرة قياسها ٦٠° تقابل قوسًا طوله ٤ π سم **فأوجد** : محيط الدائرة مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

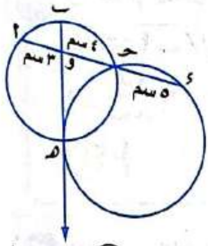
(٧) **بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :**

جا ٤٢٠° جتا ٣٣٠° + (جا ١٥° ÷ جا ١٦٥°) + ظا² ٦٥° − ظتا ٢٥° ظا ٦٥°

(٨) جتا (٩٠° − θ) × قتا θ = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ظتا θ

(٩) **فى الشكل المقابل :**




دائرتان متقاطعتان فى حـ ، هـ

، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

إذا كان : أ و = ٣ سم ، و حـ = ٤ سم ، حـ د = ٥ سم

فإن : ب هـ = .............. سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(١٠) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٣٠° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون فى الربع ..............

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

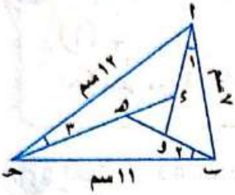
(١١) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ..............

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(١٢) أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، د منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ فقطع الدائرة فى هـ

**أثبت أن :** (١) (ب د)² = أ د × د هـ (٢) Δ هـ ب د ~ Δ أ حـ د

13 في الشكل المقابل :



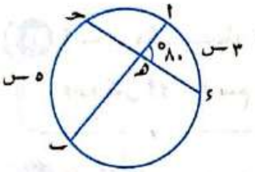

إذا كان : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

فإن ء هـ : هـ و : و ء = ..............

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

14 في الشكل المقابل :




س = ..............

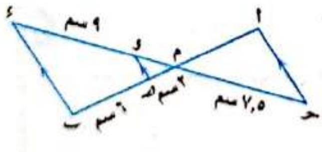
(أ) ١٠° (ب) ٢٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٤٠°

15 إذا كان : ظا ٣ θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة فإن : θ = ..............

(أ) ١٠° (ب) ١٥° (جـ) ٢٠° (د) ٣٠°

16 في الشكل المقابل :




$\overline{أب} \cap \overline{جـ ء} = \{م\}$ ، هـ ∈ $\overline{م ب}$

، و ∈ $\overline{م ء}$ ، $\overline{أجـ}$ // $\overline{و هـ}$ // $\overline{ء ب}$

أوجد : طول كل من $\overline{م و}$ ، $\overline{أ م}$

17 المنصف الداخلي لزاوية رأس المثلث .............. المنصف الخارجي لها.

(أ) يوازي (ب) عمودي على

(جـ) يساوي (د) ينطبق على

18 إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س² − ٥ س − ٦ = ٠

فإن القيمة العددية للمقدار : ل² − ٥ ل + ٣ = ..............

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٣

**١٩** المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان معامل التشابه لهما يساوى ..........

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) ١

(جـ) أكبر من ١　　(د) أصغر من ١

**٢٠** ابحث إشارة الدالة د : د (س) = − س$^{٢}$ + ٨ س − ١٥

ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

**٢١** أ ب حـ مثلث محيطه ٢٧ سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ب ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ فى ء

فإذا كان أ ء = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم أوجد طول كل من : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

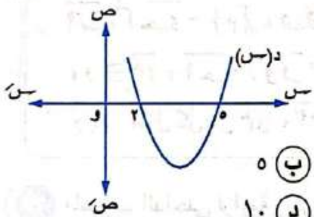
**٢٢** إذا كان أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠ ، أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) غير موجب فإن جذرى المعادلة يكونان ..........

(أ) متساويان.　　(ب) غير حقيقيين.

(جـ) مركبين مترافقين.　　(د) حقيقيان مختلفان.

**٢٣** فى الشكل المقابل :



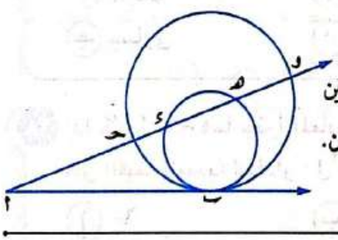

د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + حـ

فإن : $\frac{\text{ب + حـ}}{\text{أ}}$ = ..........

(أ) ٣　　(ب) ٥

(جـ) ٧　　(د) ١٠

**٢٤** فى الشكل المقابل :

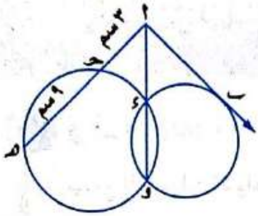



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرتين عند ب ، $\overrightarrow{\text{أ و}}$ قاطع للدائرتين

أثبت أن : (١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هو المحور الأساسى للدائرتين.

(٢) أ حـ : أ ء = أ هـ : أ و

**٢٥** في الشكل المقابل :




إذا كان : أحـ = ٣ سم

، حـ هـ = ٩ سم

فإن : أب = ............... سم.

(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٩ (د) ٦

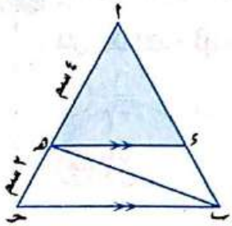
---

**٢٦** أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{-١٨}$ = ...............

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) - ت (د) ت

---

**٢٧** في الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

وكانت مساحة (△ هـ ب حـ) = ٩ $سم^٢$

فإن : مساحة (△ أ ء هـ) = ............... $سم^٢$.

(أ) ٦ (ب) ١٢

(جـ) ١٨ (د) ٢٧

---

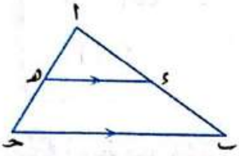
**٢٨** إذا كانت : س = ٢ + ٣ ت ، ص = $\frac{٣ + ت}{ت}$

فأوجد قيمة المقدار : $س^٢$ + ٢ س ص + $ص^٢$

# النموذج العاشر

امتحان إلكترونى ١٠

**١** في الشكل المقابل :




جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ما عدا التعبير ..............

(أ) $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ (ب) $\frac{أد}{دب} = \frac{دهـ}{بجـ}$

(جـ) $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ (د) $\frac{أب}{بد} = \frac{أجـ}{هـجـ}$

**٢** إذا كان : جا $\alpha$ = جتا $\beta$ حيث $\alpha$ ، $\beta$ زاويتان حادتان

فإن : ظا $(\alpha + \beta)$ = ..............

(أ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) ١

(جـ) $\sqrt{3}$ (د) غير معرف.

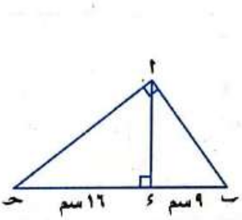
**٣** أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة :

٤ ك $س^2$ + ٧ س + $ك^2$ + ٤ = صفر هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

**٤** القيمة الصغرى للدالة د : حيث د $(\theta)$ = ٣ جتا $(2\,\theta)$ هى ..............

(أ) −٦ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

**٥** في الشكل المقابل :

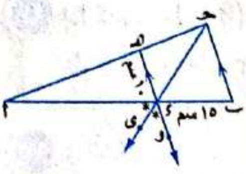



طول $\overline{أب}$ = .............. سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٦ في الشكل المقابل :




إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

، ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ ء و ى)

وكان : ء هـ = ١٠ سم ، ب ء = ١٥ سم.

فإن : أ ء = .............. سم.

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

---

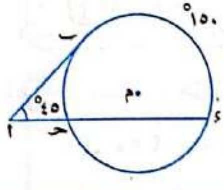
٧ المعادلة التي جذراها (٢ + ٣ ت) ، (٢ − ٣ ت) هي ..............

(أ) س$^{٢}$ + ٤ س + ١٣ = ٠ (ب) س$^{٢}$ − ٤ س + ١٣ = ٠

(جـ) س$^{٢}$ + ٤ س − ١٣ = ٠ (د) س$^{٢}$ − ٤ س − ١٣ = ٠

---

٨ في الشكل المقابل :




$\overline{أب}$ مماسة للدائرة م عند ب ، $\overleftarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة في حـ ، ء

، ق (∠ أ) = ٤٥° ، ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = ١٥٠°

أوجد : ق = ($\overset{\frown}{بحـ}$)

---

٩ (١ − ت)$^{١٢}$ = ..............

(أ) −٦٤ ت (ب) ٦٤ ت (جـ) −٦٤ (د) ٦٤

---

١٠ إذا كان معامل تشابه المضلع م$_{١}$ للمضلع م$_{٢}$ هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشابه المضلع م$_{٢}$ للمضلع م$_{٣}$ هو $\frac{١}{٣}$ فأي من العلاقات الآتية يكون صحيح ؟

(أ) مساحة (م$_{١}$) + مساحة (م$_{٢}$) = مساحة (م$_{٣}$)

(ب) مساحة (م$_{١}$) + مساحة (م$_{٣}$) = مساحة (م$_{٢}$)

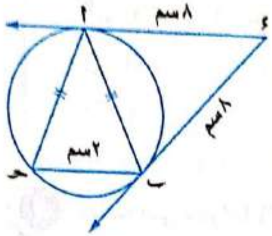
(جـ) $\sqrt{\text{مساحة (م}_{١}\text{)}}$ + $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٢}\text{)}}$ = $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٣}\text{)}}$

(د) $\sqrt{\text{مساحة (م}_{١}\text{)}}$ + $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٣}\text{)}}$ = $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٢}\text{)}}$

**(١١)** إذا كانت : جا (٢ θ) = جتا (٤ θ) حيث θ زاوية حادة موجبة

**فأوجد :** ظا (٩٠° − ٣ θ)

**(١٢)** **في الشكل المقابل :**




إذا كان : $\overleftrightarrow{ءأ}$ ، $\overleftrightarrow{ءب}$ مماسان للدائرة

عند أ ، ب على الترتيب

، ءأ = ءب = ٨ سم ، ب حـ = ٢ سم

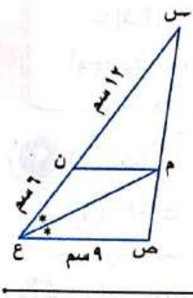
فإن : أ حـ = ............... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

**(١٣)** القيمة العظمى للدالة ع حيث ع (θ) = ٤ جا θ هي ...............

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٤ (د) ٤

**(١٤)** **في الشكل المقابل :**



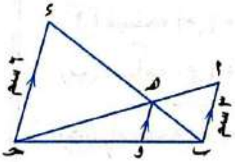

س ن = ١٢ سم ، ن ع = ٦ سم

، ص ع = ٩ سم

، $\overrightarrow{عم}$ ينصف ∠ س ع ص

**أثبت أن :** $\overline{مُن}$ // $\overline{صع}$

**(١٥)** **في الشكل المقابل :**



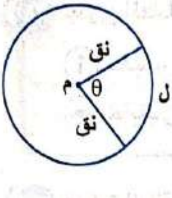

إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{حـ ء}$

فإن : هـ و = ............... سم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٢

(جـ) ١,٥ (د) ١

**(١٦) من الشكل المقابل :**




$\theta^{ء} =$ ..............

(أ) $\frac{ل}{نق}$  (ب) $\frac{نق}{ل}$

(جـ) نق × ل  (د) ل × ٢ نق

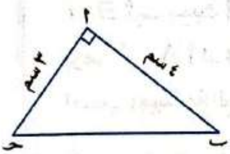
---

**(١٧)** إذا كان : ٥ جا θ − ٣ = صفر ، $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

**أوجد قيمة :** جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ + جا $(٢\pi - \theta)$ − جتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right)$ + جتا θ

---

**(١٨) فى الشكل المقابل :**



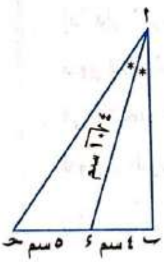

ق (∠ أ ب حـ) = ..............

(أ) جا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$  (ب) جا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$

(جـ) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$  (د) ظتا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$

---

**(١٩) فى الشكل المقابل :**



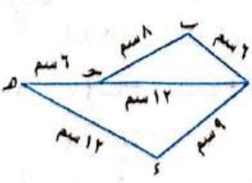

محيط Δ أ ب حـ = .............. سم.

(أ) ٣٦  (ب) ٣٢

(جـ) ٢٨  (د) ٢٤

---

**(٢٠) الشكل المقابل :**




أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، أ حـ = ١٢ سم ، حـ هـ = ٦ سم

، أ ء = ٩ سم ، ء هـ = ١٢ سم

**برهن أن :** (١) Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ  (٢) $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ ء

**٢١** جذرى المعادلة $س^٢ - ٢\sqrt{٥}\, س + ١ = ٠$ يكونان ..............

(أ) حقيقيان نسبيان. (ب) غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) حقيقيان وغير نسبيين.

**٢٢** إشارة الدالة د : د (س) = س − ٤ حيث س ∈ ]٤ ، ∞[ تكون ..............

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) سالبة وموجبة معًا.

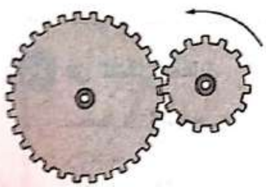
**٢٣** أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم

، ء ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{أ حـ}$ بحيث أ هـ = ٤ سم

**برهن أن :** Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب حـ ، وإذا كانت مساحة المثلث أ هـ ء = ٣ سم$^٢$

**احسب :** مساحة المثلث أ ب حـ

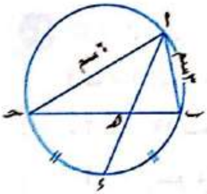
**٢٤** **فى الشكل المقابل :**



إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاثة لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة فى الاتجاه الموضح بالسهم فإن الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح ..............

(أ) $\frac{-\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $٢\pi$

**٢٥** **فى الشكل المقابل :**




إذا كان : ء منتصف $\widehat{ب حـ}$

، أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن : $\frac{ب هـ}{ب حـ}$ = .............. سم.

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٦) مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = س$^{٢}$ − ٢ س − ٣ ثم عين إشارة الدالة د

(٢٧) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٤

فإن النسبة بين مساحتى سطحيهما ...............

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦

(٢٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

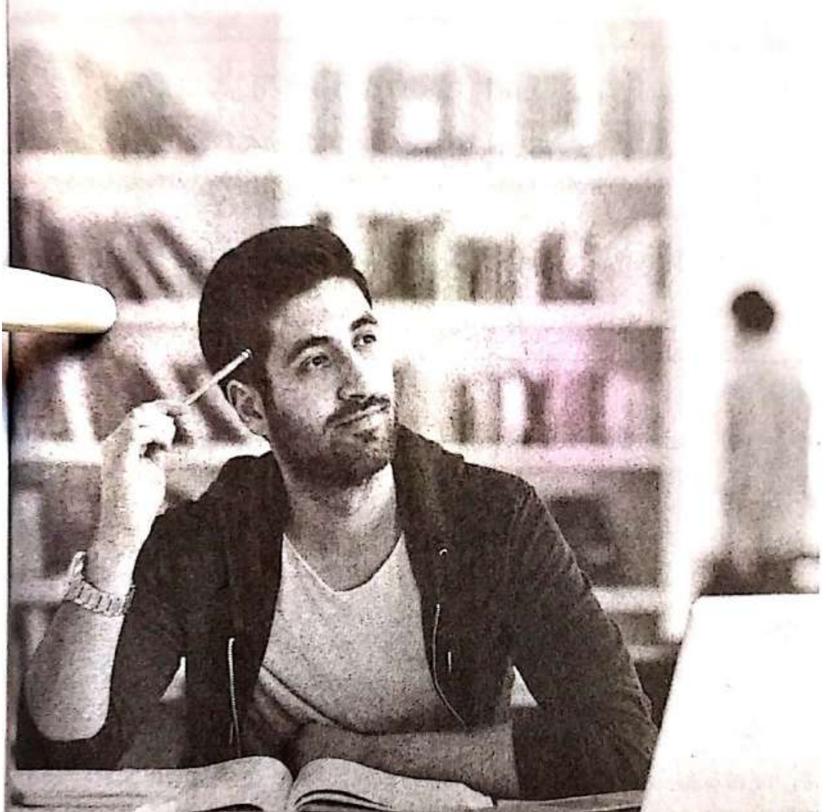
حيث أ > ٠ ، ل < م فإن مجموعة حل المتباينة

أ س$^{٢}$ + ب س + حـ < ٠ هى ...............

(أ) ]−∞ ، ل[ (ب) ]ل ، م[

(جـ) ]م ، ∞[ (د) ع − [ل ، م]

# الإجابات



## إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

### الاختبار الأول

**1** (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (د)

**2** (١) $\{1 + 2\sqrt{3}$ ت ، $1 - 2\sqrt{3}$ ت$\}$
(ب) $\frac{15}{12}$ ، $-\frac{10}{12}$

### الاختبار الثانى

**1** (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د)
(٤) (أ) (٥) (د) (٦) (د)

**2** (١) أثبت بنفسك ،
مجموعة الحل = $\{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{3}$ ت ، $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{11}}{3}$ ت$\}$
(ب) ك ∈ ]١ ، ∞[

### الاختبار الثالث

**1** (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (أ)

**2** (١) ٤ (ب) ٢

### الاختبار الرابع

**1** (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)
(٤) (أ) (٥) (د) (٦) (جـ)

**2** (١) ٢ س$^2$ + ٤ س + ٨ = ٠
(ب) ٣٩ − ٢٦ ت

### الاختبار الخامس

**1** (١) (د) (٢) (أ) (٣) (أ)
(٤) (جـ) (٥) (أ) (٦) (د)

**2** (١) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
- د موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ١]
- د سالبة عندما س ∈ ]−٢ ، ١[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ١}

(٢) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
- د سالبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٣]
- د موجبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

### الاختبار السادس

**1** (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ)
(٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (جـ)

**2** (١) ١ − ت ، ٢
(ب) • د موجبة عندما س ∈ ح − [−٥ ، $1\frac{1}{2}$]
- د سالبة عندما س ∈ ]−٥ ، $1\frac{1}{2}$[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، $1\frac{1}{2}$}
- مجموعة الحل = [−٥ ، $1\frac{1}{2}$]



## إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

### الاختبار الأول

**1** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د)
(٤) (د) (٥) (د) (٦) (ب)

**2** (١) (١) الرابع. (٢) الثالث. (٣) الأول.
(ب) (١) ٢٢٨° ، −٤٩٢° (٢) ٤٣٠° ، −٢٩٠°
(٣) ٢٥٠° ، −١٠°

### الاختبار الثانى

**1** (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (جـ) (٦) (جـ)

**2** (١) ٢١ سم (ب) $\frac{5\pi}{18}$

### الاختبار الثالث

**1** (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (د)
(٤) (ب) (٥) (جـ) (٦) (ب)

**2** (١) $-\frac{11}{8}$
(ب) جا θ = $\frac{3}{5}$ ، جتا θ = $-\frac{4}{5}$ ، ظا θ = $-\frac{3}{4}$
، قا θ = $-\frac{5}{4}$ ، قتا θ = $\frac{5}{3}$ ، ظتا θ = $-\frac{4}{3}$

### الاختبار الرابع

**1** (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

**2** (١) $\frac{28}{15}$
(ب) θ = ٤٥° + ١٢٠° ن ، أ θ = ٧٥° + ٣٦٠° ن
، ن ∈ ص
θ = ٤٥° ، أ ٧٥°

### الاختبار الخامس

**1** (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (د) (٦) (د)

**2** (١) ١٥° + ٣٠° ن ، ن ∈ ص
(ب) (١) ]−∞ ، ∞[ (٢) [−١ ، ١] (٣) ٢π

### الاختبار السادس

**1** (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (جـ)

**2** (١) ٤٨ ٥٦َ ، ١٢٩° ، ٤٢.٤ ، ٢٣٠°
(ب) ١٥٠°

# إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة

## الاختبار الأول

**١** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

**٢** (١) $\frac{٣}{٢}$ (٢) ٦ ، ٤

## الاختبار الثانى

**١** (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (جـ)

**٢** أثبت بنفسك.

## الاختبار الثالث

**١** (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب)
(٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (أ)

**٢** أثبت بنفسك.

## الاختبار الرابع

**١** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (د) (٥) (د) (٦) (د)

**٢** أثبت بنفسك.

## الاختبار الخامس

**١** (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب)
(٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

**٢** أثبت بنفسك.

## الاختبار السادس

**١** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (جـ)

**٢** ٦ سم ، ٢١ سم

## الاختبار السابع

**١** (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (ب)

**٢** أثبت بنفسك ، ٣,٦ سم

## الاختبار الثامن

**١** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (أ)
(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (د)

**٢** أثبت بنفسك.

## الاختبار التاسع

**١** (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (أ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (جـ)

**٢** (١) ٨ $\sqrt{٢}$ سم (٢) $\sqrt{١٧}$ سم



# إرشادات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات

## النموذج الأول

**١** (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ)

**٢** (١) ]−٢ ، ١[ (٢) الثالث
(٣) ٢٠٠° (٤) س$^{٢}$ − ٨ س + ١٠ = ٠

**٣** (١) − ت (ب) ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

**٤** (أ) (١) ارسم بنفسك.
(٢) ● د سالبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٥]
● د موجبة عندما س ∈ ]٢ ، ٥[
● د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٥}
(ب) ٦ + ٢ ت

**٥** (أ) [−٤ ، ١] (ب) $\frac{-١}{٥}$

## النموذج الثانى

**١** (١) − ت (٢) ٩
(٣) ١٨° (٤) [$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

**٢** (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (د)

**٣** (أ) ٢
(ب) ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً ، أ ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً

**٤** (أ) (١) أ = −٩ ، ب = ٣
(٢) [−٢ ، ١]
(ب) ٨٢° ٤٥َ ٢٨ً

**٥** (أ) ٢٠ عددًا (ب) $\frac{١٠}{٢}$

## إرشادات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة

### النموذج الأول

**١** (١) متشابهين
(٢) أولاً : أحـ ، حـ ء ثانيًا : (ب ء)$^{٢}$
ثالثًا : ب ء × أحـ

**٢** (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د)

**٣** (أ) ٣ سم ، $\frac{١}{٢}$ سم
(ب) أثبت بنفسك ، ١٠ : ٤

**٤** (أ) ٦ سم ، ١٢ سم
(ب) ٥,٥ سم

**٥** (أ) أثبت بنفسك.
(ب) أولاً : ٦ سم ثانيًا : أثبت بنفسك.

### النموذج الثانى

**١** (١) متشابهين. (٢) أحـ ب
(٣) ن س × ن ص (٤) ٦ سم

**٢** (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

**٣** (أ) أثبت بنفسك ، ٢,٥ سم
(ب) أثبت بنفسك

**٤** (أ) ٢,٧ سم ، ٤,٨ سم ، ٣,٦ سم
(ب) أثبت بنفسك ، ٩ : ٤

**٥** (أ) ٣ سم
(ب) ٦ سم ، ٧,٢ سم



## إجابات الامتحان التجريبى

**١** (د) **٢** (ب)

**٣**
∵ (٠,٦ ، ب) تقع على دائرة الوحدة ، هـ زاوية حادة
∴ النقطة تقع فى الربع الأول
، (٠,٦)$^{٢}$ + ب$^{٢}$ = ١ ∴ ب$^{٢}$ = ٠,٦٤
∴ ب = ٠,٨ ∴ جتا هـ = ٠,٨
الطرف الأيسر = ١٠ جا (٩٠° − هـ) − ظا$^{٢}$ ٣٩٠°
= ١٠ جتا هـ − ظا$^{٢}$ (٣٦٠° + ٣٠°)
= ١٠ جتا هـ − ظا$^{٢}$ ٣٠°
= ١٠ × ٠,٨ − ($\sqrt{٣}$)$^{٢}$ = ٥
∴ ظا س = ٥ (موجبة) ، ∵ س ∈ ]٠ ، π[
∴ س تقع فى الربع الأول ∴ س ≈ ٧٨° ٤١َ ٢٤ً

**٤** (أ) **٥** (أ)

**٦**
∵ هـ ء // س ص // ب حـ ، هـ س = س ب
∴ ء ص = ص حـ
فى Δ أ حـ ء :
∵ أص ينصف ∠ حـ أ ء ∴ $\frac{أحـ}{أء} = \frac{حـ ص}{ص ء}$
، ∵ ء ص = ص حـ ∴ أحـ = أء
∴ Δ أ حـ ء متساوى الساقين.

**٧** (ب) **٨** (د)

**٩**
فى Δ أ ب حـ :
∵ أء ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$
∴ $\frac{٦}{١٠} = \frac{ب ء}{٨ − ب ء}$ ∴ ١٠ ب ء = ٤٨ − ٦ ب ء
∴ ١٦ ب ء = ٤٨ ∴ ب ء = ٣ سم
فى Δ أ ب ء : ق (∠ ب) = ٩٠° ، ب هـ ⊥ أء
∴ أء = $\sqrt{٦^{٢} + ٣^{٢}}$ = ٣$\sqrt{٥}$ سم
، ∵ (ب ء)$^{٢}$ = ء هـ × ء أ
∴ (٣)$^{٢}$ = ء هـ × ٣$\sqrt{٥}$ ∴ ء هـ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٥}$ سم

**١٠** (ب) **١١** (جـ)

**١٢**
ل + م = ٥ ، ل م = ٧
نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة :
∴ هـ + و = ل$^{٢}$ م + م$^{٢}$ ل = ل م (ل + م)
= ٧ (٥) = ٣٥
، هـ و = (ل$^{٢}$ م) (م$^{٢}$ ل) = (ل م)$^{٣}$ = (٧)$^{٣}$ = ٣٤٣
∴ المعادلة المطلوبة : س$^{٢}$ − ٣٥ س + ٣٤٣ = ٠

**١٣** (جـ) **١٤** (ب) **١٥** (ب) **١٦** (جـ)

**١٧**
ΔΔ أ م ء ، ب م حـ فيهما :
ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ حـ ب) من خواص الرباعى الدائرى
، ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ء ب حـ) من خواص الرباعى الدائرى
∴ Δ أ م ء ~ Δ ب م حـ
∴ $\frac{م(Δ أ م ء)}{م(Δ ب م حـ)} = \left(\frac{أء}{ب حـ}\right)^{٢} = \left(\frac{٨}{١٢}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

**١٨** (د) **١٩** (ب)

**٢٠**
∵ إشارة المميز : ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = (٠)$^{٢}$ − ٤ (٤)
= −١٦ (< صفر)
∴ المعادلة س$^{٢}$ + ٤ = ٠ ، ليس لها جذور حقيقية.
، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح
، مجموعة حل المتباينة = ∅

# إجابات نماذج الامتحانات النهائية

## النموذج الأول

❶ (جـ) ❷ (ب)

❸

∵ ل + م = ٥ ، ل م = ٦

، بفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢ = ٥ + ٢ = ٧

، هـ و = (ل + ١) (م + ١) = ل م + ل + م + ١

= ٦ + ٥ + ١ = ١٢

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^2$ − ٧ س + ١٢ = ٠

❹ (أ) ❺ (ب)

❻

∵ $\overline{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ∴ $\frac{اد}{اب} = \frac{اهـ}{اجـ}$

، ∵ $\overline{دجـ}$ // $\overline{بو}$ ∴ $\frac{اد}{اب} = \frac{اجـ}{او}$

∴ $\frac{اهـ}{اجـ} = \frac{اجـ}{او}$ ∴ $(اجـ)^2$ = اهـ × او

❼ (أ) ❽ (ب) ❾ (جـ)

❿

∵ (−س ، س) تقع على دائرة الوحدة

∴ $س^2 + (-س)^2 = ١$

∴ ٢ $س^2$ = ١

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ويرفض الحل السالب).

∴ ٢ جا (٢٧٠° − θ) − ظتا θ

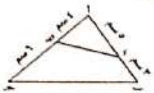
= −٢ جا θ − ظتا θ = −٢ $\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) - \sqrt{٢}$

= $\sqrt{٢} - \sqrt{٢}$ = ٠

⓫ (د) ⓬ (ب)

⓭

∵ ΔΔ ادهـ ، اجـب فيهما



$\frac{اد}{اجـ} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{اهـ}{اب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{اد}{اجـ} = \frac{اهـ}{اب}$ ، ∵ ∠ا مشتركة

∴ Δ ادهـ ~ Δ اجـب (المطلوب أولًا)

وينتج من التشابه أن : ق (∠ادهـ) = ق (∠اجـب)

∴ الشكل دهـجـب رباعى دائرى. (المطلوب ثانيًا)

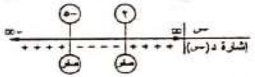
⓮ (د) ⓯ (ب)

⓰

بوضع $س^2$ + ٣ س − ١٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٥ أو س = ٢ ، ∵ ا > ٠



∴ د (س) موجبة عندما س ∈ ع − [−٥ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، ٢}

، د (س) سالبة عندما س ∈ ]−٥ ، ٢[

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٥ ، ٢]

⓱ (أ) ⓲ (ب)

⓳

∵ فى Δ ادب :

∵ $\overleftrightarrow{دس}$ ينصف ∠ادب ∴ $\frac{اد}{دب} = \frac{اس}{سب}$ (١)

، فى Δ ابجـ :

∵ $\overline{سص}$ // $\overline{بجـ}$ ∴ $\frac{اس}{سب} = \frac{اص}{صجـ}$ (٢)



㉑ (د) ㉒ (جـ)

㉓

∵ مساحة الدائرة ٣٦ π ∴ π $نق^2$ = ٣٦ π

∴ $نق^2$ = ٣٦ ∴ نق = ٦ سم

∵ جا (∠ا ب م) = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠ا ب م) = $\frac{\pi}{٦}$

فى Δ ا م ب : ∵ م ب = م ا = ا ب = نق

∴ ق (∠ا م ب) = π − $\frac{\pi}{٦}$ × ٢ = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ ق (∠ا م ب) المنعكسة = ٢ π − $\frac{٢\pi}{٣}$ = $\frac{٤\pi}{٣}$

∴ طول $\overset{\frown}{اب}$ الأكبر = $\frac{٤\pi}{٣}$ × ٦ = ٨ π سم

∴ محيط الجزء المظلل = ٨ π + ٦ + ٦

= (١٢ + ٨ π) سم

㉔ (أ) ㉕ (جـ)

㉖

فى Δ ا هـ جـ :

∵ $\overline{دب}$ // $\overline{جـهـ}$

∴ $\frac{اد}{دهـ} = \frac{اب}{بجـ} = \frac{٣}{٤}$

، ∵ $\frac{اهـ}{هـجـ} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

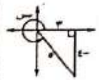
∴ $\frac{اهـ}{هـجـ} = \frac{اب}{بجـ}$

∴ $\overrightarrow{هـب}$ ينصف ∠ا هـ جـ

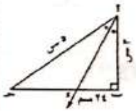
㉗ (د) ㉘ (أ)

من (١) ، (٢) :
∴ أء/ءب = أص/صحـ
، ∵ ءب = ءحـ   ∴ أء/ءحـ = أص/صحـ
∴ ءص ينصف ∠ أءحـ   (المطلوب أولاً)
، في Δ أبء :
∵ ءس ينصف ∠ أءب من الداخل ، ءص ينصف الزاوية الخارجة عندها.
∴ ق(∠ س ء ص) = ٩٠°   (المطلوب ثانيًا)

٢٠ (ب)   ٢١ (جـ)

٢٢

جا (١٨٠° − س)
+ ظا (٩٠° − س)
+ ظا (٢٧٠° − س)
= جا س + ظتا س + ظتا س
= −٤/٥ + (−٣/٤) + (−٣/٤) = −٢٣/١٠

٢٣ (ب)   ٢٤ (د)

٢٥

∵ أء ينصف ∠ ب أحـ
∴ ب ء/ءحـ = أب/أحـ
∴ ٢٤/ءحـ = ٣/٥
∴ ءحـ = ٤٠ سم
، ∵ أب : أحـ = ٣ : ٥
∴ أب = ٣ س ، أحـ = ٥ س
∴ (٥ س)$^{٢}$ = (٣ س)$^{٢}$ + (٦٤)$^{٢}$
∴ ٢٥ س$^{٢}$ = ٩ س$^{٢}$ + ٤٠٩٦
∴ ١٦ س$^{٢}$ = ٤٠٩٦   ∴ س$^{٢}$ = ٢٥٦
∴ س = ١٦

∴ أب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم
، أحـ = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم
∴ محيط Δ أبحـ = ٨٠ + ٦٤ + ٤٨ = ١٩٢ سم

٣٦ (أ)   ٣٧ (جـ)   ٣٨ (د)

## النموذج الثانى

١ (أ)   ٢ (ب)

٣
∵ ΔΔ أءهـ ، أحب فيهما
أء/أحـ = ٣/٩ = ١/٣ ، أهـ/أب = ٤/١٢ = ١/٣
∴ أء/أحـ = أهـ/أب ، ∠ أ مشتركة
∴ Δ أءهـ ~ Δ أحب
ومن التشابه ينتج أء/أحـ = ءهـ/حب
∴ ءهـ/٦ = ١/٣   ∴ ءهـ = ٢ سم

٤ (جـ)   ٥ (د)

٦
∵ ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)
∴ (θ + ٢٠°) + (٣θ + ٣٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن
∴ ٤θ + ٥٠° = ٩٠° + ١٨٠° ن
∴ ٤θ = ٤٠° + ١٨٠° ن   ∴ θ = ١٠° + ٤٥° ن
، عند ن = ٠   ∴ θ = ١٠°
، عند ن = ١   ∴ θ = ٥٥°
، عند ن = ٢   ∴ θ = ١٠٠° (مرفوض)
∴ قيم θ المطلوب هى ١٠° ، ٥٥°

٧ (جـ)   ٨ (جـ)   ٩ (ب)

١٠
∵ ل + م = ٢ ، ل م = −٥
نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة
∴ هـ + و = ل$^{٢}$ + ١ + م$^{٢}$ + ١
= (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م + ٢
= ٤ + ١٠ + ٢ = ١٦



، هـ و = (ل$^{٢}$ + ١)(م$^{٢}$ + ١) = (ل م)$^{٢}$ + ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ + ١
= (ل م)$^{٢}$ + (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م + ١
= ٢٥ + ٤ + ١٠ + ١ = ٤٠
∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^{٢}$ − ١٦ س + ٤٠ = ٠

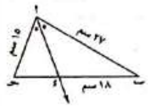
١١ (ب)   ١٢ (د)

١٣
∵ النقطة ب (س ، ٣/٥) تقع على دائرة الوحدة ، س < ٠
∴ س$^{٢}$ + (٣/٥)$^{٢}$ = ١
∴ س$^{٢}$ = ١٦/٢٥   ∴ س = −٤/٥
∴ جا (٩٠° + θ) − ظا (١٨٠° + θ) جتا (٩٠° + θ)
= جتا θ − ظا θ × (− جا θ)
= −٤/٥ − (−٤/٣)(−٣/٥) = −٨/٥

١٤ (د)   ١٥ (د)   ١٦ (جـ)

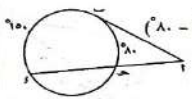
١٧
∵ أهـ × أء = أب × أحـ
∴ ٦ × (٦ + س) = ٧ × ١٢
∴ ٣٦ + ٦ س = ٨٤   ∴ س = ٨

١٨ (ب)   ١٩ (د)

٢٠


∵ أء ينصف ∠ ب أحـ
∴ أب/أحـ = ب ء/ءحـ
∴ ٢٧/١٥ = ١٨/ءحـ
∴ ءحـ = ١٠ سم
، أء = √(١٥ × ٢٧ − ١٨ × ١٠) = ١٥ سم

٢١ (جـ)   ٢٢ (جـ)

٢٣


ق(∠ أ) = ١/٢ (١٥٠° − ٨٠°)
= ٣٥°

٢٤ (جـ)   ٢٥ (د)

٢٦
(٤ − ٣ت)(٤ + ٣ت)/(٢ + ت) = ٢٥/(٢ + ت) × (٢ − ت)/(٢ − ت)
= (٥٠ − ٢٥ت)/٥ = ١٠ − ٥ت
∴ س = ١٠ ، ص = −٥

٢٧ (جـ)   ٢٨ (جـ)

## النموذج الثالث

١ (د)   ٢ (جـ)

٣
∵ م(المضلع الأكبر)/م(المضلع الأصغر) = (٥/٣)$^{٢}$ = ٢٥/٩
∴ (م(المضلع الأكبر) − م(المضلع الأصغر))/م(المضلع الأصغر) = (٢٥ − ٩)/٩
= ١٦/٩
∴ ٣٢/م(المضلع الأصغر) = ١٦/٩
∴ مساحة المضلع الأصغر = ١٨ سم$^{٢}$
، ∵ م(المضلع الأكبر)/١٨ = ٢٥/٩
∴ مساحة المضلع الأكبر = ٥٠ سم$^{٢}$

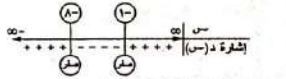
٤ (د)   ٥ (ب)

٦
نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :
د (س) = (س + ٣)$^{٢}$ − ١٠ + ٢ (س + ٣)
= س$^{٢}$ + ٦ س + ٩ − ١٠ + ٢ س + ٩
= س$^{٢}$ + ٩ س + ٨

، بوضع $س^٢ + ٩س + ٨ = ٠$

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أ، س = −١ ، ∵ أ > ٠




∴ مجموعة حل المتباينة = [−٨ ، −١]

❼ (أ) ❽ (د) ❾ (أ)

❿

في الشكل الرباعي أ ب ج د :

ق(∠ب م ج) = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠°

بالتقدير الدائري = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°} = \frac{٢\pi}{٣}$

∴ طول القوس الأصغر ب ج = $\frac{٢\pi}{٣} \times ٥ = \frac{١٠\pi}{٣}$ سم

⓫ (أ) ⓬ (ب)

⓭

∵ س + ص ت = (١ + ت) $(١ + ت)^٢$

= (١ + ت) $(١ + ٢ت + ت^٢)$

= (١ + ت) (١ + ٢ت − ١)

= (١ + ت) (٢ت) = ٢ت + $٢ت^٢$

= ٢ت − ٢

∴ س = −٢ ، ص = ٢

⓮ (ب) ⓯ (ج)

⓰

∵ ΔΔ أ س ص ، أ ج ب فيهما

$\frac{أس}{أج} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أص}{أب} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أس}{أج} = \frac{أص}{أب}$ ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ ج ب (المطلوب أولاً)

، من التشابه ينتج : ق(∠أ س ص) = ق(∠ج)

∴ الشكل س ب ج ص رباعي دائري (المطلوب ثانياً)

⓱ (أ) ⓲ (أ) ⓳ (ج)

⓴

الطرف الأيمن : جا ٦٠٠° جتا (−٣٠٠°) + جا ١٥٠° جتا ٢٤٠°

= جا (٣٦٠° + ٢٤٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= جا (١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= − جا ٦٠° جتا ٣٠° + جا ٣٠° (− جتا ٦٠°)

= $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢} = -١$

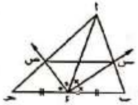
، الطرف الأيسر : جا $\frac{٣\pi}{٢}$ = −١

∴ الطرفان متساويان.

㉑ (ج) ㉒ (ب)

㉓

في Δ أ ب ج :




∵ ء س ينصف ∠ أ ء ب

∴ $\frac{أس}{سب} = \frac{أء}{ءب}$ (١)

، في Δ أ ء ج : ∵ ء ص ينصف ∠ أ ء ج

∴ $\frac{أص}{صج} = \frac{أء}{ءج}$ (٢)

، ∵ أء متوسط في Δ أ ب ج : ∴ ب ء = ء ج (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ $\frac{أس}{سب} = \frac{أص}{صج}$ ∴ س ص // ب ج

㉔ (د) ㉕ (ج)



㉖

∵ أب // ءهـ // س ص ، أص ، ب س قاطعان لهم.

∴ $\frac{أج}{بج} = \frac{جهـ}{جء} = \frac{هـص}{ءس}$

∴ $\frac{٨}{بج} = \frac{٤}{٦} = \frac{هـص}{٣}$

∴ ب ج = ١٢ سم ، هـ ص = ٢ سم

㉗ (ج) ㉘ (ج)

## النموذج الرابع

❶ (ب) ❷ (أ) ❸ (ج)

❹

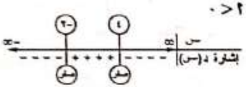
نضع ٨ + ٢س − $س^٢$ = ٠

∴ $س^٢$ − ٢س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

، ∵ أ < ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ]−٢ ، ٤[

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ٤}

• د سالبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٤]

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٢ ، ٤]

❺ (أ) ❻ (ج)

❼

في Δ أ ء هـ : أء = $\sqrt{(٥)^٢ - (٤)^٢}$ = ٣ سم

، ∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{أهـ}{هـج} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـج}$

∴ ءهـ // ب ج (المطلوب أولاً)

، في Δ أ ب ج : ب ج = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$

= ١٥ سم (المطلوب ثانياً)

❽ (د) ❾ (ب)

❿

∵ ٢θ ± θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π حيث ن ∈ ص

∴ ٣θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π ومنها θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢\pi}{٣}$ ن

أ، θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π ، عند ن = ٠ :

فإن : θ = $\frac{\pi}{٦}$ أ، θ = $\frac{\pi}{٢}$

، عند ن = ١ فإن : θ = $\frac{٥}{٦}$ π

⓫ (ب) ⓬ (د) ⓭ (ب)

⓮

∵ أ ، ب تقعان على الدائرتين م ، ن

∴ $ق_م$(أ) = $ق_ن$(أ) = ٠ ، $ق_م$(ب) = $ق_ن$(ب) = ٠

∴ أب محور أساسي للدائرتين م ، ن

، ∵ ج ∈ أب

∴ $ق_م$(ج) = $ق_ن$(ج) (المطلوب أولاً)

، $ق_م$(ج) = ج ء × ج هـ = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ ج أ × (ج أ + ١٠) = ١٤٤

∴ $(جأ)^٢$ + ١٠ (ج أ) − ١٤٤ = ٠

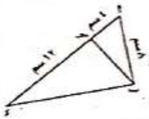
∴ (ج أ + ١٨) (ج أ − ٨) = ٠

∴ ج أ = ٨ سم ، $(جو)^٢$ = ١٤٤

∴ ج و = ١٢ سم (المطلوب ثانياً)

⓯ (ج) ⓰ (ج)

⓱




∵ $(أب)^٢ = (٨)^٢ = ٦٤$

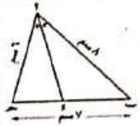
، أج × أء = ٤ × ١٦ = ٦٤

∴ $(أب)^٢$ = أج × أء

∴ أب تمس الدائرة المارة بالنقط ب ، ج ، ء

❶❽ (د)  ❶❾ (جـ)  ❷⓿ (ب)

❷❶



في Δ أ ب جـ :
∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ
∴ $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$
∴ $\frac{ب ء}{٧ - ب ء} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$
∴ ٣ ب ء = ٢٨ − ٤ ب ء    ∴ ٧ ب ء = ٢٨
∴ ب ء = ٤ سم ، ء جـ = ٧ − ٤ = ٣ سم

❷❷ (أ)  ❷❸ (أ)  ❷❹ (جـ)

❷❺

في Δ أ ب جـ : ∵ ∠ جـ قائمة
∴ ∠ أ تتمم ∠ ب    ∴ جتا ب = جا أ
∴ جا أ + جا أ = ١    ∴ ٢ جا أ = ١
∴ جا أ = $\frac{١}{٢}$    ∴ ق (∠ أ) = ٣٠°
∴ جا ٥ أ = جا ١٥٠° = $\frac{١}{٢}$

❷❻ (جـ)  ❷❼ (جـ)

❷❽

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة
حيث ل = $\frac{٣}{ت} \times \frac{ت}{ت}$ = −٣ ت
، م = $\frac{٢ + ٣ ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{٢ + ٦ ت + ٣ ت^٢}{٢}$
= $\frac{٢ + ٦ ت - ٢}{٢}$ = ٣ ت
∴ م + ل = (−٣ ت) + (٣ ت) = صفر
، م ل = (−٣ ت) (٣ ت) = ٩
∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^٢$ + ٩ = ٠

## النموذج الخامس

❶

قوة النقطة أ = (بعد النقطة أ عن المركز)$^٢$ − $نق^٢$
∴ ١٧٦ = $(٢٤)^٢$ − $نق^٢$    ∴ $نق^٢$ = ٤٠٠
∴ نق = ٢٠ سم

❷ (جـ)  ❸ (ب)

❹

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ مماس    ∴ $(أء)^٢$ = أ ب × أ جـ
∴ $(١٢)^٢$ = أ ب (أ ب + ١٠)
∴ $أ ب^٢$ + ١٠ أ ب − ١٤٤ = ٠
∴ (أ ب + ١٨) (أ ب − ٨) = ٠
∴ أ ب = ٨ سم
∴ أ جـ = ٨ + ١٠ = ١٨ سم.

❺ (د)  ❻ (د)  ❼ (جـ)

❽

قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري
= $\frac{١٥٠° \times \pi}{١٨٠°} = \frac{٥ \pi}{٦}$ ، طول القوس = نق × $\theta^د$
= ٨ × $\frac{٥ \pi}{٦} = \frac{٢٠ \pi}{٣}$ سم.

❾ (جـ)  ❶⓿ (ب)  ❶❶ (ب)

❶❷

في Δ أ ب ص : ∵ $\overline{س ع}$ // $\overline{ب ص}$
∴ $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ع}{ع ص}$    ∴ $\frac{٦}{٩} = \frac{٣}{ع ص}$
∴ ع ص = ٤,٥ سم
، في Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$
∴ $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص جـ}$    ∴ $\frac{٦}{٩} = \frac{٧,٥}{ص جـ}$
∴ ص جـ = ١١,٢٥ سم.

❶❸ (جـ)  ❶❹ (جـ)

❶❺

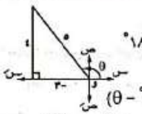
ل + م = ٣ ، ل م = ٥
نفرض ان هـ ، و هما جذري المعادلة المطلوبة



∴ هـ + و = $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م} = \frac{(ل + م)^٢ - ٢ ل م}{ل م}$
= $\frac{(٣)^٢ - ٢ (٥)}{٥} = \frac{-١}{٥}$
، هـ و = $\frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل}$ = ١
∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^٢$ + $\frac{١}{٥}$ س + ١ = ٠
∴ ٥ $س^٢$ + س + ٥ = ٠    (المطلوب أولًا)
∵ ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢$ − ٣ س + ٥ = ٠
∴ $ل^٢$ − ٣ ل + ٥ = صفر    ∴ $ل^٢$ = ٣ ل − ٥
∴ قيمة المقدار $(ل^٢ + ٣ م)^٢$ = $(٣ ل - ٥ + ٣ م)^٢$
= $(٣ (ل + م) - ٥)^٢$
= $(٣ \times ٣ - ٥)^٢$ = ١٦
(المطلوب ثانيًا)

❶❻ (جـ)  ❶❼ (ب)  ❶❽ (ب)

❶❾



جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°
∴ θ تقع في الربع الثاني
∴ جا (١٨٠° − θ) + ظا (٣٦٠° − θ)
+ ٢ جا (٢٧٠° − θ) = جا θ − ظا θ − ٢ جتا θ
= $\frac{٤}{٥} - \left(\frac{-٤}{٣}\right) - ٢ \left(\frac{-٣}{٥}\right) = \frac{١٠}{٣}$

❷⓿ (ب)  ❷❶ (جـ)

❷❷

س = $\frac{١٣ (١ + ت)}{٥ + ت} \times \frac{٥ - ت}{٥ - ت}$
= $\frac{١٣ (٥ + ٤ ت - ت^٢)}{٢٥ + ١} = \frac{١٣ (٦ + ٤ ت)}{٢٦}$
= ٣ + ٢ ت
، ص = $\frac{٥ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$
= $\frac{٥ - ٥ ت + ت - ت^٢}{١ + ١} = \frac{٦ - ٤ ت}{٢}$ = ٣ − ٢ ت
∴ س + ص = ٣ + ٢ ت + ٣ − ٢ ت = ٦

❷❸ (أ)  ❷❹ (د)  ❷❺ (ب)

❷❻

في Δ أ ب جـ : أ جـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨
ΔΔ أ و هـ ، جـ و ء فيهما
ق (∠ أ و هـ) = ق (∠ جـ و ء) بالتقابل بالرأس
، ق (∠ هـ أ و) = ق (∠ أ جـ ء) بالتبادل
∴ Δ أ و هـ ∼ Δ جـ و ء ومن التشابه ينتج :
$\frac{أ و}{و جـ} = \frac{أ هـ}{جـ ء}$    ∴ $\frac{أ و}{٨ - أ و} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$
∴ ٣ أ و = ٨ − أ و    ∴ ٤ أ و = ٨
∴ أ و = ٢ سم    ∴ أ هـ = أ و = ٢ سم
∴ Δ أ و هـ متساوي الساقين.

❷❼ (جـ)  ❷❽ (د)

## النموذج السادس

❶ (جـ)  ❷ (جـ)  ❸ (أ)

❹

(٢ + ٣ ت) + (١ − ت) = س + ص ت
∴ ٣ + ٢ ت = س + ص ت    ∴ س = ٣ ، ص = ٢

❺ (أ)  ❻ (د)  ❼ (جـ)

❽

∵ $\overline{أ ب}$ مماس    ∴ $(أ ب)^٢$ = أ جـ × أ ء
∵ جـ منتصف $\overline{أ ء}$    ∴ أ ء = ٢ أ جـ
∴ $(٥ \sqrt{٣})^٢$ = أ جـ × ٢ أ جـ    ∴ ٧٥ = ٢ $(أ جـ)^٢$
∴ أ جـ = $\frac{٥ \sqrt{٦}}{٢}$
∴ جـ ء = $\frac{٥ \sqrt{٦}}{٢}$    (المطلوب أولًا)
∴ قوة النقطة أ = $(أ ب)^٢$ = ٧٥    (المطلوب ثانيًا)

❾ (ب)  ❶⓿ (د)

**١١**

$\theta + ٢٠° + ٢\theta + ٣٠° = ٩٠°$

∴ $٤\theta = ٤٠°$ ومنها $\theta = ١٠°$

**١٢** (د) **١٣** (جـ)

**١٤**

∵ ب حـ = ١٠ سم ، ب ء = ٤ سم

∴ ء حـ = ٦ سم

فى Δ أ ب حـ : $\frac{أب}{أحـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{ب ء}{ء حـ}$

∴ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ (المطلوب أولًا)

فى Δ أ ب و :

∵ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ و ، $\overline{أهـ} \perp \overline{ب و}$

∴ Δ أ ب و مثلث متساوى الساقين

∴ أب = أو = ٦ سم ، و حـ = ٩ − ٦ = ٣ سم

∴ م(Δ أ ب و) : م(Δ حـ ب و)

= أو : و حـ = ٦ : ٣ = ٢ : ١ (المطلوب ثانيًا)

**١٥** (جـ) **١٦** (ب)

**١٧**

فى Δ أ حـ ء : ∵ $\overrightarrow{ء هـ}$ ينصف ∠ حـ ء أ

∴ $\frac{حـ ء}{ء أ} = \frac{حـ هـ}{هـ أ}$ (١)

، فى Δ أ ء ب : ∵ $\overrightarrow{ء و}$ ينصف ∠ ب ء أ

∴ $\frac{ب ء}{ء أ} = \frac{ب و}{و أ}$ (٢)

، ∵ حـ ء = ء ب (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ $\frac{حـ هـ}{هـ أ} = \frac{ب و}{و أ}$

∴ $\overline{هـ و} \parallel \overline{ب حـ}$

**١٨** (جـ) **١٩** (جـ) **٢٠** (ب) **٢١** (د)

**٢٢**

جتا $\theta = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، جا $\theta = -\frac{٢}{٣}$

∴ جا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ + ظتا$(٢\pi - \theta)$

= جتا θ − ظتا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣} - \left(\left(\frac{\sqrt{٥}}{٣}\right) \div \left(\frac{-٢}{٣}\right)\right) = \frac{٥\sqrt{٥}}{٦}$

**٢٣** (ب) **٢٤** (جـ)

**٢٥**

ΔΔ أ حـ ء ، ب حـ أ فيهما

∵ $(أحـ)^٢$ = حـ ء × حـ ب

∴ $\frac{أحـ}{ب حـ} = \frac{حـ ء}{أحـ}$ ، ∠ حـ مشتركة

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

**٢٦** (د) **٢٧** (جـ)

**٢٨**

∵ $\frac{٣}{ل} + \frac{٣}{م} = ١٢$ ∴ $\frac{٣ل + ٣م}{ل م} = ١٢$

∴ م + ل = ٤ ل م (١)

، $\frac{٣}{ل} \times \frac{٣}{م} = ٩$ ∴ ل م = ١ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م + ل = ٤

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هنا : هـ ، و

∴ هـ + و = $\frac{١}{ل^٣} + \frac{١}{م^٣} = \frac{ل^٣ + م^٣}{ل^٣ م^٣}$

$= \frac{(ل + م)\,[(ل + م)^٢ - ٣ ل م]}{(ل م)^٣}$

$= \frac{٤\,[(٤)^٢ - ٣ \times ١]}{(١)^٣} = ٥٢$

، هـ و = $\frac{١}{ل^٣} \times \frac{١}{م^٣} = \frac{١}{(ل م)^٣} = ١$

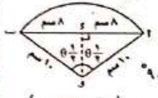
∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ٥٢ س + ١ = ٠$

## النموذج السابع

**١** (جـ) **٢** (جـ) **٣** (جـ) **٤** (أ)



**٥**




نرسم : $\overline{و ء} \perp \overline{أب}$

فى Δ أ ء و : ق(∠ أ ء و) = ٩٠°

∴ جا$(\frac{١}{٢}\theta) = \frac{٨}{١٠}$ ∴ $\frac{١}{٢}\theta = ٠.٩٢٧^ر$

∴ $\theta \approx ١.٨٥٥^ر$

∴ طول القوس : $\overset{\frown}{أب} = ١.٨٥٥^ر \times ١٠ = ١٨.٥٥$ سم

**٦**

ΔΔ أ ب حـ ، ء ب و فيهما :

$\frac{أب}{ء ب} = \frac{٦}{٤.٥} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{أحـ}{ء و} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

، $\frac{ب حـ}{ب و} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{أب}{ء ب} = \frac{أحـ}{ء و} = \frac{ب حـ}{ب و}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب و (المطلوب أولًا)

، من التشابه ينتج أن : ق(∠حـ) = ق(∠ ء و ب)

، ∵ ق(∠ ء و ب) = ق(∠ هـ و حـ) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠حـ) = ق(∠ هـ و حـ)

∴ Δ هـ و حـ متساوى الساقين (المطلوب ثانيًا)

**٧** (د) **٨** (ب)

**٩**

الطرف الأيسر : جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا(−٦٠°) جتا ١٢٠°

= جا(٧٢٠° + ٣٠°) جتا(٣٦٠° − ٦٠°)

+ جا(−٦٠°) جتا(٩٠° + ٣٠°)

= جا ٣٠° جتا ٦٠° − جا ٦٠° (− جا ٣٠°)

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٣}} = \frac{٣}{٤}$

∴ جا $\theta = \frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ θ ≈ ٤٨° ٣٥' ٢٥" أو

θ = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥' ٢٥" = ١٣١° ٢٤' ٣٥"

**١٠**

ل ، م هما جذرا المعادلة $٤ س^٢ - ١٣ س + ٤ = ٠$

∴ ل + م = $\frac{١٣}{٤}$ ، ل م = $\frac{٤}{٤} = ١$

نفرض أن : هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = (ل + م) + (ل م) = $\frac{١٣}{٤} + ١ = \frac{١٧}{٤}$

، هـ و = (ل + م).(ل م) = $\frac{١٣}{٤}$ (١) = $\frac{١٣}{٤}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - \frac{١٧}{٤} س + \frac{١٣}{٤} = ٠$

أى $٤ س^٢ - ١٧ س + ١٣ = ٠$

**١١** (جـ) **١٢** (ب) **١٣** (د) **١٤** (ب)

**١٥**

نضع $س^٢ - س + ١٢ = ٠$

ببحث إشارة المميز :

$ب^٢ - ٤ أ حـ = (-١)^٢ - ٤ (١)(١٢) = -٤٧$ (< صفر)

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية،




∴ أ > ٠

∴ إشارة د(س) موجبة لكل س ∈ ح

∴ $س^٢ + ١٢ > س$ ∴ $س^٢ - س + ١٢ > ٠$

∴ مجموعة الحل = ح

**١٦** (جـ) **١٧** (ب) **١٨** (ب)

**١٩**

∵ $\overline{أس} \parallel \overline{ب ص} \parallel \overline{حـ ع}$ ، $\overleftrightarrow{ع هـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ قاطعان لهم

∴ $\frac{ع ص}{حـ ب} = \frac{ص س}{ب أ} = \frac{س هـ}{أ هـ}$

∴ $\frac{ع ص}{٧.٥} = \frac{٣}{ب أ} = \frac{٤}{٦}$

∴ ب أ = ٤.٥ سم ، ع ص = ٥ سم.

**٢٠** (ب) **٢١** (جـ) **٢٢** (ب)

**٢٣**

$\Delta\Delta$ أ ء هـ ، أ جـ ب فيهما :

$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}}$ ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

وينتج من التشابه : ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ أ جـ ب)

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى.

**٢٤** (جـ) **٢٥** (أ) **٢٦** (أ) **٢٧** (ب)

**٢٨**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$

∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{\text{ب ء}}{٥ - \text{ب ء}}$ ∴ ٤ ب ء = ٣٠ − ٦ ب ء

∴ ١٠ ب ء = ٣٠ ∴ ب ء = ٣ سم

، ء جـ = ٢ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ الخارجة

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{٥ + \text{هـ جـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ ٦ هـ جـ = ٣٠ + ٤ هـ جـ

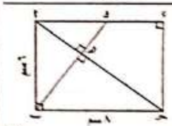
∴ ٢ هـ جـ = ٣٠ ∴ هـ جـ = ١٠ سم

∴ ء هـ = ٢ + ١٠ = ١٢ سم (وهو المطلوب)

## النموذج الثامن

**١** (جـ) **٢** (د) **٣** (جـ)

**٤**



فى Δ أ ب جـ :

قائم فى ب ،

$\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ (أ ب)$^٢$ = أ هـ × أ جـ (١)

$\Delta\Delta$ أ هـ و ، أ ء جـ فيهما :

ق (∠ أ هـ و) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠° ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ هـ و ~ Δ أ ء جـ

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ جـ}}$

∴ أ هـ × أ جـ = أ و × أ ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ (أ ب)$^٢$ = أ و × أ ء (المطلوب أولاً)

∴ (٦)$^٢$ = أ و × ٨

∴ أ و = ٤,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

**٥** (ب) **٦** (د) **٧** (جـ)
**٨** (ب) **٩** (جـ)

**١٠**

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ ء

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ هـ ء)

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∴ أ ء × أ ب = أ هـ × أ جـ

∴ ٣ × ٥ = ٢,٥ (٢,٥ + هـ جـ)

∴ هـ جـ = ٣,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

**١١** (جـ) **١٢** (جـ) **١٣** (جـ)

**١٤**

فى Δ أ ب ء : ∵ $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ء

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$ (١)

، فى Δ أ ء جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ أ ء جـ

∴ $\frac{\text{أ و}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء جـ}}$ (٢)

، ∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ب ء = ء جـ (٣)

، ∵ أ ب = أ ء (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ب جـ}}$

**١٥**

(١) ل + م = ٤ ، ل م = −٤

نفرض أن هـ ، و هما جذرى المعادلة المطلوبة.

∴ هـ + و = ل$^٢$ + م$^٢$ = (ل + م)$^٢$ − ٢ ل م

= (٤)$^٢$ − ٢ (−٤) = ٢٤

، هـ و = ل$^٢$ م$^٢$ = (ل م)$^٢$ = (−٤)$^٢$ = ١٦

∴ المعادلة المطلوبة هى : س$^٢$ − ٢٤ س + ١٦ = ٠



(٢) ∵ ل أحد جذرى المعادلة س$^٢$ − ٤ س − ٤ = ٠

∴ ل$^٢$ − ٤ ل − ٤ = ٠ ∴ ل$^٢$ − ٤ ل = ٤

∴ القيمة العددية للمقدار :

ل$^٢$ − ٤ ل + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

**١٦** (ب) **١٧** (د) **١٨** (د)

**١٩**

∵ النسبة بين محيطى المضلعين المتشابهين = ٤ : ٣

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٤ : ٣

∴ النسبة بين مساحتيهما = ١٦ : ٩

نفرض أن مساحة المضلع الأول ١٦ س

، مساحة الثانى = ٩ س

∴ ١٦ س + ٩ س = ٢٢٥

٢٥ س = ٢٢٥ ∴ س = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ١٦ × ٩ = ١٤٤ سم$^٢$

، مساحة المضلع الثانى = ٩ × ٩ = ٨١ سم$^٢$

**٢٠** (د) **٢١** (ب) **٢٢** (جـ)

**٢٣** جا (−٣٠°) جتا (٤٢٠°) + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظتا } ٦٥°}$

= − جا ٣٠° × جتا (٣٦٠° + ٦٠°) + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظتا } (٩٠° - ٢٥°)}$

= − جا ٣٠° × جتا ٦٠° + $\frac{\text{ظا } ٢٥°}{\text{ظا } ٢٥°}$ = − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + ١ = $\frac{٣}{٤}$

**٢٤**

∵ قا ٦ θ = قا ٣ θ

∴ ٦ θ ± ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ ± ٢ π ن

∴ إما ٦ θ + ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ ٩ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{١٨}$ + $\frac{٢\pi}{٩}$ ن حيث ن ∈ ص

، أ ٦ θ − ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{٢\pi}{٣}$ ن حيث ن ∈ ص

**٢٥** (جـ) **٢٦** (د) **٢٧** (جـ)

**٢٨**

ببحث إشارة المميز :

ب$^٢$ − ٤ أ جـ = (− ١١)$^٢$ − ٤ (٧) (٥) = ١٢١ − ١٤٠

= − ١٩

∴ جذرى المعادلة مركبان غير حقيقيين

∴ س = $\frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ (٧)}$ = $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\ \text{ت}}{١٤}$

## النموذج التاسع

**١** (جـ) **٢** (أ) **٣** (جـ)
**٤** (أ) **٥** (أ)

**٦**

∵ قياس الزاوية المحيطية = ٦٠°

∴ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس = ١٢٠°

∴ θ$^د$ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ نق = $\frac{\text{ل}}{\theta^د}$ = $\frac{٤ \pi}{(\frac{٢ \pi}{٣})}$ = ٦ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π (٦) ≃ ٣٧,٧ سم

**٧**

جا ٤٢٠° جتا ٣٣٠° + $\frac{\text{جا } ١٥°}{\text{جا } ١٦٥°}$ + ظا$^٢$ ٦٥° − ظتا ٢٥° ظا ٦٥°

= جا (٣٦٠° + ٦٠°) جتا (٣٦٠° − ٣٠°)

+ $\frac{\text{جا } (١٥°)}{\text{جا } (١٨٠° - ١٥°)}$ + ظا ٦٥° (ظا ٦٥° − ظتا ٢٥°)

= جا ٦٠° جتا ٣٠° + $\frac{\text{جا } ١٥°}{\text{جا } ١٥°}$

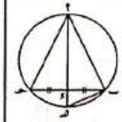
+ ظا ٦٥° (ظا ٦٥° − ظتا (٩٠° − ٦٥°))

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١ + ظا ٦٥° (ظا ٦٥° − ظا ٦٥°)

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ + صفر = ١ $\frac{٣}{٤}$

❽ (ب) ❾ (ب) ❿ (جـ) ⓫ (د)

⓬



(1) ∵ $\overline{أهـ} \cap \overline{بحـ} = \{ء\}$

∴ ء ب × ء حـ

= ء أ × ء هـ (1)

∵ ء منتصف $\overline{بحـ}$

∴ ب ء = ء حـ (2)

من (1)، (2): ∴ $(ء ب)^2$ = ء أ × ء هـ (المطلوب أولاً)

(2) ∆∆ هـ ب ء ، حـ أ ء فيهما

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ هـ أ حـ)

زاويتان محيطيتان على نفس القوس هـ حـ

، ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ حـ ب)

زاويتان محيطيتان على نفس القوس أ ب

∴ ∆ هـ ب ء ~ ∆ حـ أ ء (المطلوب ثانيًا)

⓭ (ب) ⓮ (ب) ⓯ (جـ)

⓰

∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ // $\overleftrightarrow{هـو}$ // $\overleftrightarrow{بء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ قاطعان لهم

∴ $\frac{حـ م}{أ م} = \frac{م و}{م هـ} = \frac{و ء}{هـ ب}$ ∴ $\frac{7.5}{أ م} = \frac{م و}{2} = \frac{9}{6}$

∴ م و = 3 سم ، أ م = 5 سم.

⓱ (ب) ⓲ (جـ) ⓳ (ب)

⓴

المميز = $ب^2 - 4 أ حـ = (8)^2 - 4 (-1) (-15)$

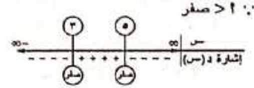
= 4 (> 0)

∴ المعادلة $-س^2 + 8 س - 15 = 0$

لها جذران حقيقيان مختلفان.

∴ (س − 3) (س − 5) = 0 ∴ س = 3 ، س = 5

، ∵ أ > صفر



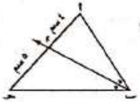

• د (س) = صفر عندما س ∈ {3 ، 5}

• د موجبة عندما س ∈ ]3 ، 5[

• د سالبة عندما س ∈ ح − [3 ، 5]

∴ مجموعة حل المتباينة = ]3 ، 5[

㉑



∵ محيط ∆ أ ب حـ = 27 سم

∴ أ ب + ب حـ = 27 − 9

= 18 سم

∵ $\overline{بء}$ ينصف ∠ أ ب حـ

∴ $\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{أ ء}{ء حـ}$ ∴ $\frac{أ ب}{18 - أ ب} = \frac{4}{5}$

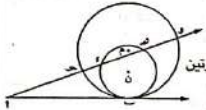
∴ 5 أ ب = 72 − 4 أ ب ∴ 9 أ ب = 72

∴ أ ب = 8 سم ، ب حـ = 18 − 8 = 10 سم

، ب ء = $\sqrt{8 \times 10 - 4 \times 5} = 2\sqrt{15}$ سم

㉒ (جـ) ㉓ (أ)

㉔



(1) ∵ ب تقع على الدائرتين

∴ ق م (ب)

= ق ن (ب) صفر

∴ ب تنتمي للمحور الأساسي للدائرتين م ، ن

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ن

∴ $(أ ب)^2$ = أ ء × أ هـ ∴ ق ن (أ) = $(أ ب)^2$

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

∴ ق م (أ) = $(أ ب)^2$



∴ ق ن (أ) = ق م (أ)

∴ أ تنتمي للمحور الأساسي للدائرتين م ، ن

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ هو المحور الأساسي للدائرتين م ، ن (المطلوب أولاً)

(2) ∵ ق م (أ) = ق ن (أ)

∴ أ حـ × أ و = أ ء × أ هـ

∴ أ حـ : أ ء = أ هـ : أ و (المطلوب ثانيًا)

㉕ (د) ㉖ (ب) ㉗ (ب)

㉘

ص = $\frac{3 + ت}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{3 ت + ت^2}{ت^2} = 1 - 3 ت$

قيمة المقدار: $س^2 + 2 س ص + ص^2$

= $(س + ص)^2$

= $(2 + 3ت + 1 - 3ت)^2$

= $(3)^2 = 9$

## النموذج العاشر

❶ (ب) ❷ (د)

❸

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ} = \frac{ك^2 + 4}{4 ك}$

، ∵ أحد جذري المعادلة هو معكوس ضربي للآخر

∴ حاصل ضرب الجذرين = 1

∴ $\frac{ك^2 + 4}{4 ك} = 1$

∴ $ك^2 + 4 = 4 ك$

∴ $ك^2 - 4 ك + 4 = 0$

∴ $(ك - 2)^2 = 0$

∴ ك = 2

❹ (ب) ❺ (ب) ❻ (جـ) ❼ (ب)

❽

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة

∴ 45° = $\frac{1}{2}$ [ق (ب ء⌒) − ق (ب حـ⌒)]

= $\frac{1}{2}$ [150° − ق (ب حـ⌒)]

∴ 45° = 75° − $\frac{1}{2}$ ق (ب حـ⌒)

∴ $\frac{1}{2}$ ق (ب حـ⌒) = 30° ∴ ق (ب حـ⌒) = 60°

❾ (جـ) ❿ (د)

⓫

∵ جا 2θ = جتا 4θ ، θ زاوية حادة موجبة

∴ 2θ + 4θ = 90° ∴ 6θ = 90° ∴ θ = 15°

∴ ظا (90° − 3θ) = ظا (90° − 3 (15°)) = ظا 45° = 1

⓬ (ب) ⓭ (د)

⓮

في ∆ س ص ع : $\overline{عم}$ ينصف ∠ س ع ص

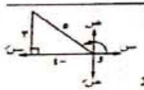
∴ $\frac{س م}{م ص} = \frac{س ع}{ع ص}$ ∴ $\frac{س م}{م ص} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$

، ∵ $\frac{س ن}{ن ع} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$ ∴ $\frac{س م}{م ص} = \frac{س ن}{ن ع}$

∴ $\overline{مـن}$ // $\overline{صع}$

⓯ (ب) ⓰ (أ)

⓱




∵ 5 جا θ − 3 = صفر

∴ جا θ = $\frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} > \theta > \pi$

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ جتا ($\frac{\pi}{2}$ − θ) + جا (2π − θ) − ظتا ($\frac{3\pi}{2}$ − θ)

+ جتا θ = جا θ − ظا θ + ظا θ + جتا θ

= جا θ + جتا θ = $\frac{3}{5} + \left(\frac{-4}{5}\right) = -\frac{1}{5}$

⓲ (جـ) ⓳ (أ)

**٢٠**

$\Delta\Delta$ أ ب جـ ، أ ء هـ فيهما :

$\frac{أب}{أء} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب جـ}{ء هـ} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{أ جـ}{أ هـ} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{أب}{أء} = \frac{ب جـ}{ء هـ} = \frac{أ جـ}{أ هـ}$

$\therefore \Delta$ أ ب جـ $\sim \Delta$ أ ء هـ (المطلوب أولًا)

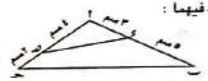
، من التشابه ينتج أن : ق (د ب أ جـ) = ق (د ء أ هـ)

$\therefore$ $\overline{أهـ}$ ينصف د ب أ ء

**٢١** (د) **٢٢** (أ)

**٢٣**

$\Delta\Delta$ أ هـ ء ، أ ب جـ فيهما :




$\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{أ ء}{أ جـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ ء}{أ جـ}$ ، د أ مشتركة

$\therefore \Delta$ أ هـ ء $\sim \Delta$ أ ب جـ (المطلوب أولًا)

، ينتج من التشابه : $\frac{م (\Delta أ هـ ء)}{م (\Delta أ ب جـ)} = \left(\frac{أ هـ}{أ ب}\right)^{٢}$

$\therefore \frac{٣}{م (\Delta أ ب جـ)} = \left(\frac{٤}{٨}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

$\therefore$ م ($\Delta$ أ ب جـ) = ١٢ سم$^{٢}$

**٢٤** (ب) **٢٥** (أ)

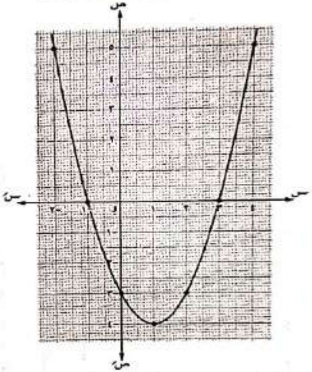
**٢٦**

الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٢}{٢} = ١$

، د (١) = (١)$^{٢}$ − ٢ (١) − ٣ = −٤

$\therefore$ نقطة رأسي المنحنى هي (١ ، −٤)

| س | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٥ | ٠ | −٣ | −٤ | −٣ | ٠ | ٥ |




• د (س) = ٠ عندما س $\in$ {−١ ، ٣}

• د سالبة عندما س $\in$ ]−١ ، ٣[

• د موجبة عندما س $\in$ ح − [−١ ، ٣]

**٢٧** (د) **٢٨** (ب)

# الرياضيات

الفصل الدراسى الأول

الجزء الخاص بالإجابات



المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

1

ثانوى

2020

# إرشادات الوحدة الأولى

## إرشادات المتطلبات القبلية

**١** (١) {-٢} (٢) ∅ (٣) {-٢ ، ١}

**٢** (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (د)
(٤) (ب) (٥) (أ)

**٣**

(١) ∵ $س^٢ - ١ = ٠$

∴ (س + ١) (س − ١) = ٠

∴ س = −١ أو س = ١

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ١}

(٢) ∵ $س^٢ + ٩ = ٠$ ∴ $س^٢ = -٩$

∴ س = $\pm\sqrt{-١} \notin ح$ ∴ مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ $س^٢ + ٣س = ٠$ ∴ س (س + ٣) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٣

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٣}

(٤) ∵ $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

∴ $(س - ٣)^٢ = ٠$ ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

**٤**

(١) ∵ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm ٤\sqrt{٢}}{٢}$

$= ٣ \pm ٢\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {٥,٨ ، ٠,٢}

(٢) ∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ٥

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٤

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٢ \times -٤}}{٢ \times ٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٤١}}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {٠,٩ ، −٢,٤}

(٤) ∵ أ = ٣ ، ب = ٠ ، جـ = −٦٥

∴ س = $\frac{\pm \sqrt{-٤ \times ٣ \times -٦٥}}{٢ \times ٣} = \frac{\pm \sqrt{٧٨٠}}{٦}$

∴ مجموعة الحل = {٤,٧ ، −٤,٧}

(٥) بالضرب × س ∴ $س^٢ - ٣س - ٥ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −٥

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {٤,٢ ، −١,٢}

(٦) ∵ $\frac{٣}{س - ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = ٢$

∴ $\frac{٣س + ٦ + ٢س - ٤}{س^٢ - ٤} = ٢$

∴ $٥س + ٢ = ٢س^٢ - ٨$

∴ $٢س^٢ - ٥س - ١٠ = ٠$

∴ أ = ٢ ، ب = −٥ ، جـ = −١٠

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٢ \times -١٠}}{٢ \times ٢} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٥}}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {٣,٨ ، −١,٣}

**٥**

(١) ∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٤

∴ س = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

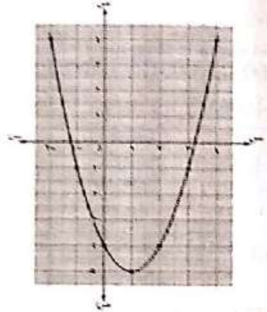




∴ مجموعة الحل = {−١,٢ ، ٣,٢}

بفرض أن : د (س) = $س^٢ - ٢س - ٤$

| س | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٤ | −١ | −٤ | −٥ | −٤ | −١ | ٤ |



من الرسم : مجموعة الحل = {−١,٢ ، ٣,٢} تقريبًا.

(٢) ∵ أ = −١ ، ب = ٣ ، جـ = ٢

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times -١ \times ٢}}{٢ \times -١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٧}}{-٢}$

∴ مجموعة الحل = {−٠,٦ ، ٣,٦}

بفرض أن : د (س) = $-س^٢ + ٣س + ٢$

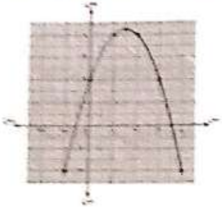
| س | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | −٢ | ٢ | ٤ | ٤ | ٢ | −٢ |

∵ الإحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى

$= \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٣}{٢ \times -١} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

، د $(١\frac{١}{٢}) = -(١\frac{١}{٢})^٢ + ٣ \times ١\frac{١}{٢} + ٢ = ٤\frac{١}{٤}$

∴ نقطة رأس المنحنى هي $(١\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٤})$



من الرسم : مجموعة الحل = {−٠,٦ ، ٣,٦} تقريبًا.

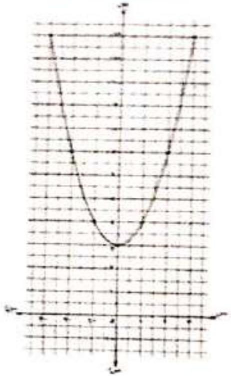
(٣) ∵ أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٣

∴ س = $\frac{\pm \sqrt{-٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١} = \frac{\pm \sqrt{-١٢}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ∅

بفرض أن : د (س) = $س^٢ + ٣$

| س | −٣ | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | ١١ | ٧ | ٤ | ٣ | ٤ | ٧ | ١٢ |



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٤) ∵ أ = −٢ ، ب = −٤ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times -٢ \times ١}}{٢ \times -٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٦}}{-٢}$

∴ مجموعة الحل = {٢,٠ ، −٢,٢}

بفرض أن : د (س) = −٢ س² − ٤ س + ١

∴ نقطة رأس المنحنى هي (−١ ، ٣)

| س | −٣ | −٢ | −١ | ٠ | ١ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | −٥ | ١ | ٣ | ١ | −٥ |

ارسم بنفسك ومن الرسم :

مجموعة الحل = {٢,٠ ، −٢,٢} تقريبًا.

## ٦

(١) ∵ ٧٨ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن)

∴ $\frac{ن^٢}{٢} + \frac{ن}{٢} - ٧٨ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ ن² + ن − ١٥٦ = ٠

∴ (ن − ١٢) (ن + ١٣) = ٠

∴ ن = ١٢ أ، ن = −١٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٢ عددًا.

(٢) ∵ ١٧١ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن)

∴ $\frac{ن^٢}{٢} + \frac{ن}{٢} - ١٧١ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ ن² + ن − ٣٤٢ = ٠

∴ (ن − ١٨) (ن + ١٩) = ٠

∴ ن = ١٨ أ، ن = −١٩ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٨ عددًا.

(٣) ∵ ٢٥٣ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن)

∴ $\frac{ن^٢}{٢} + \frac{ن}{٢} - ٢٥٣ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ ن² + ن − ٥٠٦ = ٠

∴ (ن − ٢٢) (ن + ٢٣) = ٠

∴ ن = ٢٢ أ، ن = −٢٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٢٢ عددًا.

(٤) ∵ ٤٦٥ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن)

∴ $\frac{ن^٢}{٢} + \frac{ن}{٢} - ٤٦٥ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ ن² + ن − ٩٣٠ = ٠

∴ (ن − ٣٠) (ن + ٣١) = ٠

∴ ن = ٣٠ أ، ن = −٣١ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٣٠ عددًا.

## ٧

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (أ) (٥) (أ)

(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (أ)

## ٨

∵ س = ٢ أحد جذري المعادلة

∴ ٤ − ٤ أ + ٢ أ² − ١٢ = ٠ ∴ أ² − ٢ أ − ٤ = ٠

∴ أ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

∴ أ = ١ + $\sqrt{٥}$ أ، ١ − $\sqrt{٥}$

## ٩

∵ د (٠) = −٣ ∴ جـ = −٣

∴ د (س) = أ س² + ب س − ٣

، ∵ ٣ جذر للمعادلة : د (س) = ٠

∴ ٩ أ + ٣ ب − ٣ = ٠ ∴ ٣ أ + ب = ١ (١)

، ∵ −$\frac{١}{٢}$ جذر للمعادلة : د (س) = ٠

∴ $\frac{١}{٤}$ أ − $\frac{١}{٢}$ ب − ٣ = ٠ ∴ أ − ٢ ب = ١٢ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ب = −٥ ، أ = ٢

## إرشادات تمارين 1

**١** (١) ١ (٢) −١ (٣) −ت (٤) ت (٥) −١

(٦) ١ (٧) ١ (٨) ت (٩) ت

**٢** (١) ١ (٢) −١ (٣) −ت (٤) ت



**٣** (١) $\sqrt{١٥}$ ت (٢) ٤ ت (٣) −$\sqrt{٦}$

(٤) ٦ (٥) −١٤ (٦) −٧٧ ت

## ٤

(١) ٥ − ٣ ت (٢) ٥ + ٤ ت (٣) ٤

(٤) ٦ + ت − ١٢ ت² = ١٨ + ت

(٥) ١٦ − ٩ ت² = ٢٥

(٦) ٤ − ٢٠ ت + ٢٥ ت² = −٢١ − ٢٠ ت

(٧) ٩ − ١٢ ت + ٤ ت² + ٣ + ٢ ت = ٨ − ١٠ ت

(٨) [(١ + ت)²]² = (١ + ٢ ت + ت²)² = (٢ ت)²

= ٤ ت² = −٤

(٩) [(١ + ت)²]² − [(١ − ت)²]²

= (١ + ٢ ت + ت²)² − (١ − ٢ ت + ت²)²

= (٢ ت)² − (−٢ ت)² = ٤ ت² − ٤ ت² = صفر

(١٠) [(١ − ت)²]⁵ = (١ − ٢ ت + ت²)⁵ = (−٢ ت)⁵

= −٣٢ ت⁵ = −٣٢ ت

(١١) (١ − ٢) (٢ + ٣ ت + ٤ ت²)

= −١ (٢ + ٣ ت − ٤) = ٢ − ٣ ت

## ٥

(١) $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت} \times \frac{-٧ت}{-٧ت} = \frac{-٢٨ت + ٣٥ت^٢}{-٤٩ت^٢}$

$= -\frac{٥}{٧} - \frac{٤}{٧}ت$

(٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت} \times \frac{٣ + ٢ت}{٣ + ٢ت} = \frac{٧٨ + ٥٢ت}{٩ - ٤ت^٢}$

$= \frac{٧٨ + ٥٢ت}{١٣} = ٦ + ٤ت$

(٣) $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت} \times \frac{٣ - ت}{٣ - ت} = \frac{٦ - ١١ت + ٣ت^٢}{٩ - ت^٢}$

$= \frac{٣}{١٠} - \frac{١١ت}{١٠}$

(٤) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت} \times \frac{٥ + ٢ت}{٥ + ٢ت} = \frac{١٥ + ٢٦ت + ٨ت^٢}{٢٥ - ٤ت^٢}$

$= \frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦ت}{٢٩}$

(٥) $\frac{(١ + ٢ت)(١ - ت)}{٢ + ت} = \frac{١ - ت + ٢ت - ٢ت^٢}{٢ + ت} = \frac{٣ + ت}{٢ + ت}$

∴ $\frac{٣ + ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٦ - ٣ت + ٢ت - ت^٢}{٤ - ت^٢}$

$= \frac{٧ - ت}{٥} = \frac{٧}{٥} - \frac{ت}{٥}$

(٦) $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ت} = \frac{٩ - ت^٢}{٣ - ٤ت} = \frac{١٠}{٣ - ٤ت}$

∴ $\frac{١٠}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{١٠(٣ + ٤ت)}{٩ - ١٦ت^٢}$

$= \frac{١٠(٣ + ٤ت)}{٢٥}$

$= \frac{٦}{٥} + \frac{٨ت}{٥}$

(٧) $\frac{١}{(١ + ٢ت)^٢} = \frac{١}{١ + ٤ت + ٤ت^٢} = \frac{١}{-٣ + ٤ت}$

∴ $\frac{١}{-٣ + ٤ت} \times \frac{-٣ - ٤ت}{-٣ - ٤ت} = \frac{-٣ - ٤ت}{٩ - ١٦ت^٢}$

$= \frac{-٣}{٢٥} - \frac{٤ت}{٢٥}$

(٨) $\frac{١ + ت + ١ت^٢ + ٢ت^٣}{١ - ٤ت + ٢ت^٢ - ٢ت^٣} = \frac{-١ - ت}{-١ - ٢ت} = \frac{١}{٢}$

(٩) $\frac{\sqrt{١٢} + ٢\sqrt{٢}ت}{\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٢}ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}ت}{\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}ت}$

$= \frac{٦ + ٨\sqrt{٦}ت + ١٢ت^٢}{٣ - ١٨ت^٢} = \frac{-٦ + ٨\sqrt{٦}ت}{٢١}$

$= -\frac{٢}{٧} + \frac{٨\sqrt{٦}ت}{٢١}$

## ٦

(١) ∵ ٣ س² + ١٢ = ٠ ∴ ٣ س² = −١٢

∴ س² = −٤ ∴ س = ± $\sqrt{-٤}$

∴ س = ± $\sqrt{٤ت^٢}$ ∴ س = ± ٢ ت

(٢) ∵ ٤ س² + ١٠٠ = ٧٥ ∴ ٤ س² = −٢٥

∴ س² = −$\frac{٢٥}{٤}$ ∴ س = ± $\sqrt{-\frac{٢٥}{٤}}$

∴ س = ± $\sqrt{\frac{٢٥}{٤}ت^٢}$ ∴ س = ± $\frac{٥}{٢}$ ت

(٣) $\text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{٤}\,\text{ت}}{٢} = ٢ \pm \text{ت}$

(٤) $\text{س} = \frac{-٦ \pm \sqrt{(٦)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٥}}{٢ \times ٢} = \frac{-٦ \pm \sqrt{-٤}}{٤}$

$= \frac{-٦ \pm \sqrt{٤}\,\text{ت}}{٤} = \frac{-٣}{٢} \pm \frac{١}{٢}\text{ت}$

## ٧

(١) $\because \text{س} + \text{ص ت} = (٣ + ٢\text{ت}) + (٢ - \text{ت})$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = ٥ + \text{ت}$

$\therefore \text{س} = ٥ \;،\; \text{ص} = ١$

(٢) $\because \text{س} + \text{ص ت} = (٢ - ٣\text{ت})^{٢}$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = ٤ - ١٢\text{ت} + ٩\text{ت}^{٢}$

$= -٥ - ١٢\text{ت}$

$\therefore \text{س} = -٥ \;،\; \text{ص} = -١٢$

(٣) $\because ٣\text{س} - ٢\text{ص ت} = (٥ - ٢\text{ت})^{٢}$

$\therefore ٣\text{س} - ٢\text{ص ت} = ٢٥ - ٢٠\text{ت} + ٤\text{ت}^{٢}$

$= ٢١ - ٢٠\text{ت}$

$\therefore ٣\text{س} = ٢١ \qquad \therefore \text{س} = ٧$

$، -٢\text{ص} = -٢٠ \qquad \therefore \text{ص} = ١٠$

(٤) $\because (٢\text{س} - ٣) + (٣\text{ص} + ١)\text{ت} = ٧ + ١٠\text{ت}$

$\therefore ٢\text{س} - ٣ = ٧ \qquad \therefore ٢\text{س} = ١٠$

$\therefore \text{س} = ٥ \;،\; ٣\text{ص} + ١ = ١٠$

$\therefore ٣\text{ص} = ٩ \qquad \therefore \text{ص} = ٣$

(٥) $\because (٢\text{س} - \text{ص}) + (\text{س} - ٢\text{ص})\text{ت} = ٥ + \text{ت}$

$\therefore ٢\text{س} - \text{ص} = ٥ \; (١) \;،\; \text{س} - ٢\text{ص} = ١ \; (٢)$

بضرب (١) × −٢ :

$\therefore -٤\text{س} + ٢\text{ص} = -١٠ \qquad (٣)$

بجمع (٢) ، (٣) : $\therefore -٣\text{س} = -٩$

$\therefore \text{س} = ٣ \qquad \therefore \text{ص} = ١$

(٦) $\because ٢\text{س} + \text{س ت} - ٢\text{ص} + \text{ص ت} = ٥$

$\therefore (٢\text{س} - ٢\text{ص}) + (\text{س} + \text{ص})\text{ت} = ٥$

$\therefore ٣\text{س} - ٢\text{ص} = ٥ \; (١) \;،\; \text{س} + \text{ص} = ٠ \; (٢)$

بضرب (٢) × ٢ : $\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} = ٠ \qquad (٣)$

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore ٥\text{س} = ٥$

$\therefore \text{س} = ١ \qquad \therefore \text{ص} = -١$

(٧) $\because \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} + (\text{س} + \text{ص})\text{ت} = ٤\text{ت}$

$\therefore \text{س} + \text{ص} = ٤ \;،\; \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٠$

$\therefore (\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = ٠$

$\therefore ٤(\text{س} - \text{ص}) = ٠ \qquad \therefore \text{س} = \text{ص} = ٢$

## ٨

(١) الطرف الأيمن $= \frac{١٠}{٢ + \text{ت}} \times \frac{٢ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{١٠(٢ - \text{ت})}{٤ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٠(٢ - \text{ت})}{٥}$

$= ٤ - ٢\text{ت}$

$\therefore ٤ - ٢\text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = ٤ \;،\; \text{ص} = -٢$

(٢) الطرف الأيمن $= \frac{٦ - ٤\text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}$

$= \frac{٦ + ٢\text{ت} - ٤\text{ت}^{٢}}{١ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٠ + ٢\text{ت}}{٢}$

$= ٥ + \text{ت}$

$\therefore ٥ + \text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = ٥ \;،\; \text{ص} = ١$

(٣) الطرف الأيمن $= \frac{(٢ + \text{ت})(٢ - \text{ت})}{٣ + ٤\text{ت}}$

$= \frac{٤ - \text{ت}^{٢}}{٣ + ٤\text{ت}} = \frac{٥}{٣ + ٤\text{ت}}$

بالضرب × مرافق المقام

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \frac{٥}{٣ + ٤\text{ت}} \times \frac{٣ - ٤\text{ت}}{٣ - ٤\text{ت}}$

$= \frac{٥(٣ - ٤\text{ت})}{٩ - ١٦\text{ت}^{٢}} = \frac{٥(٣ - ٤\text{ت})}{٢٥}$

$= \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\text{ت}$

$\therefore \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\text{ت} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٥} \;،\; \text{ص} = \frac{-٤}{٥}$





## ٩

$\because \text{س} = \frac{١٣}{٥ - \text{ت}} \times \frac{٥ + \text{ت}}{٥ + \text{ت}} = \frac{١٣(٥ + \text{ت})}{٢٥ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{١٣(٥ + \text{ت})}{٢٦} = \frac{٥}{٢} + \frac{\text{ت}}{٢}$

$، \text{ص} = \frac{٣ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} \times \frac{١ - \text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٣ - \text{ت} - ٢\text{ت}^{٢}}{١ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{٥}{٢} - \frac{\text{ت}}{٢}$

∴ س ، ص عددان مترافقان.

## ١٠

الطرف الأيسر $= \frac{٢ + \text{ت}}{٢ - \text{ت}} \times \frac{٢ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{٤ + ٤\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{٤ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{٣ + ٤\text{ت}}{٥} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\text{ت}$

$\therefore \text{أ} + \text{ب ت} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\text{ت} \qquad \therefore \text{أ} = \frac{٣}{٥} \;،\; \text{ب} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = ١$

## ١١

| | | |
|---|---|---|
| (١) (ب) | (٢) (ب) | (٣) (جـ) |
| (٤) (جـ) | (٥) (جـ) | (٦) (جـ) |
| (٧) (ب) | (٨) (أ) | (٩) (ب) |

## ١٢

إجابة أحمد هى الصحيحة لأن طريقة فك كريم للقوس $(٢ + ٣\text{ت})^{٢}$ خطأ

## ١٣

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) (جـ) | (٢) (أ) | (٣) (د) | (٤) (د) |
| (٥) (د) | (٦) (أ) | (٧) (ب) | (٨) (أ) |
| (٩) (جـ) | (١٠) (جـ) | (١١) (جـ) | (١٢) (د) |
| (١٣) (د) | | | |

### إرشادات لحل رقم ١٣

(١) ∵ ل جذر من جذور المعادلة $\text{س}^{٢} + ١ = ٠$

$\therefore \text{ل}^{٢} + ١ = ٠ \qquad \text{ل}^{٢} = -١$

$\therefore \text{ل}^{٢٠١٨} = (\text{ل}^{٢})^{١٠٠٩} = (-١)^{١٠٠٩} = -١$

بالمثل $\text{م}^{٢٠١٨} = -١$

$\therefore \text{ل}^{٢٠١٨} + \text{م}^{٢٠١٨} = (-١) + (-١) = -٢$

(٢) $(١ + \text{ت})^{٢٠٢٠} = [(١ + \text{ت})^{٢}]^{١٠١٠} = (٢\text{ت})^{١٠١٠}$

$، (١ - \text{ت})^{٢٠٢٠} = [(١ - \text{ت})^{٢}]^{١٠١٠}$

$= (-٢\text{ت})^{١٠١٠} = (٢\text{ت})^{١٠١٠}$

$\therefore (١ + \text{ت})^{٢٠٢٠} = (١ - \text{ت})^{٢٠٢٠}$

(٣) $\left(\frac{١ - \text{ت}}{١ + \text{ت}}\right)^{١٠٠} = \left(\frac{(١ - \text{ت})^{٢}}{(١ + \text{ت})^{٢}}\right)^{٥٠} = \left(\frac{-٢\text{ت}}{٢\text{ت}}\right)^{٥٠} = ١$

(٤) $(٢ + \text{ت})^{-١} = \frac{١}{٢ + \text{ت}} \times \frac{٢ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{٢ - \text{ت}}{٤ + ١} = \frac{٢ - \text{ت}}{٥}$

∴ مرافق العدد $(٢ + \text{ت})^{-١}$ هو $\frac{٢ + \text{ت}}{٥}$

(٥) $\text{س}^{٢} + ٤ = \text{س}^{٢} - ٤\text{ت}^{٢}$

$= (\text{س} - ٢\text{ت})(\text{س} + ٢\text{ت})$

(٦) $\because (\text{س} + ٢) + ٤\text{ص ت} = ٣ - ٤\text{ت}$

$\therefore \text{س} + ٢ = ٣ \qquad \therefore \text{س} = ١$

$، ٤\text{ص} = -٤ \qquad \therefore \text{ص} = -١$

(٧) $\frac{١ + \text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}} = \frac{١ + ٢\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{١ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{١ + ٢\text{ت} - ١}{١ - (-١)} = \text{ت}$

$\therefore \left(\frac{١ + \text{ت}}{١ - \text{ت}}\right)^{\text{ن}} = (\text{ت})^{\text{ن}}$

∴ أصغر عدد صحيح موجب يجعل $(\text{ت})^{\text{ن}} = ١$ هو ٤

(٨) ∵ أ ، ب ، جـ ، د هى أعداد صحيحة موجبة متتالية

$\therefore \text{ب} = \text{أ} + ١ \;،\; \text{جـ} = \text{أ} + ٢ \;،\; \text{د} = \text{أ} + ٣$

$\therefore \text{ت}^{\text{أ}} + \text{ت}^{\text{ب}} + \text{ت}^{\text{جـ}} + \text{ت}^{\text{د}}$

$= \text{ت}^{\text{أ}} + \text{ت}^{\text{أ}+١} + \text{ت}^{\text{أ}+٢} + \text{ت}^{\text{أ}+٣}$

$= \text{ت}^{\text{أ}}(١ + \text{ت} + \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٣})$

$= \text{ت}^{\text{أ}}(١ + \text{ت} - ١ - \text{ت})$

$= \text{ت}^{\text{أ}} \times$ صفر = صفر

**الوحدة الأولى**

(٩) ت + $ت^{٢}$ + $ت^{٣}$ + $ت^{٤}$ + ... + $ت^{١٠٠}$

= ت − ١ − ت + ١ + ... + $ت^{١٠٠}$

(مجموع كل أربع حدود متتالية = صفر)

∴ المجموع الكلى = صفر

(١٠) (١ + ت) (١ + $ت^{٢}$) (١ + $ت^{٣}$) (١ + $ت^{٤}$) ... (١ + $ت^{١٠٠}$)

، ∵ (١ + $ت^{٢}$) = (١ − ١) = صفر

∴ ناتج الضرب (١ + ت) (صفر) (١ + $ت^{٣}$) (١ + $ت^{٤}$) ... (١ + $ت^{١٠٠}$) = صفر

(١١) ∵ ت = $ت^{٥}$     ∴ ليس بالضرورة م = ن

، $ت^{م}$ = $ت^{ن}$

∴ $ت^{م}$ = $ت^{ن + ٤ك}$ حيث ك عدد صحيح

∴ م = ن + ٤ ك     ∴ م − ن = ٤ ك

∴ م − ن مضاعف لـ ٤

، ∵ $ت^{م}$ × $ت^{ن}$ = $ت^{ن}$ × $ت^{ن}$

∴ $ت^{م + ن}$ = $ت^{٢ن + ٤ك}$

∴ م + ن = ٢ ن + ٤ ك

∴ م + ن = ٢ (ن + ٢ ك) عدد زوجى

(١٢) ∵ أ < ب < ٠

∴ أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

∴ $\sqrt{أب}$ عدد حقيقى

، ∵ جـ > ٠

∴ ب جـ < ٠ ، ب أ > ٠

∴ $\sqrt{ب (جـ − أ)}$ = $\sqrt{ب جـ − ب أ}$ عدد تخيلى

∴ $\sqrt{أب}$ = ٢     ∴ أب = ٤

، $\sqrt{ب جـ − ب أ}$ = ٣ ت

∴ ب جـ − ب أ = −٩

∴ ب جـ − ٤ = −٩     ∴ ب جـ = −٥

(١٣) ∵ لا يوجد ترتيب فى مجموعة الأعداد المركبة غير الحقيقية.

∴ الاختيار الصحيح هو (د)

**١٤**

∵ ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

= س ص − س ت + ٣ ص ت − ٣ $ت^{٢}$ − ٩

= س ص − س ت + ٣ ص ت − ٦

= (س ص − ٦) + (− س + ٣ ص) ت

∴ س ص − ٦ = ٠     ∴ س ص = ٦

، − س + ٣ ص = ٧     ∴ س = ٣ ص − ٧

∴ ص (٣ ص − ٧) = ٦     ∴ ٣ $ص^{٢}$ − ٧ ص = ٦

∴ ٣ $ص^{٢}$ − ٧ ص − ٦ = ٠

∴ (ص − ٣) (٣ ص + ٢) = ٠

∴ ص = ٣     ∴ س = ٢

أ، ص = $-\frac{٢}{٣}$     ∴ س = −٩

**١٥**

س = $\frac{٢ + ت}{٢ − ت} × \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{٤ + ٤ت + ت^{٢}}{٤ − ت^{٢}}$

= $\frac{٣ + ٤ت}{٥} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$

، ص = $\frac{٢ + ٣ت}{٢ + ت} × \frac{٢ − ت}{٢ − ت} = \frac{٤ + ٤ت − ٣ت^{٢}}{٤ − ت^{٢}}$

= $\frac{٧ + ٤ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$

، ∵ ٢ س − ص = أ + ب ت

∴ $\frac{٦}{٥} + \frac{٨}{٥}ت − \frac{٧}{٥} − \frac{٤}{٥}ت$ = أ + ب ت

∴ $-\frac{١}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$ = أ + ب ت

∴ أ = $-\frac{١}{٥}$ ، ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ ٩ $أ^{٢}$ + $ب^{٢}$ = ٩ $(-\frac{١}{٥})^{٢} + (\frac{٤}{٥})^{٢} = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}$ = ١





## إرشادات تمارين 2

**١**

(١) المميز = $(−٢)^{٢}$ − ٤ × ١ × ٥ = −١٦ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

(٢) المميز = $(−١١)^{٢}$ − ٤ × ١ × ١٠ = ٨١ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٣) المميز = $(−١٠)^{٢}$ − ٤ × ١ × ٢٥ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٤) المميز = $(−١٤)^{٢}$ − ٤ × ٤٩ × ١ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٥) المميز = $(٥)^{٢}$ − ٤ × (−١) × (−٣٠) = −٩٥ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

(٦) المميز = $(−٧)^{٢}$ − ٤ × ٢ × ٠ = ٤٩ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

**٢**

(١) ∵ $س^{٢}$ − ٢ س = ٥     ∴ $س^{٢}$ − ٢ س − ٥ = ٠

∴ المميز = $(−٢)^{٢}$ − ٤ × ١ × −٥ = ٢٤ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٢) ∵ ٦ $س^{٢}$ − ١٩ س + ١٥ = ٠

∴ المميز = $(−١٩)^{٢}$ − ٤ × ٦ × ١٥ = ١ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٣) ∵ س − ١١ − $س^{٢}$ + ٦ س = ٠

∴ $س^{٢}$ − ٧ س + ١١ = ٠

∴ المميز = $(−٧)^{٢}$ − ٤ × ١ × ١١ = ٥ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٤) ∵ $س^{٢}$ + ٤ س + ٤ + ٥ = ٠

∴ $س^{٢}$ + ٤ س + ٩ = ٠

∴ المميز = $(٤)^{٢}$ − ٤ × ١ × ٩ = −٢٠ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

(٥) ∵ س + $\frac{٩}{س}$ = ٦ بالضرب × س

∴ $س^{٢}$ + ٩ = ٦ س

∴ $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ المميز = $(−٦)^{٢}$ − ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٦) ∵ س − $\frac{٢}{س − ١}$ = ٤ بالضرب × (س − ١)

∴ $س^{٢}$ − س − ٢ = ٤ س − ٤

∴ $س^{٢}$ − ٥ س + ٢ = ٠

∴ المميز = $(−٥)^{٢}$ − ٤ × ١ × ٢ = ١٧ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٧) ∵ $\frac{س}{س + ١} + \frac{س}{س − ١}$ = ٣

∴ $\frac{س^{٢} − س + س^{٢} + س}{(س + ١)(س − ١)}$ = ٣

∴ $\frac{٢س^{٢}}{س^{٢} − ١}$ = ٣     ∴ ٢ $س^{٢}$ = ٣ $س^{٢}$ − ٣

∴ $س^{٢}$ − ٣ = ٠

∴ المميز = $(٠)^{٢}$ − ٤ × ١ × −٣ = ١٢ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٨) ∵ (س − ١) (س − ٧) = ٢ (س − ٣) (س − ٤)

∴ $س^{٢}$ − ٨ س + ٧ = ٢ $س^{٢}$ − ١٤ س + ٢٤

∴ $س^{٢}$ − ٦ س + ١٧ = ٠

∴ المميز = $(−٦)^{٢}$ − ٤ × ١ × ١٧ = −٣٢ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

**٣**

∵ المميز = $(−٣)^{٢}$ − ٤ × ٢ × ٢ = −٧ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{−٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}ت}{٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{٣ + \sqrt{٧}ت}{٤}$ ، $\frac{٣ − \sqrt{٧}ت}{٤}$

**٤**

(١) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (−٦)$^{٢}$ − ٤ × ٣ × ك = ٠

∴ ١٢ ك = ٣٦ ∴ ك = ٣

(٢) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (− ك)$^{٢}$ − ٤ × ١٨ × ٨ = ٠

∴ ك$^{٢}$ = ٥٧٦ ∴ ك = ± ٢٤

(٣) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (٥)$^{٢}$ − ٤ × ٢ × ٤ ك = ٠

∴ ٣٢ ك = ٢٥ ∴ ك = $\frac{٢٥}{٣٢}$

(٤) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (٧ ك)$^{٢}$ − ٤ × ٧٥ × ٣ = ٠

∴ ٤٩ ك$^{٢}$ = ٩٠٠ ∴ ك = ± $\frac{٣٠}{٧}$

(٥) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (−٣)$^{٢}$ − ٤ × ١ × $\left(٢ + \frac{١}{ك}\right)$ = ٠

∴ ٨ + $\frac{٤}{ك}$ = ٩ ∴ $\frac{٤}{ك}$ = ١

∴ ك = ٤

(٦) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = صفر

∴ (٢ ك + ٣)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ك$^{٢}$ = ٠

∴ ~~٤ ك$^{٢}$~~ + ١٢ ك + ٩ − ~~٤ ك$^{٢}$~~ = ٠

∴ ك = $\frac{-٣}{٤}$

(٧) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ [٢ (ك − ١)]$^{٢}$ − ٤ × ١ × (٢ ك + ١) = ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ − ٨ ك + ٤ − ٨ ك − ٤ = ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ − ١٦ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = ٤

، ∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{-٢ ك + ٢ \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٢ ك + ٢}{٢}$ = − ك + ١

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ١

، عندما ك = ٤

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى −٣

(٨) المعادلة هى :

س$^{٢}$ − (٢ ك + ٦) س + (٧ ك + ٩) = ٠

∵ الجذرين متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (٢ ك + ٦)$^{٢}$ − ٤ × ١ × (٧ ك + ٩) = ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ + ٢٤ ك + ٣٦ − ٢٨ ك − ٣٦ = ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ١) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = ١

∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{(٢ ك + ٦) \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = ك + ٣

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٣

، عندما ك = ١

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٤

**٥**

(١) ∵ الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

∴ (٤)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ك > ٠

∴ ٤ ك < ١٦ ∴ ك < ٤

∴ ك ∈ ]−∞ ، ٤[

(٢) ∵ الجذران مركبان وغير حقيقيين. ∴ المميز < ٠

∴ (−٨)$^{٢}$ − ٤ × ك × ١٦ < ٠

∴ ٦٤ ك > ٦٤ ∴ ك > ١

∴ ك ∈ ]١ ، ∞[

(٣) ∵ س$^{٢}$ − ك − ٢ = ٠

، الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

∴ −٤ × ١ × (− ك − ٢) > ٠

∴ ٤ ك + ٨ > ٠ ∴ ك > −٢

∴ ك ∈ ]−٢ ، ∞[





**٦**

∵ المميز = (−٢ م)$^{٢}$ − ٤ × (م − ١) × م

= ٤ م$^{٢}$ − ٤ م$^{٢}$ + ٤ م = ٤ م

، ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ ٤ م < ٠ ∴ م < ٠ ∴ م ∈ ]−∞ ، ٠[

**٧**

(١) ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (−٣)$^{٢}$ − ٤ × ٢ × −٢

= ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان

• التحقق الجبرى : ∵ ٢ س$^{٢}$ − ٣ س − ٢ = ٠

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٤}$

∴ الجذران هما ٢ ، −$\frac{١}{٢}$ (نسبيان)

(٢) ∵ أحد المعاملات ليس عددًا نسبيًا

، المميز = $\left(\sqrt{٥}\right)^{٢}$ − ٤ × ١ × −٥ = ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

• التحقق الجبرى : ∵ س$^{٢}$ + $\sqrt{٥}$ س − ٥ = ٠

∴ س = $\frac{-\sqrt{٥} \pm \sqrt{٢٥}}{٢}$ = $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ أ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

(٣) ∵ ٢ س + ٦ + س$^{٢}$ − س = ٩

∴ س$^{٢}$ + س − ٣ = ٠

، ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (١)$^{٢}$ −٤ × ١ × −٣ = ١٣ (ليس مربعًا كاملاً)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

• التحقق الجبرى : ∵ س$^{٢}$ + س − ٣ = ٠

∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{-١ + \sqrt{١٣}}{٢}$ ، $\frac{-١ - \sqrt{١٣}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

**٨**

∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = ب$^{٢}$ − ٤ × أ × (ب − أ)

= ب$^{٢}$ − ٤ أ ب + ٤ أ$^{٢}$

= (ب − ٢ أ)$^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

**٩**

∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (ل − م)$^{٢}$ − ٤ × ل × − م

∴ ل$^{٢}$ − ٢ ل م + ٤ ل م + م$^{٢}$

= ل$^{٢}$ + ٢ ل م + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

**١٠**

∵ س$^{٢}$ + ك س + ك − ١ = ٠

∴ المعاملات نسبية ، المميز = ك$^{٢}$ − ٤ × ١ × (ك − ١)

= ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٤

= (ك − ٢)$^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

**١١**

∵ المعاملات نسبية

، المميز = (−٢ أ$^{٣}$)$^{٢}$ − ٤ × ١ × (أ$^{٦}$ − ب$^{٦}$)

= ٤ أ$^{٦}$ − ٤ أ$^{٦}$ + ٤ ب$^{٦}$

= ٤ ب$^{٦}$ = (٢ ب$^{٣}$)$^{٢}$ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

**١٢**

المميز = (٢ أ + ٣)$^{٢}$ − ٤ × (أ + ٢) × (أ − ١)

= ٤ أ$^{٢}$ + ١٢ أ + ٩ − ٤ (أ$^{٢}$ + أ − ٢)

= ٤ أ$^{٢}$ + ١٢ أ + ٩ − ٤ أ$^{٢}$ − ٤ أ + ٨ = ٨ أ + ١٧

، ∵ الجذرين حقيقيان ∴ ٨ أ + ١٧ ≥ ٠

∴ أ ≥ − $\frac{١٧}{٨}$ ∴ أ ∈ [− $\frac{١٧}{٨}$ ، ∞[

**١٣**

∵ المميز = (−٢ أ$^{٣}$)$^{٢}$ − ٤ (أ$^{٢}$ + ١) × أ$^{٤}$

= ٤ أ$^{٦}$ − ٤ أ$^{٦}$ − ٤ أ$^{٤}$ = −٤ أ$^{٤}$

، ∵ أ$^{٤}$ عدد موجب لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر

∴ −٤ أ$^{٤}$ يكون عددًا سالبًا

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر.

**١٤**

∵ (س − أ) (س − ب) = ٥

∴ س$^{٢}$ − (أ + ب) س + أ ب − ٥ = ٠

∴ المميز = (أ + ب)$^{٢}$ − ٤ × ١ × (أ ب − ٥)

= أ$^{٢}$ + ٢ أ ب + ب$^{٢}$ − ٤ أ ب + ٢٠

= أ$^{٢}$ − ٢ أ ب + ب$^{٢}$ + ٢٠ = (أ − ب)$^{٢}$ + ٢٠

«مقدار موجب دائمًا لكل قيم أ ، ب الحقيقية»

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

**١٥**

المميز = (−أ)$^{٢}$ − ٤ × (أ − ١) × ١

، = أ$^{٢}$ − ٤ أ + ٤ = (أ − ٢)$^{٢}$

، ∵ أ ≠ ٢ ∴ (أ − ٢)$^{٢}$ > ٠ لكل قيم أ

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

**١٦** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (د) (٧) (جـ)

**إرشادات لحل رقم ١٦**

(١) ∵ المميز = (−٢ $\sqrt{٥}$)$^{٢}$ − ٤ (١) (١) = ٢٠ − ٤

= ١٦

∴ الجذران حقيقيان.

، ∵ معامل س ليس عددًا نسبيًا.

∴ الجذران حقيقيان ولكن غير نسبيين.

(٢) ∵ (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) غير موجب.

∴ (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) أما أن تكون سالبة فيكون جذرى المعادلة مركبين مترافقين

وأما (ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ) = صفر

∴ الجذران حقيقيين متساويين.

، ∵ أ ، ب ، حـ ∈ ح

∴ الجذران مركبان مترافقان.

(٣) ∵ الجذران حقيقيان مختلفان.

∴ المميز > ٠ ∴ −٤ أ ب > ٠

∴ أ ب < ٠

(٤) ∵ أ + ب + حـ = ٠

∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

(−٢ أ) س$^{٢}$ − ٢ ب س − ٢ حـ = ٠

∴ أ س$^{٢}$ + ب س + حـ = ٠

، المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ = (− أ − حـ)$^{٢}$ − ٤ أ حـ

= أ$^{٢}$ + ٢ أ حـ + حـ$^{٢}$ − ٤ أ حـ

= أ$^{٢}$ − ٢ أ حـ + حـ$^{٢}$ = (أ − حـ)$^{٢}$

، ∵ أ ≠ حـ ∴ (أ − حـ)$^{٢}$ > صفر

∵ جذرى المعادلة حقيقيان مختلفان.

، ∵ أ ، ب ، حـ ∈ ص

∴ الجذران حقيقيان مختلفان نسبيان.





(٥) • س$^{٢}$ − ٤ س − ٥ = ٠

المميز : (−٤)$^{٢}$ − ٤ × ١ × −٥ = ٣٦ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• $\sqrt{٣}$ س$^{٢}$ + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠

المميز : ٥ − ٤ $\sqrt{٣}$ × −١ = ٥ + ٤ $\sqrt{٣}$ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• س$^{٢}$ − ٣ $\sqrt{٢}$ س + ٤ = ٠

المميز : (−٣ $\sqrt{٢}$)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ٤ = ٢ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• ٣ س$^{٢}$ − $\sqrt{٧}$ س + ٥ = ٠

المميز : ٧ − ٤ × ٣ × ٥ = −٥٣ < ٠

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية.

، المميز سالب.

∴ الجذران مركبان مترافقان وغير حقيقيين.

(٦) ∵ الجذران مركبان مترافقان

∴ المميز ≤ صفر

∴ (−٢ $\sqrt{٢}$)$^{٢}$ − ٤ × ١ × أ ≤ ٠

∴ −٤ أ ≤ −٨ ∴ أ ≥ ٢

∴ أ ∈ [٢ ، ∞[

(٧) ∵ جذرى المعادلة ينتميان للفترة ]−١ ، ١[

∴ $\frac{٢ + \sqrt{(−٢)^{٢} − ٤ (٤) م}}{٢ (٤)}$ < ١

∴ ٢ + $\sqrt{٤ − ١٦ م}$ < ٨ ∴ $\sqrt{٤ − ١٦ م}$ < ٦

∴ ٠ ≤ ٤ − ١٦ م < ٣٦

∴ −٤ ≤ − ١٦ م < ٣٢

∴ $\frac{−٤}{−١٦}$ ≥ م > $\frac{٣٢}{−١٦}$ ∴ −٢ < م ≤ $\frac{١}{٤}$

**١٧**

المميز = (٢ أ)$^{٢}$ − ٤ × ١ × (أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$ − حـ$^{٢}$)

= ٤ أ$^{٢}$ − ٤ أ$^{٢}$ + ٤ ب$^{٢}$ + ٤ حـ$^{٢}$

= ٤ (ب$^{٢}$ + حـ$^{٢}$) ≥ صفر (لأى ب ، حـ حقيقيين)

∴ الجذران حقيقيان.

**١٨**

∵ $\frac{١}{س + أ}$ = $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{أ}$ ∴ $\frac{١}{س + أ}$ = $\frac{س + أ}{أ س}$

∴ (س + أ)$^{٢}$ − أ س = ٠

∴ س$^{٢}$ + ٢ أ س + أ$^{٢}$ − أ س = ٠

∴ س$^{٢}$ + أ س + أ$^{٢}$ = ٠

∴ المميز = أ$^{٢}$ − ٤ × ١ × أ$^{٢}$

= −٣ أ$^{٢}$ < صفر لكل أ ∈ ح*

∴ جذرا المعادلة غير حقيقيين.

## إرشادات تمارين 3

**١**

(١) −٣ ، −١٠ (٢) ٤ ، ٦ (٣) −١ ، $\frac{−٢٥}{٤}$

(٤) $\frac{٧}{٢}$ ، −٣ (٥) ٠ ، $\frac{−٤}{٣}$ (٦) ٣ ، ٠

(٧) ∵ ٣ س$^{٢}$ − ٣٢ س + ٣٠ = ٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{٣٢}{٣}$ ، حاصل ضربهما = ١٠

(٨) ∵ ٤ س$^{٢}$ + ٢٥ س + ٦ = ٣ س$^{٢}$ − ١٠ س + ٨

∴ س$^{٢}$ + ٣٥ س − ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = −٣٥

، حاصل ضربهما = −٢

(٩) بضرب الطرفين فى م. م. أ المقامات وهو ٢ س

∴ س$^{٢}$ + ٢ = ٣ س ∴ س$^{٢}$ − ٣ س + ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضربهما = ٢

(١٠) ∵ (٢ س + ٢) (س − ١) = (س + ١) (س + ٢)

∴ ٢ س$^{٢}$ − س − ٢ = س$^{٢}$ + ٣ س + ٢

∴ ٢ س$^{٢}$ − ٤ س − ٤ = ٠

∴ س$^{٢}$ − ٢ س − ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = −٢

(١١) ∵ (أ − ١) س$^{٢}$ + (١ − أ$^{٢}$) س + أ − ١ = ٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-(١ - أ^٢)}{أ - ١} = \frac{أ^٢ - ١}{أ - ١}$

$= \frac{(أ - ١)(أ + ١)}{أ - ١} = أ + ١$

، حاصل ضربهما = $\frac{أ - ١}{أ - ١} = ١$

(١٢) مجموع الجذرين = $\frac{-(أ^٢ - ب^٢)}{أ + ب}$

$= \frac{-(أ - ب)(أ + ب)}{أ + ب} = -(أ - ب)$

، حاصل ضربهما

$= \frac{أ^٢ + ٢أب + ب^٢}{أ + ب} = \frac{(أ + ب)^٢}{أ + ب} = أ + ب$

**٢**

(١) (جـ)　(٢) (ب)　(٣) (جـ)

(٤) (أ)　(٥) (جـ)　(٦) (جـ)

(٧) (د)　(٨) (جـ)　(٩) (أ)

**٣**

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$

∴ $\frac{-جـ}{٣} = \frac{-٨}{٣}$　∴ جـ = ٨

∴ ٣س$^٢$ + ١٠س − ٨ = ٠

∴ (٣س − ٢) (س + ٤) = ٠

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أو س = −٤

**٤**

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$　∴ $\frac{-ب}{٢} = -\frac{٣}{٢}$

∴ ب = ٣　∴ ٢س$^٢$ + ٣س − ٥ = ٠

∴ (٢س + ٥) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{-٥}{٢}$ أو س = ١

**٥**

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = ٢$

∴ −١ + الجذر الآخر = ٢　∴ الجذر الآخر = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = أ$

∴ −١ × ٣ = أ　∴ أ = −٣

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ × الجذر الآخر = $\frac{٣}{٢}$　∴ الجذر الآخر = ٣

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{أ}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} + ٣ = \frac{أ}{٢}$　∴ أ = ٧

(٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = ٢$

∴ (١ + ت) + الجذر الآخر = ٢

∴ الجذر الآخر = ١ − ت

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = أ$

∴ (١ + ت) (١ − ت) = أ

∴ ١ − ت$^٢$ = أ　∴ أ = ٢

(٤) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = ٥$

∴ (٢ + ت) × الجذر الآخر = ٥

∴ الجذر الآخر = ٢ − ت

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -أ$

∴ (٢ + ت) + (٢ − ت) = −أ

∴ أ = −٤

**٦**

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -أ$

∴ ٢ + ٥ = −أ　∴ أ = −٧

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = ب$

∴ ٢ × ٥ = ب　∴ ب = ١٠

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-٢١}{أ}$

∴ −٣ × ٧ = $\frac{-٢١}{أ}$　∴ أ = ١





، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = ب$

∴ −٣ + ٧ = ب　∴ ب = ٤

(٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{١}{أ}$

∴ −١ + $\frac{٣}{٢} = \frac{١}{أ}$　∴ أ = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{ب}{٢}$

∴ −١ × $\frac{٣}{٢} = \frac{ب}{٢}$　∴ ب = −٣

(٤) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = -أ$

∴ $\sqrt{٣}$ت + $(-\sqrt{٣}$ت$)$ = −أ　∴ أ = ٠

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = ب$

∴ $\sqrt{٣}$ت × $(-\sqrt{٣}$ت$)$ = ب　∴ ب = ٣

**٧**

(١) ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

∴ ك − ١ = ٠　∴ ك = ١

(٢) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ ك − ٢ = −٤　∴ ك = −٢

(٣) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ ٤ك = ك$^٢$ + ٤　∴ ك$^٢$ − ٤ك + ٤ = ٠

∴ (ك − ٢)$^٢$ = ٠　∴ ك = ٢

(٤) ∵ ٢س$^٢$ − ٥س + ك$^٢$ − ٢ = ٠

، ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ ك$^٢$ − ٢ = ٢　∴ ك = ±٢

**٨**

بفرض أن الجذرين هما : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = ٣ ل = ٣　∴ ل = ١

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ = جـ　∴ جـ = ٢

**٩**

بفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = −٢ ل

∴ حاصل ضرب الجذرين = −٢ ل$^٢$

∴ −٩٨ = −٢ ل$^٢$　∴ ل$^٢$ = ٤٩　∴ ل = ±٧

، ∵ مجموع الجذرين = $-\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$

∴ ل − ٢ ل = −ك　∴ −ل = −ك

∴ ل = ك　∴ ك = ±٧

**١٠**

نفرض أن أحد الجذرين = ل　∴ الجذر الآخر = ل + ١

∴ ل + ل + ١ = ٥　∴ ل = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = م

∴ ل (ل + ١) = م وبالتعويض عن ل = ٢

∴ ٢ × ٣ = م　∴ م = ٦

**١١**

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = ٢ ل + ١

∴ ل (٢ ل + ١) = ٢١　∴ ٢ ل$^٢$ + ل − ٢١ = ٠

∴ (٢ ل + ٧) (ل − ٣) = ٠

∴ ل = $\frac{-٧}{٢}$ أو ل = ٣

، ∵ ل + (٢ ل + ١) = أ　∴ ٣ ل + ١ = أ

∴ أ = −٩٫٥ أو أ = ١٠

**١٢**

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-(أ - ٣)}{أ - ٢}$

∴ ٢ = $\frac{-أ + ٣}{أ - ٢}$

∴ ٢أ − ٦ = −أ + ٣　∴ أ = $\frac{٩}{٤}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^٢} = \frac{-٤}{أ - ٢}$

∴ −٤ = $\frac{-٤}{أ - ٢}$　∴ أ = ٣

**١٣**

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{٣ - ك}{ك - ٤}$ = ٥

∴ ٣ − ك = ٥ ك − ٢٠

∴ ٦ ك = ٢٣   ∴ ك = $\frac{٢٣}{٦}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-٣}{ك - ٤}$ = −٣

∴ ك − ٤ = ١   ∴ ك = ٥

(٣) ∵ مجموع الجذرين = ٠   ∴ ٣ − ك = ٠

∴ ك = ٣

(٤) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ −٣ = ك − ٤   ∴ ك = ١

**١٤**

بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{ك - ١}{٢}$ = ٣ ل

∴ ك − ١ = ٦ ل   ∴ ل = $\frac{ك - ١}{٦}$   (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ك^{٢} + ٢ ك - ٣}{٢}$ = ٢ $ل^{٢}$   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ك^{٢} + ٢ ك - ٣}{٢} = ٢ \left(\frac{ك - ١}{٦}\right)^{٢}$

∴ $ك^{٢}$ + ٢ ك − ٣ = ٤ × $\frac{ك^{٢} - ٢ ك + ١}{٣٦}$

∴ ٩ $ك^{٢}$ + ١٨ ك − ٢٧ = $ك^{٢}$ − ٢ ك + ١

∴ ٨ $ك^{٢}$ + ٢٠ ك − ٢٨ = ٠

∴ ٢ $ك^{٢}$ + ٥ ك − ٧ = ٠

∴ (٢ ك + ٧) (ك − ١) = ٠

∴ ك = −٣٫٥ أ، ك = ١

**١٥**

بفرض أن الجذرين : ل ، ٤ ل

∴ مجموع الجذرين = أ = ٥ ل   ∴ ل = $\frac{١}{٥}$ أ   (١)

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ أ − ٤ = ٤ $ل^{٢}$   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٢ أ − ٤ = ٤ $\left(\frac{١}{٥} أ\right)^{٢}$

∴ ٢ أ − ٤ = $\frac{٤}{٢٥}$ $أ^{٢}$   ∴ ٢ $أ^{٢}$ − ٢٥ أ + ٥٠ = ٠

∴ (أ − ١٠) (٢ أ − ٥) = ٠

∴ أ = ١٠ أ، أ = ٢ $\frac{١}{٢}$

**١٦**

∵ مجموع الجذرين = $\frac{أ}{أ - ٢}$ = ٣

∴ أ = ٣ أ − ٦   ∴ أ = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ب^{٢}}{أ - ٢}$ = ٥

∴ $ب^{٢}$ = ٥   ∴ ب = ± $\sqrt{٥}$

**١٧**

نفرض أن الجذرين : ل ، $ل^{٢}$

، ∵ مجموع الجذرين = ل + $ل^{٢}$ = ٦

∴ $ل^{٢}$ + ل − ٦ = ٠

∴ (ل + ٣) (ل − ٢) = ٠   ∴ ل = −٣ أ، ل = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ل × $ل^{٢}$ = جـ

∴ جـ = $ل^{٣}$

، عندما ل = −٣   ∴ جـ = $(-٣)^{٣}$ = −٢٧

، عندما ل = ٢   ∴ جـ = $٢^{٣}$ = ٨

**١٨**

نفرض أن الجذرين : ل ، $ل^{٢}$

، ∵ مجموع الجذرين = ل + $ل^{٢}$ = $\frac{٣٠}{٨}$ = $\frac{١٥}{٤}$

∴ ٤ $ل^{٢}$ + ٤ ل − ١٥ = ٠

∴ (٢ ل − ٣) (٢ ل + ٥) = ٠   ∴ ل = $\frac{٣}{٢}$ أ، ل = −$\frac{٥}{٢}$

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ل × $ل^{٢}$ = $\frac{جـ}{٨}$

∴ جـ = ٨ $ل^{٣}$

، عندما ل = $\frac{٣}{٢}$   ∴ جـ = ٨ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣}$ = ٢٧

، عندما ل = −$\frac{٥}{٢}$   ∴ جـ = ٨ $\left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٣}$ = −١٢٥





**١٩**

بفرض أن الجذرين : ل ، ١ − ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{أ}{٤}$ = ١   ∴ أ = ٤

**٢٠**

نفرض أن الجذرين : ل ، $\frac{١}{ل}$ + ١

∴ حاصل ضرب الجذرين = ل $\left(\frac{١}{ل} + ١\right)$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ١ + ل = $\frac{٣}{٢}$   ∴ ل = $\frac{١}{٢}$

، ∵ مجموع الجذرين = ل + $\frac{١}{ل}$ + ١ = $\frac{أ}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ + ٢ + ١ = $\frac{أ}{٢}$   ∴ أ = ٧

**٢١**

نفرض أن الجذرين : ل ، $ل^{٢}$ − ٢

∴ مجموع الجذرين = $ل^{٢}$ + ل − ٢ = ١٠

∴ $ل^{٢}$ + ل − ١٢ = ٠   ∴ (ل + ٤) (ل − ٣) = ٠

∴ ل = −٤ أ، ل = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $ل^{٣}$ − ٢ ل = جـ

∴ جـ = −٥٦ أ، جـ = ٢١

**٢٢**

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = ٥ ل

∴ ل = $\frac{-ب}{٥ أ}$   (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = ٦ $ل^{٢}$   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{جـ}{أ}$ = ٦ $\left(\frac{-ب}{٥ أ}\right)^{٢}$

∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٦ ب^{٢}}{٢٥ أ^{٢}}$   ∴ ٢٥ أ جـ = ٦ $ب^{٢}$

**٢٣**

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ٦ $ل^{٢}$ = $\frac{٣}{٨}$

∴ $ل^{٢}$ = $\frac{١}{١٦}$   ∴ ل = $\frac{١}{٤}$ (الحل السالب مرفوض)

، ∵ مجموع الجذرين = ٥ ل = $\frac{ب}{٨}$

∴ ل = $\frac{ب}{٤٠}$ وبالتعويض عن ل = $\frac{١}{٤}$   ∴ ب = ١٠

**٢٤**

نفرض أن جذري المعادلة هما : ل ، م

∴ ل + م = $\frac{-(٣ أ - ١)}{أ + ١}$ ، ل م = $\frac{أ^{٢} + ١}{أ + ١}$

∴ $\frac{١ - ٣ أ}{أ + ١} = \frac{أ^{٢} + ١}{أ + ١}$   ∴ $أ^{٢}$ + ١ = ١ − ٣ أ

∴ $أ^{٢}$ + ٣ أ = ٠   ∴ أ = ٠ أ، أ = −٣

**٢٥**

(١) بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = ٣ ل

∴ ل = $\frac{-ب}{٣ أ}$   (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = ٢ $ل^{٢}$   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{جـ}{أ}$ = ٢ $\left(\frac{-ب}{٣ أ}\right)^{٢}$

∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢ ب^{٢}}{٩ أ^{٢}}$

∴ ٩ أ جـ = ٢ $ب^{٢}$ وهو الشرط اللازم

(٢) بفرض أن الجذرين : ل ، ل + ٣

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = ٢ ل + ٣

∴ ل = $\frac{١}{٢} \left(\frac{-ب}{أ} - ٣\right)$   (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = $ل^{٢}$ + ٢ ل   (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{١}{٤}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)^{٢} + \frac{٣}{٢}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + ٦\frac{\text{ب}}{\text{أ}} + ٩\right) - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٩}{٤} - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} - \frac{٩}{٤}$

$\therefore \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٩\text{أ}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}}$

$\therefore ٤\text{أ}\text{ج} = \text{ب}^{٢} - ٩\text{أ}^{٢}$ وهو الشرط اللازم.

**26**

$\because$ مجموع جذرى المعادلة الأولى $= \text{أ} + ٤$

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية $= \frac{\text{أ}^{٢}}{٢}$

$\therefore \text{أ} + ٤ = \frac{\text{أ}^{٢}}{٢}$ $\quad \therefore \text{أ}^{٢} - ٢\text{أ} - ٨ = ٠$

$\therefore (\text{أ} - ٤)(\text{أ} + ٢) = ٠$ $\quad \therefore \text{أ} = ٤$ ، $\text{أ} = -٢$

**27**

إجابة نورا هى الصحيحة لأنها وضعت المعادلة على الصورة

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{ج} = ٠$

**28** (١) (ج) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ج) (٥) (ج)

إرشادات لحل رقم **28**

(١) $\because$ المعاملات أعداد حقيقية وأحد الجذرين ٢ ت

فإن الجذر الآخر هو −٢ ت

، مجموع الجذرين = ٢ ت − ٢ ت = صفر

، حاصل ضربهما $= ٢\text{ت} \times (-٢\text{ت}) = -٤ \times -١ = ٤$

، المميز < صفر

(٢) $\because$ ب ، جـ عددين حقيقيين

$\therefore$ إذا كان أحد الجذرين (٣ + ت) يكون الجذر الآخر (٣ − ت) وهذا كافى لإيجاد ب ، جـ

(٣) من الرسم جذرا المعادلة هما ٥ ، ٢

$\therefore$ مجموع الجذرين $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٧$

، حاصل ضربهما $\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = ١٠$

$\therefore \frac{\text{ب} + \text{ج}}{\text{أ}} = (-٧) + (١٠) = ٣$

(٤) حاصل ضرب جذرى المعادلة الأولى $\frac{\text{ج}}{\text{أ}}$

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثالثة $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

$\therefore$ حاصل ضربهم $= \frac{\text{ج}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = ١$

(٥) $\because \text{س}_{١} < ٠ < \text{س}_{٢}$

$\therefore \text{س}_{١}\text{س}_{٢} < ٠$ $\quad \therefore \frac{\text{ج}}{\text{أ}} < ٠$

، $\because |\text{س}_{١}| > |\text{س}_{٢}|$ $\quad \therefore \text{س}_{١} + \text{س}_{٢} < ٠$

$\therefore \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} < ٠$ $\quad \therefore \frac{\text{ج}}{\text{أ}} \cdot \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} > ٠$

$\therefore -\frac{\text{ب}\text{ج}}{\text{أ}^{٢}} > ٠$ $\quad \therefore -\text{ب}\text{ج} > ٠$

$\therefore \text{ب}\text{ج} < ٠$

**29**

$\because$ المميز $= (٢\text{أ} - ١)^{٢} - ١٢(\text{أ} - ٤)$

$= ٤\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} + ١ - ١٢\text{أ} + ٤٨$

$= ٤\text{أ}^{٢} - ١٦\text{أ} + ٤٩$

$= ٤(\text{أ}^{٢} - ٤\text{أ} + ٤) + ٣٣$

$= ٤(\text{أ} - ٢)^{٢} + ٣٣ > ٠$ مهما كانت قيمة أ

$\therefore$ للمعادلة جذران مختلفان ولكى يكون الجذران مختلفى الإشارة

يكون حاصل ضرب الجذرين < ٠

$\therefore \frac{\text{أ} - ٤}{٢} < ٠$ $\quad \therefore \text{أ} - ٤ < ٠$

$\therefore \text{أ} < ٤$ $\quad \therefore \text{أ} \in ]-\infty ، ٤[$





## إرشادات تمارين 4

**1** (١) (د) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (ج)

**2**

(١) $\because$ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = −٨

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

(٢) $\because$ مجموع الجذرين = ١٤ ، حاصل ضربهما = ٤٩

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ١٤\text{س} + ٤٩ = ٠$

(٣) $\because$ مجموع الجذرين = −٧ ، حاصل ضربهما = ٠

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} + ٧\text{س} = ٠$

(٤) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{١٣}{٦}$ ، حاصل ضربهما = ١

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{١٣}{٦}\text{س} + ١ = ٠$

أى $٦\text{س}^{٢} - ١٣\text{س} + ٦ = ٠$

(٥) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-٨}{٥}$ ، حاصل ضربهما $= \frac{-٣٣}{٢٥}$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{-٨}{٥}\text{س} + \frac{-٣٣}{٢٥} = ٠$

أى $٢٥\text{س}^{٢} + ٤٠\text{س} - ٣٣ = ٠$

(٦) $\because$ مجموع الجذرين $= ٢\sqrt{٣}$ ، حاصل ضربهما = −٣٠

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٢\sqrt{٣}\text{س} - ٣٠ = ٠$

(٧) $\because$ مجموع الجذرين = ١٤ ، حاصل ضربهما = ٢٩

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ١٤\text{س} + ٢٩ = ٠$

(٨) $\because$ مجموع الجذرين = ٠ ، حاصل ضربهما = ٢٥

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} + ٢٥ = ٠$

(٩) $\because$ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = ١٠

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١٠ = ٠$

(١٠) $\because$ مجموع الجذرين = ٦ ، حاصل ضربهما = ١٧

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١٧ = ٠$

(١١) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{٣}{\text{ت}} + \frac{٣ + ٣\text{ت}}{١ - \text{ت}}$

$= \frac{٣ - ٣\text{ت} + ٣\text{ت} - ٣}{١ + \text{ت}} = ٠$

، حاصل ضربهما $= \frac{٣}{\text{ت}} \times \frac{٣ + ٣\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٩ + ٩\text{ت}}{١ + \text{ت}} = ٩$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} + ٩ = ٠$

(١٢) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-٢ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} + \frac{-٢ - ٤\text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{-٢ + ٦\text{ت} - ٦\text{ت} + ٢}{٣ + \text{ت}} = ٠$

، حاصل ضربهما $= \frac{-٢ + ٢\text{ت}}{١ + \text{ت}} \times \frac{-٢ - ٤\text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{١٢ + ٤\text{ت}}{٣ + \text{ت}} = ٤$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} + ٤ = ٠$

(١٣) $\because$ مجموع الجذرين $= ٢\text{أ}$

، حاصل ضربهما $= \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{س} + \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = ٠$

(١٤) $\because$ مجموع الجذرين $= \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})}{\text{أ} - \text{ب}}$

$+ \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{٢} + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^{٢})}{\text{أ}^{٢} + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^{٢}}$

$= \text{أ} + \text{ب} + \text{أ} - \text{ب} = ٢\text{أ}$

، حاصل ضربهما $= (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب}) = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ٢\text{أ}\text{س} + \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = ٠$

**3**

$\boxed{\text{ل} + \text{م} = ٧}$ ، $\boxed{\text{ل}\text{م} = ٥}$

(١) $\text{ل}^{٢}\text{م} + \text{م}^{٢}\text{ل} = \text{ل}\text{م}(\text{ل} + \text{م}) = ٥ \times ٧ = ٣٥$

(٢) $\frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{\text{ل}} = \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}\text{م}} = \frac{٧}{٥}$

(٣) $(\text{ل} - ٢)(\text{م} - ٢) = \text{ل}\text{م} - ٢(\text{ل} + \text{م}) + ٤$

$= ٥ - ١٤ + ٤ = -٥$

(٤) $\left(\text{ل} + \frac{١}{\text{م}}\right)\left(\text{م} + \frac{١}{\text{ل}}\right) = \text{ل}\text{م} + ٢ + \frac{١}{\text{ل}\text{م}}$

$= ٥ + ٢ + \frac{١}{٥} = ٧\frac{١}{٥}$

**٤**

ل + م = ٤ ، ل م = ٢

(١) ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م = ٤$^{٢}$ − ٢ × ٢ = ١٢

(٢) ∵ (ل − م)$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٤ ل م

= ٤$^{٢}$ − ٤ × ٢ = ٨

∴ ل − م = ٢$\sqrt{٢}$ حيث ل > م

(٣) ل$^{٣}$ + م$^{٣}$ = (ل + م) [(ل + م)$^{٢}$ − ٣ ل م]

= ٤ (١٦ − ٦) = ٤٠

(٤) ∵ ل جذر للمعادلة : س$^{٢}$ − ٤ س + ٢ = ٠

∴ ل$^{٢}$ − ٤ ل + ٢ = ٠ ∴ ل$^{٢}$ − ٤ ل + ٧ = ٥

(٥) ∵ م جذر للمعادلة : س$^{٢}$ − ٤ س + ٢ = ٠

∴ م$^{٢}$ − ٤ م + ٢ = ٠ ∴ ٢ م$^{٢}$ − ٨ م + ٤ = ٠

∴ ٢ م$^{٢}$ − ٨ م + ١٥ = ١١

**٥**

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −٥

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل − ٤ ، و = م − ٤

∴ هـ + و = ل − ٤ + م − ٤ = (ل + م) − ٨

= ٣ − ٨ = −٥

، هـ و = (ل − ٤) (م − ٤) = ل م − ٤ (م + ل) + ١٦

= −٥ − ٤ (٣) + ١٦ = −١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ + ٥ س − ١ = ٠

**٦**

∵ ل + م = ٥ ، ل م = ٣

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٢ ل ، و = ٢ م

∴ هـ + و = ٢ ل + ٢ م = ٢ (ل + م) = ٢ × ٥ = ١٠

، هـ و = ٢ ل × ٢ م = ٤ ل م = ٤ × ٣ = ١٢

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ − ١٠ س + ١٢ = ٠

**٧**

∵ ل + م = $\frac{٥}{٢}$ ، ل م = $\frac{-٧}{٢}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ١ − ل ، و = ١ − م

∴ هـ + و = ١ − ل + ١ − م = ٢ − (ل + م)

= ٢ − $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

، هـ و = (١ − ل) (١ − م) = ١ − (ل + م) + ل م

= ١ − $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{-٧}{٢}$ = −٥

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ س − ٥ = ٠

أي ٢ س$^{٢}$ + س − ١٠ = ٠

**٨**

∵ ل + م = ٣ ، ل م = ١

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل + م ، و = ل م

∴ هـ + و = (ل + م) + ل م = ٣ + ١ = ٤

، هـ و = (ل + م) × ل م = ٣ × ١ = ٣

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ − ٤ س + ٣ = ٠

**٩**

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −٤

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = $\frac{١}{ل}$ ، و = $\frac{١}{م}$

∴ هـ + و = $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$ = $\frac{-٣}{٤}$

، هـ و = $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$ = $-\frac{١}{٤}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ + $\frac{٣}{٤}$ س − $\frac{١}{٤}$ = ٠

أي ٤ س$^{٢}$ + ٣ س − ١ = ٠





**١٠**

∵ ل + م = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = −٣

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = $\frac{ل}{٤}$ ، و = $\frac{م}{٤}$

∴ هـ + و = $\frac{ل}{٤}$ + $\frac{م}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ (ل + م) = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٨}$

، هـ و = $\frac{ل}{٤}$ × $\frac{م}{٤}$ = $\frac{ل م}{١٦}$ = $\frac{-٣}{١٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ − $\frac{٣}{٨}$ س − $\frac{٣}{١٦}$ = ٠

أي ١٦ س$^{٢}$ − ٦ س − ٣ = ٠

**١١**

∵ ل + م = $\frac{٥}{٢}$ ، ل م = $\frac{١}{٢}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٢ ل$^{٢}$ ، و = ٢ م$^{٢}$

∴ هـ + و = ٢ ل$^{٢}$ + ٢ م$^{٢}$ = ٢ [ل$^{٢}$ + م$^{٢}$]

= ٢ [(ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م]

= ٢ [$\frac{٢٥}{٤}$ − ١] = $\frac{٢١}{٢}$

، هـ و = ٢ ل$^{٢}$ × ٢ م$^{٢}$ = ٤ (ل م)$^{٢}$ = ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ − $\frac{٢١}{٢}$ س + ١ = ٠

أي ٢ س$^{٢}$ − ٢١ س + ٢ = ٠

**١٢**

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما : ل ، م

، جذري المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل + ١ ، و = م + ١ ∴ ل = هـ − ١ (١)

، ∵ ل أحد جذري المعادلة : س$^{٢}$ − ٧ س − ٩ = ٠

∴ ل$^{٢}$ − ٧ ل − ٩ = ٠

ومن (١) : ∴ (هـ − ١)$^{٢}$ − ٧ (هـ − ١) − ٩ = ٠

∴ هـ$^{٢}$ − ٢ هـ + ١ − ٧ هـ + ٧ − ٩ = ٠

∴ هـ$^{٢}$ − ٩ هـ − ١ = ٠

∴ هـ جذر للمعادلة : س$^{٢}$ − ٩ س − ١ = ٠

وهي المعادلة المطلوبة.

**١٣**

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما : ل ، م

، جذري المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = $\frac{١}{٢}$ ل ، و = $\frac{١}{٢}$ م ∴ ل = ٢ هـ (١)

، ∵ ل أحد جذري المعادلة : ٤ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٧ = ٠

∴ ٤ ل$^{٢}$ − ١٢ ل + ٧ = ٠

ومن (١) : ∴ ٤ (٢ هـ)$^{٢}$ − ١٢ (٢ هـ) + ٧ = ٠

∴ ١٦ هـ$^{٢}$ − ٢٤ هـ + ٧ = ٠

∴ هـ جذر للمعادلة : ١٦ س$^{٢}$ − ٢٤ س + ٧ = ٠

وهي المعادلة المطلوبة.

**١٤**

نفرض أن جذري المعادلة المعطاة هما : ل ، م

∴ ل + م = −٣ ، ل م = −٥

، نفرض أن جذري المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل$^{٢}$ ، و = م$^{٢}$

∴ هـ + و = ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = (ل + م)$^{٢}$ − ٢ ل م

= ٩ + ١٠ = ١٩

، هـ و = (ل م)$^{٢}$ = ٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ − ١٩ س + ٢٥ = ٠

**١٥**

ل + م = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{-١}{٢}$

ويفرض أن جذري المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = $\frac{ل}{م}$ ، و = $\frac{م}{ل}$

∴ هـ + و = $\frac{ل}{م}$ + $\frac{م}{ل}$ = $\frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م}$

= $\frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

= $\frac{(\frac{٣}{٢})^{٢} - ٢ \times \frac{-١}{٢}}{\frac{-١}{٢}}$ = $-\frac{١٣}{٢}$

، هـ و = $\frac{ل}{م}$ × $\frac{م}{ل}$ = ١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س$^{٢}$ + $\frac{١٣}{٢}$ س + ١ = ٠

أي ٢ س$^{٢}$ + ١٣ س + ٢ = ٠

**١٦**

∵ $ل + م = -٥$ ، $ل م = ٦$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ل - م$ ، $و = م - ل$

∴ $هـ + و = ل - م + م - ل =$ صفر

، $هـ و = (ل - م)(م - ل) = -(ل - م)^{٢}$

$= -\left[(ل + م)^{٢} - ٤ ل م\right] = -[٢٥ - ٢٤] = -١$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ١ = ٠$

**١٧**

∵ $ل + م = ٢$ ، $ل م = -٤$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = \frac{١}{ل^{٢}}$ ، $و = \frac{١}{م^{٢}}$

∴ $هـ + و = \frac{١}{ل^{٢}} + \frac{١}{م^{٢}} = \frac{م^{٢} + ل^{٢}}{(ل م)^{٢}}$

$= \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{(ل م)^{٢}} = \frac{٤ + ٨}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

، $هـ و = \frac{١}{ل^{٢}} \times \frac{١}{م^{٢}} = \frac{١}{(ل م)^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - \frac{٣}{٤} س + \frac{١}{١٦} = ٠$

أي $١٦ س^{٢} - ١٢ س + ١ = ٠$

**١٨**

∵ $ل + م = \frac{٥}{٣}$ ، $ل م = \frac{٢}{٣}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = \frac{ل^{٢}}{م}$ ، $و = \frac{م^{٢}}{ل}$

∴ $هـ + و = \frac{ل^{٢}}{م} + \frac{م^{٢}}{ل} = \frac{ل^{٣} + م^{٣}}{ل م}$

$= \frac{(ل + م)\left[(ل + م)^{٢} - ٣ ل م\right]}{ل م}$

$= \frac{\frac{٥}{٣}\left[\frac{٢٥}{٩} - ٢\right]}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٣٥}{١٨}$

، $هـ و = \frac{ل^{٢}}{م} \times \frac{م^{٢}}{ل} = ل م = \frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - \frac{٣٥}{١٨} س + \frac{٢}{٣} = ٠$

أي $١٨ س^{٢} - ٣٥ س + ١٢ = ٠$

**١٩**

∵ $ل + م = \frac{-١٢}{١٠} = \frac{-٦}{٥}$ ، $ل م = -\frac{١}{١٠}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ٢ ل + \frac{١}{م}$ ، $و = ٢ م + \frac{١}{ل}$

∴ $هـ + و = ٢ ل + \frac{١}{م} + ٢ م + \frac{١}{ل}$

$= ٢ (ل + م) + \frac{ل + م}{ل م} = ٢ \left(\frac{-٦}{٥}\right) + \frac{\frac{-٦}{٥}}{\frac{-١}{١٠}}$

$= \frac{-١٢}{٥} + ١٢ = \frac{٤٨}{٥}$

، $هـ و = \left(٢ ل + \frac{١}{م}\right)\left(٢ م + \frac{١}{ل}\right)$

$= ٤ ل م + ٤ + \frac{١}{ل م}$

$= ٤ \left(-\frac{١}{١٠}\right) + ٤ - ١٠ = \frac{-٣٢}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - \frac{٤٨}{٥} س - \frac{٣٢}{٥} = ٠$

أي $٥ س^{٢} - ٤٨ س - ٣٢ = ٠$

**٢٠**

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = -٥$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ل^{٢} م$ ، $و = م^{٢} ل$

∴ $هـ + و = ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م)$

$= -٥ \times ٣ = -١٥$

، $هـ و = ل^{٢} م \times م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (-٥)^{٣} = -١٢٥$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} + ١٥ س - ١٢٥ = ٠$

**٢١**

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = ٥$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ٦$ ، $و = ل^{٢} + م^{٢}$

∴ $هـ + و = ٦ + ل^{٢} + م^{٢} = ٦ + (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$= ٦ + ٩ - ٢ \times ٥ = ٥$





، $هـ و = ٦ (ل^{٢} + م^{٢}) = ٦ \left[(ل + م)^{٢} - ٢ ل م\right]$

$= ٦ (٩ - ١٠) = -٦$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ٥ س - ٦ = ٠$

**٢٢**

∵ $ل + م = ٣$ ، $ل م = -١$

، يفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ٣ ل - ٢ م$ ، $و = ٢ ل - ٣ م$

∴ $هـ + و = ٥ ل - ٥ م = ٥ (ل - م)$

، ∵ $(ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤ ل م = ٩ + ٤ = ١٣$

∴ $ل - م = \sqrt{١٣}$ (حيث $ل > م$)

∴ $هـ + و = ٥ (ل - م) = ٥ \sqrt{١٣}$

، $هـ و = (٣ ل - ٢ م)(٢ ل - ٣ م)$

$= ٦ ل^{٢} - ٩ ل م - ٤ ل م + ٦ م^{٢}$

$= ٦ (ل^{٢} + م^{٢}) - ١٣ ل م$

$= ٦ \left[(ل + م)^{٢} - ٢ ل م\right] - ١٣ ل م$

$= ٦ (ل + م)^{٢} - ٢٥ ل م$

$= ٦ \times ٩ + ٢٥ = ٧٩$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ٥ \sqrt{١٣} س + ٧٩ = ٠$

**٢٣**

∵ $ل + ٢ + م + ٢ = ١١$ ∴ $ل + م = ٧$

، ∵ $(ل + ٢)(م + ٢) = ٣$

∴ $ل م + ٢ (ل + م) + ٤ = ٣$

∴ $ل م + ٢ \times ٧ + ٤ = ٣$ ∴ $ل م = -١٥$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ٧ س - ١٥ = ٠$

**٢٤**

∵ ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $ل + ٣ + م + ٣ = ٥$ ∴ $\boxed{ل + م = -١}$

، ∵ $(ل + ٣)(م + ٣) = ١١$

∴ $ل م + ٣ (ل + م) = ٢$

∴ $ل م + ٣ (-١) = ٢$ ∴ $\boxed{ل م = ٥}$

ويفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $هـ = ل^{٢} م$ ، $و = م^{٢} ل$

∴ $هـ + و = ل^{٢} م + م^{٢} ل$

$= ل م (ل + م) = ٥ (-١) = -٥$

، $هـ و = ل^{٢} م \times م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} + ٥ س + ١٢٥ = ٠$

**٢٥**

∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ٣$ ∴ $\frac{ل + م}{ل م} = ٣$

∴ $ل + م = ٣ ل م$ (١)

، $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = ١$ ∴ $\frac{١}{ل م} = ١$ ∴ $\boxed{ل م = ١}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\boxed{ل + م = ٣}$

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ $هـ = ل م - ٧ = ١ - ٧ = -٦$

، $و = ل + م + ٣ = ٣ + ٣ = ٦$

∴ $هـ + و =$ صفر ، $هـ و = -٣٦$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ٣٦ = ٠$

**٢٦**

∵ $ل + م = ٢$ ، $ل م = -٥$

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ $هـ = ل^{٢} + م$ ، $و = م^{٢} + ل$

∴ $هـ + و = ل^{٢} + م^{٢} + م + ل$

$= (ل + م)^{٢} - ٢ ل م + (م + ل)$

$= ٤ + ١٠ + ٢ = ١٦$

، $هـ و = (ل^{٢} + م)(م^{٢} + ل)$

$= (ل م)^{٢} + ل^{٣} + م^{٣} + ل م$

$= ٢٥ - ٥ + (ل + م)\left[(ل + م)^{٢} - ٣ ل م\right]$

$= ٢٠ + ٢ \left[(٢)^{٢} - ٣ \times -٥\right] = ٥٨$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^{٢} - ١٦ س + ٥٨ = ٠$

**٢٧**

$\because \frac{٣}{ل}+\frac{٣}{م}=١٢$ $\therefore \frac{٣ل+٣م}{ل م}=١٢$

$\therefore$ م + ل = ٤ ل م (١)

، $\frac{٣}{ل}\times\frac{٣}{م}=٩$ $\therefore$ ل م = ١ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore$ م + ل = ٤

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

$\therefore$ هـ $=\frac{١}{ل^٢}$ ، و $=\frac{١}{م^٢}$

$\therefore$ هـ + و $=\frac{١}{ل^٢}+\frac{١}{م^٢}=\frac{ل^٢+م^٢}{ل^٢م^٢}$

$=\frac{(ل+م)[(ل+م)^٢-٢ل م]}{(ل م)^٢}$

$=\frac{٤[(٤)^٢-٢\times١]}{(١)^٢}=٥٢$

، هـ و $=\frac{١}{ل^٢}\times\frac{١}{م^٢}=\frac{١}{(ل م)^٢}=١$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢-٥٢س+١=٠$

**٢٨**

بفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

$\therefore$ ل + م $=\frac{٧}{٦}$ (١)

، ل م $=\frac{١-حـ}{٦}$ (٢)

، ل − م $=\frac{١١}{٦}$ (٣)

وبجمع (١) ، (٣) : $\therefore$ ٢ ل $=\frac{١٨}{٦}$ $\therefore$ ل $=\frac{٣}{٢}$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ م $=\frac{٧}{٦}-\frac{٩}{٦}=-\frac{١}{٣}$

$\therefore$ ل م $=-\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore -\frac{١}{٢}=\frac{١-حـ}{٦}$ $\therefore$ حـ = ٤

**٢٩**

نفرض أن جذرى المعادلة الأولى هما : ل ، م

$\therefore$ ل − م $=\pm\frac{\sqrt{(-٢)^٢-٤\times٣\times حـ}}{٣}$

$=\pm\frac{\sqrt{٤-١٢حـ}}{٣}$

ونفرض أن جذرى المعادلة الثانية هما : هـ ، و

$\therefore$ هـ − و $=\pm\frac{\sqrt{(-حـ)^٢-٤\times٢\times٣}}{٢}$

$=\pm\frac{\sqrt{حـ^٢-٢٤}}{٢}$

، $\because$ ل − م = هـ − و

$\therefore \frac{\sqrt{٤-١٢حـ}}{٣}=\frac{\sqrt{حـ^٢-٢٤}}{٢}$ وبالتربيع

$\therefore \frac{٤-١٢حـ}{٩}=\frac{حـ^٢-٢٤}{٤}$

$\therefore ٩حـ^٢-٢١٦-١٦+٤٨حـ=٠$

$\therefore ٩حـ^٢+٤٨حـ-٢٣٢=٠$

**٣٠**

نفرض أن جذرى المعادلة الأولى هما : ل ، م

$\therefore$ ل − م $=\pm\sqrt{ك^٢-٨ك}$

ونفرض أن جذرى المعادلة الثانية هما : هـ ، و

$\therefore$ هـ و = ك

، $\because$ ل − م = ٢ هـ و

$\therefore \pm\sqrt{ك^٢-٨ك}=٢ك$ وبالتربيع .

$\therefore ك^٢-٨ك=٤ك^٢$ $\therefore ٣ك^٢+٨ك=٠$

$\therefore ك(٣ك+٨)=٠$ $\therefore$ ك = ٠ أ، ك $=\frac{-٨}{٣}$

**٣١**

$\because$ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

$\therefore$ ل + م $=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}$ ، ل م $=\frac{أ}{٤}$

، $\because ل^٢+م^٢=٧$ ل م

$\therefore ل^٢+م^٢+٢$ ل م = ٩ ل م

$\therefore (ل+م)^٢=٩$ ل م $\therefore \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢=٩\times\frac{أ}{٤}$

$\therefore$ أ = ١





**٣٢**

$\because$ ل + م = ٨ ، ل م = حـ

، $\because ل^٢+م^٢=٤٠$ $\therefore (ل+م)^٢-٢$ ل م = ٤٠

$\therefore$ ٦٤ − ٢ حـ = ٤٠ $\therefore$ حـ = ١٢

$\therefore$ ل + م = ٨ ، ل م = ١٢

ويفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

$\therefore$ هـ $=ل^٢م+م^٢ل$ = ل م (ل + م) ، و = ل م

$\therefore$ هـ + و = ل م (ل + م) + ل م = ١٢ × ٨ + ١٢ = ١٠٨

، هـ و = ل م (ل + م) × ل م = ١٢ × ٨ × ١٢ = ١١٥٢

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢-١٠٨س+١١٥٢=٠$

**٣٣**

$\because س^٢-٤س-٥=٠$

$\therefore (س-٥)(س+١)=٠$

$\therefore$ س = ٥ أ، س = −١

، $\because$ ل > م $\therefore$ ل = ٥ ، م = −١

$\therefore$ جذرا المعادلة المطلوبة هما : −٢ ، ٣

$\therefore$ المعادلة هى : $(س+٢)(س-٣)=٠$

أى : $س^٢-س-٦=٠$

**٣٤** حل يوسف هو الصحيح لأنه استخدم جذرى المعادلة الأولى لإيجاد جذرى المعادلة الثانية ومنها أوجد المعادلة المجهولة.

**٣٥** (١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (جـ)
(٦) (د) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (جـ)

**إرشادات لحل رقم ٣٥**

(١) نفرض أن جذرى المعادلة (بعدى المستطيل) هما ل ، م

$\therefore$ ل م = ١٥

، ٢ (ل + م) = ٢٦ $\therefore$ ل + م = ١٣

$\therefore$ المعادلة التربيعية هى $س^٢-١٣س+١٥=٠$

(٢) $\because أ^٢+٢أ+١=٠$ ، $ب^٢+٢ب+١=٠$

$\therefore$ أ ، ب هما جذرا المعادلة $س^٢+٢س+١=٠$

$\therefore$ أ + ب = −٣ ، أ ب = ١

$\therefore \frac{أ}{ب}+\frac{ب}{أ}=\frac{أ^٢+ب^٢}{أب}=\frac{(أ+ب)^٢-٢أب}{أب}$

$=\frac{(-٣)^٢-٢(١)}{(١)}=٧$

(٣) $\because (س-أ)(س-ب)=ك$

$\therefore س^٢-(أ+ب)س+أب-ك=٠$

$\therefore$ ل + م = أ + ب ، ل م = أ ب − ك

ومنها أ ب = ل م + ك

$\therefore$ المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى

$س^٢-(ل+م)س+ل م+ك=٠$

$\therefore (س-ل)(س-م)+ك=٠$

(٤) $\because (ل+م+٤)^٢+(ل م-٣)^٢=$ صفر

$\therefore$ ل + م + ٤ = ٠ ومنها ل + م = −٤

، ل م − ٣ = ٠ ومنها ل م = ٣

$\therefore$ لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م

مجموع الجذرين ٤ ل + ٤ م = ٤ (ل + م)

= ٤ × −٤ = −١٦

، حاصل ضربهما ٤ ل × ٤ م = ١٦ ل م

= ١٦ × ٣ = ٤٨

$\therefore$ الشرط الكافى لتكوين المعادلة هو (ب)

(٥) $\because$ عمر أخطأ فى الحد المطلق وكان جذرا المعادلة هما ٣ ، ٤

$\therefore$ مجموع الجذرين هو ٧

، $\because$ خالد أخطأ فى معامل س وكان جذرا المعادلة هما ٢ ، ٣

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين هو ٦

$\therefore$ المعادلة التربيعية هى : $س^٢-٧س+٦=٠$

وجذراها هما ٦ ، ١

(٦) نفرض أن جذري المعادلة هما ل ، ل + ٢

∴ مجموع الجذرين (−ب) = (٢ ل + ٢)

، حاصل ضربهما حـ = ل$^2$ + ٢ ل

∴ ب$^2$ − ٤ حـ = (٢ ل + ٢)$^2$ − ٤ (ل$^2$ + ٢ ل)

= ٤ ل$^2$ + ٨ ل + ٤ − ٤ ل$^2$ − ٨ ل = ٤

(٧) ∵ حاصل ضرب الجذران = حـ وهو عدد أولي

∴ الجذران هما ١ ، حـ

، ∵ حاصل جمعهما = ب (حيث ب عدد أولي)

∴ ب = ١ + حـ

∴ ب ، حـ عددان أوليان متتاليان

∴ ب = ٣ ، حـ = ٢

∴ ب − حـ = ١ (عدد فردي)

، ب$^2$ − حـ = ٩ − ٢ = ٧ (عدد أولي)

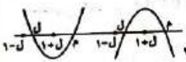
، ب + حـ = ٣ + ٢ = ٥ (عدد أولي)

∴ الإجابة هي (د)

(٨) ∵ ل أحد جذري المعادلة

∴ د(ل) = ٠

، ∵ |ل − م| > ١




∴ د(ل + ١) ، د(ل − ١) في جميع الحالات مختلفة الإشارة

∴ د(ل + ١) × د(ل − ١) < صفر

(٩) ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

∴ ل + م = ظا θ ، ل م = −١

∴ (ل + م)$^2$ = (ظا θ)$^2$

∴ ل$^2$ + م$^2$ + ٢ ل م = ظا$^2$ θ

، ∵ ل$^2$ + م$^2$ = ٢

∴ ٢ + ٢(−١) = ظا$^2$ θ

∴ ظا$^2$ θ = ١      ∴ ظا θ = ±١

، ∵ ٠ < θ < ٩٠°      ∴ ظا θ = ١

∴ θ = $\frac{\pi}{4}$

**٣٦**

ل + م = $\frac{-٢ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{حـ}{أ}$

(١) ∵ ل − م = ٢      ∴ (ل − م)$^2$ = ٤

∴ (ل + م)$^2$ − ٤ ل م = ٤

∴ $\frac{٤ ب^2}{أ^2}$ − $\frac{٤ حـ}{أ}$ = ٤

∴ ب$^2$ = أ$^2$ + أ حـ = أ (أ + حـ)

(٢) ∵ ل + م = $\frac{-٢ب}{أ}$ ، ل − م = ٢

وبالجمع ∴ ٢ ل = $\frac{-٢ب}{أ}$ + ٢

∴ ل = ١ − $\frac{ب}{أ}$

**٣٧**

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{حـ}{أ}$

، ∵ ل − م = ٢ ($\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$) وبالتربيع

∴ (ل − م)$^2$ = ٤ ($\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$)$^2$

∴ (ل + م)$^2$ − ٤ ل م = $\frac{٤ (م + ل)^2}{(ل م)^2}$

∴ ($\frac{-ب}{أ}$)$^2$ − ٤ × $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{٤ × (\frac{-ب}{أ})^2}{(\frac{حـ}{أ})^2}$

∴ ($\frac{-ب}{أ}$)$^2$ − ٤ × $\frac{حـ}{أ}$ = ٤ ($\frac{ب}{حـ}$)$^2$

وبالضرب × أ$^2$ حـ$^2$

∴ ب$^2$ حـ$^2$ − ٤ أ حـ$^3$ = ٤ أ$^2$ ب$^2$

∴ حـ$^2$ (ب$^2$ − ٤ أ حـ) = ٤ أ$^2$ ب$^2$





## إرشادات تمارين 5

**١**

(١) الدالة د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

(٢) الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٣) ∵ د(س) = ٢ س

• د(س) = ٠ عندما س = ٠

• وتكون إشارة د موجبة إذا كان ٢ س > ٠ أي س > ٠

• وتكون إشارة د سالبة إذا كان ٢ س < ٠ أي س < ٠

(٤) ∵ د(س) = −٣ س

• د(س) = ٠ عندما س = ٠

• وتكون إشارة د سالبة إذا كان س > ٠

• وتكون إشارة د موجبة إذا كان س < ٠

(٥) ∵ د(س) = ٥ س − ٧

∴ د(س) = ٥ (س − $\frac{٧}{٥}$)

• د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٧}{٥}$

• وتكون إشارة د موجبة عندما س − $\frac{٧}{٥}$ > ٠ أي س > $\frac{٧}{٥}$

• وتكون إشارة د سالبة عندما س − $\frac{٧}{٥}$ < ٠ أي س < $\frac{٧}{٥}$

(٦) ∵ د(س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

∴ د(س) = −$\frac{١}{٢}$ س + ٣ = −$\frac{١}{٢}$ (س − ٦)

• د(س) = ٠ عندما س = ٦

• وتكون إشارة د سالبة إذا كان س − ٦ > ٠ أي س > ٦

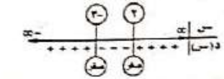
• وتكون إشارة د موجبة إذا كان س − ٦ < ٠ أي س < ٦

**٢**

(١) ∵ د(س) = (س − ٢) (س + ٣)

∴ جذرا المعادلة : د(س) = ٠

هما : س = ٢ ، س = −٣




• د تكون موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٢]

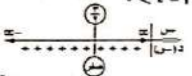
• د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٢}

• د تكون سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٢[

(٢) ∵ د(س) = (٢ س − ٣)$^2$ ∴ د(س) = ٠

أي (٢ س − ٣)$^2$ = ٠      ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠



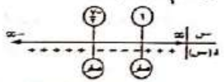

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {$\frac{٣}{٢}$}

(٣) ∵ د(س) = ٢ س$^2$ + ٥ س − ٧

• نوجد جذري المعادلة : ٢ س$^2$ + ٥ س − ٧ = ٠

∴ (٢ س + ٧) (س − ١) = ٠

∴ س = −$\frac{٧}{٢}$ أ، س = ١




• تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ٢ > ٠)

أي موجبة عندما س ∈ ح − [−$\frac{٧}{٢}$ ، ١]

• د(س) = ٠ عندما س ∈ {−$\frac{٧}{٢}$ ، ١}

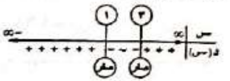
• تكون إشارة د سالبة عندما س ∈ ]−$\frac{٧}{٢}$ ، ١[

(٤) ∵ د(س) = س$^2$ − ٤ س + ٣

• نوجد جذري المعادلة : س$^2$ − ٤ س + ٣ = ٠

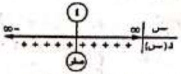
∴ (س − ١) (س − ٣) = ٠

∴ س = ١ أ، س = ٣



- تكون إشارة د مثل إشارة أ (حيث أ = ١ > ٠)
 أي موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}
- تكون إشارة د سالبة عندما س ∈ ]١ ، ٣[

(٥) ∵ د (س) = س² − ٨ س + ١٦
- توجد جذري المعادلة : س² − ٨ س + ١٦ = ٠
∴ (س − ٤)² = ٠ ∴ س = ٤



- تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ١ > ٠)
 أي موجبة عندما س ∈ ح − {٤}
- د (س) = ٠ عندما س = ٤

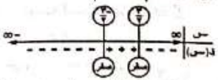
(٦) ∵ د (س) = ٢ س² − ٣ س + ٥
∴ المميز = ب² − ٤ أ حـ = (−٣)² − ٤ × ٢ × ٥
= ٩ − ٤٠ = −٣١ < ٠
∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة
أي ليس للمعادلة جذور حقيقية
، ∵ أ (معامل س²) = ٢ > ٠
∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح



(٧) ∵ د (س) = −س² + ٤ س − ٧
∴ المميز = −١٢ < ٠
∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة
أي ليس للمعادلة جذور حقيقية
، ∵ أ (معامل س²) = −١ < ٠
∴ د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

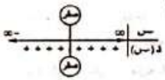


(٨) ∵ د (س) = ٩ − ٤ س²
∴ د (س) = ٠ عندما ٤ س² − ٩ = ٠
أي (٢ س − ٣) (٢ س + ٣) = ٠
أي س = $\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$



- تكون د لها إشارة أ (حيث أ = −٤ < ٠) أي سالبة عندما س ∈ ح − [$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}
- د تكون موجبة عندما س ∈ ]$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$[

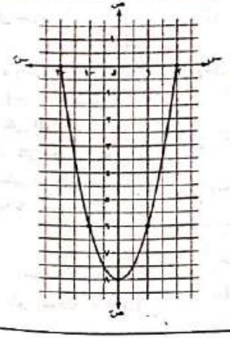
(٩) ∵ د (س) = ٢ س²
∴ د (س) = ٠
عندما س = ٠



، ∵ أ (معامل س²) = ٢ > ٠
∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {٠}

**٣** د (س) = ٢ س² − ٨

| س | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٠ | −٦ | −٨ | −٦ | ٠ |



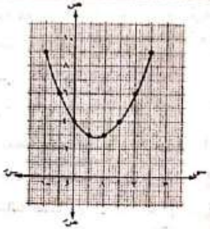




ومن الرسم نجد أن :
- د سالبة عندما س ∈ ]−٢ ، ٢[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ٢}
- د موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٢]

**٤** د (س) = ٢ س² − ٣ س + ٤

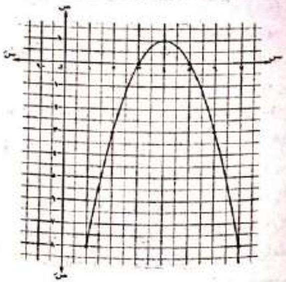
| س | −١ | $-\frac{١}{٢}$ | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | ١ | $١\frac{١}{٢}$ | ٢ | $٢\frac{١}{٢}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٩ | ٦ | ٤ | ٣ | ٣ | ٤ | ٦ | ٩ |



ومن الرسم نجد أن : د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

**٥** د (س) = −س² + ٨ س − ١٥

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | −٨ | −٣ | ٠ | ١ | ٠ | −٣ | −٨ |

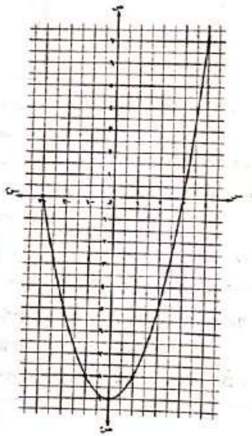


ومن الرسم نجد أن :
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣ ، ٥}
- د سالبة عندما س ∈ ح − [٣ ، ٥]
- د موجبة عندما س ∈ ]٣ ، ٥[

∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هي {٣ ، ٥}

**٦** د (س) = س² − ٩

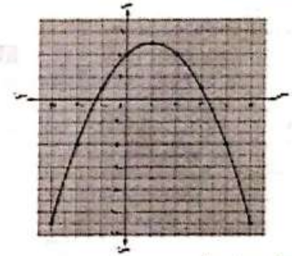
| س | −٣ | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٠ | −٥ | −٨ | −٩ | −٨ | −٥ | ٠ | ٧ |



ومن الرسم نجد أن :
- د سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}
- د موجبة عندما س ∈ ]٣ ، ٤]

**٧** د (س) = − $س^{٢}$ + ٢ س + ٤

| س | −٣ | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | −١١ | −٤ | ١ | ٤ | ٥ | ٤ | ١ | −٤ | −١١ |



ومن الرسم نجد أن :
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١,٢ ، ٣,٢}
- د موجبة عندما س ∈ ]−١,٢ ، ٣,٢[
- د سالبة عندما س ∈ [−٣ ، −١,٢[ ∪ ]٣,٢ ، ٥]

لاحظ أن : −١,٢ ، ٣,٢ هي قيم تقريبية لجذري المعادلة المرتبطة بالدالة.

**٨** (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (جـ)
(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (د) (١٤) (ب) (١٥) (جـ)
(١٦) أولًا : (د) ثانيًا : (جـ)
(١٧) أولًا : (د) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (أ)

**٩**

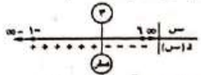
(١) ∵ د (س) = ٣ − س
- د (س) = ٠ عندما س = ٣
- وتكون إشارة د موجبة عندما ٣ − س > ٠

أي : س < ٣

∴ د موجبة في الفترة [−١ ، ٣[
- وتكون إشارة د سالبة عندما ٣ − س < ٠

أي س > ٣

∴ د سالبة في الفترة ]٣ ، ٦]

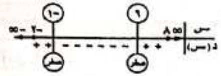


(٢) ∵ د (س) = $س^{٢}$ − ٥ س − ٦
- نوجد جذري المعادلة : $س^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

∴ س = −١ أ، س = ٦
- ∵ أ = ١ > ٠

أي د موجبة عندما س ∈ [−٢ ، ٨] − [−١ ، ٦]
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٦}
- د سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ٦[



**١٠**

(١) ∵ د (س) = س + ١ عندما س ≥ −١

∴ عندما س = −١ فإن د (س) = ٠
- وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ١ > ٠ أي س > −١
- ∵ د (س) = − س − ١ عندما س < −١

∴ د (س) = − (س + ١)

أي الدالة د تكون موجبة إذا كان

س + ١ < ٠ أي س < −١

∴ د (س) موجبة في ح − {−١}

، د (س) = ٠ عندما س = −١





(٢) ∵ د (س) = ٣ س + ٦ عندما س ≥ −٢

∴ د (س) = ٣ (س + ٢)

∴ عندما س = −٢ فإن د (س) = ٠
- وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ٢ > ٠ أي س > −٢
- ∵ د (س) = −٣ س − ٦ عندما س < −٢

∴ د (س) = −٣ (س + ٢)

وتكون الدالة موجبة إذا كان

س + ٢ < ٠ أي س < −٢

∴ د (س) موجبة في ح − {−٢}
- د (س) = ٠ عندما س = −٢

**١١**

(١) من الرسم نجد أن :
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}
- د سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]
- د موجبة عندما س ∈ ]−١ ، ٥[

(٢) من الرسم نجد أن :
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}
- د موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]
- د سالبة عندما س ∈ ]١ ، ٣[

**١٢**

د (س) = س − ٣
- د (س) = ٠ عندما س = ٣
- د موجبة عندما س > ٣
- د سالبة عندما س < ٣

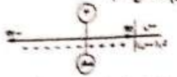
، ر (س) = $س^{٢}$ − ٥ س − ٦

= (س − ٦) (س + ١)

س = ٦ أ، س = −١
- ر (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٦}
- ر موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٦]
- ر سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ٦[

الدالتان موجبتان معًا عندما س > ٦

**١٣**
- $د_{١}$ (س) = س − ٣



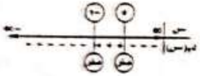
- $د_{١}$ (س) = صفر عندما س = ٣
- $د_{١}$ موجبة عندما س > ٣
- $د_{١}$ سالبة عندما س < ٣
- $د_{٢}$ (س) = ٥ + ٤ س − $س^{٢}$

نوجد جذري المعادلة : − $س^{٢}$ + ٤ س + ٥ = ٠

∴ $س^{٢}$ − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ جذرا المعادلة هما ٥ ، −١



- $د_{٢}$ (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}
- $د_{٢}$ سالبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]
- $د_{٢}$ موجبة عندما س ∈ ]−١ ، ٥[

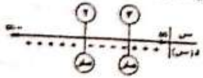
$د_{١}$ ، $د_{٢}$ سالبتان معًا عندما س ∈ ]−∞ ، −١[

**١٤**
- د (س) = $س^{٢}$ − ٥ س + ٦

نوجد جذري المعادلة : $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣



- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

• د موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]

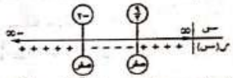
• د سالبة عندما س ∈ ]٢ ، ٣[

• ر (س) = ٢ س$^{٢}$ − ٥ س − ١٨

نوجد جذرى المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ٥ س − ١٨ = ٠

∴ (٢ س − ٩) (س + ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٩}{٢}$ أ، س = −٢




• ر (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، $\frac{٩}{٢}$}

• ر موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• ر سالبة عندما س ∈ ]−٢ ، $\frac{٩}{٢}$[

∴ • الدالتان موجبتان معًا عندما

س ∈ ]$\frac{٩}{٢}$ ، ∞[ ∪ ]−∞ ، −٢[

أى س ∈ ح − [−٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• الدالتان سالبتان معًا عندما س ∈ ]٢ ، ٣[

**١٥**

∵ ٢ س$^{٢}$ − ك س + ك − ٣ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = −ك ، جـ = ك − ٣

∴ المميز = (−ك)$^{٢}$ − ٤ × ٢ × (ك − ٣)

= ك$^{٢}$ − ٨ ك + ٢٤

∴ نبحث إشارة د : د (ك) = ك$^{٢}$ − ٨ ك + ٢٤

، ∵ المميز = (−٨)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ٢٤ = −٣٢ < ٠

∴ المعادلة : ك$^{٢}$ − ٨ ك + ٢٤ = ٠

ليس لها جذور حقيقية

، ∵ معامل ك$^{٢}$ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ح

∴ مميز المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ك س + ك − ٣ = ٠

موجب لجميع قيم س ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : ٢ س$^{٢}$ − ك س + ك − ٣ = ٠

حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ح

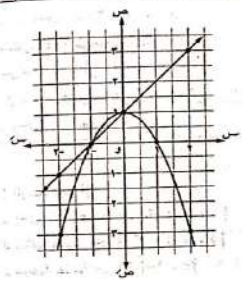
**١٦**

إجابة أميرة هى الصحيحة :

د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ − س$^{٢}$

| س | −٢ | ٠ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د (س) | −١ | ١ | ٣ |

| س | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ر (س) | −٣ | ٠ | ١ | ٠ | −٢ |



من الرسم نجد أن :

الدالتان تكونان موجبتين فى الفترة ]−١ ، ١[

**١٧**

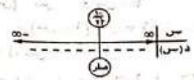
(١) د (س) = −٢ س$^{٢}$ − ٢ $\sqrt{٢}$ س − ١

• نوجد جذرى المعادلة :

−٢ س$^{٢}$ − ٢ $\sqrt{٢}$ س − ١ = ٠

∴ ٢ س$^{٢}$ + ٢ $\sqrt{٢}$ س + ١ = ٠

∴ $(\sqrt{٢}$ س + ١$)^{٢}$ = ٠ ∴ س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$




• د (س) = ٠ عندما س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

• د سالبة عندما س ∈ ح − {$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$}





(٢) د (س) = س + (س + ١) (٢ س + ٣)

− ٤ (س + ١) + ١

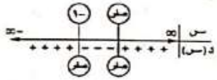
= س + ٢ س$^{٢}$ + ٥ س + ٣ − ٤ س

− ٤ + ١ = ٢ س$^{٢}$ + ٢ س

= ٢ س (س + ١)

∴ جذرا المعادلة : د (س) = ٠

هما س = ٠ ، س = −١




• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٠}

• د موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٠]

• د سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ٠[

**١٨**

(١) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٢]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٢}

• د سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٢[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س − ٢) (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، −٦)

∴ −٦ = أ × −٢ × ٣ ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س − ٢) (س + ٣) = س$^{٢}$ + س − ٦

(٢) من الرسم نجد أن :

• د سالبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٠]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٠}

• د موجبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٠[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ س (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (−١ ، ٢)

∴ ٢ = −أ (−١ + ٣) ∴ أ = −١

∴ د (س) = − س (س + ٣) = − س$^{٢}$ − ٣ س

(٣) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٤]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٤}

• د سالبة عندما س ∈ ]١ ، ٤[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س − ١) (س − ٤)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٣ ، −٤)

∴ −٤ = أ (٣ − ١) (٣ − ٤)

∴ −٤ = أ × ٢ × −٢ ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س − ١) (س − ٤)

= س$^{٢}$ − ٦ س + ٤

## إرشادات تمارين 6

**١**

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

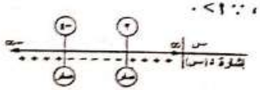
د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ٨

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٤ ، ٢]

(٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

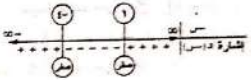
د (س) = س$^{٢}$ + ٣ س − ٤

، بوضع س$^{٢}$ + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ١

، ∵ أ > ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ١]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − ]−٤ ، ١[

(٣) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

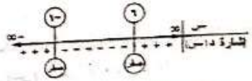
د(س) = س$^{٢}$ − ٥ س − ٦

، بوضع س$^{٢}$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

∴ س = −١ أو س = ٦

، ∵ أ > ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ٦[

∴ مجموعة حل المتباينة = ]−١ ، ٦[

(٤) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

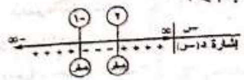
د(س) = س$^{٢}$ − س − ٢

، بوضع س$^{٢}$ − س − ٢ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٢) = ٠

∴ س = −١ أو س = ٢

، ∵ أ > ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ٢[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−١ ، ٢]

(٥) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٤ − ٣ س − س$^{٢}$

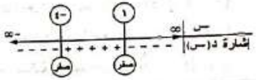
، بوضع ٤ − ٣ س − س$^{٢}$ = ٠

∴ س$^{٢}$ + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ١

، ∵ أ < ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ]−٤ ، ١[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٤ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٤ ، ١]

(٦) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٥ س − س$^{٢}$ − ٦

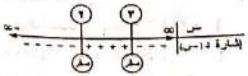
، بوضع ٥ س − س$^{٢}$ − ٦ = ٠

∴ س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٣

، ∵ أ < ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٢ ، ٣]





(٧) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

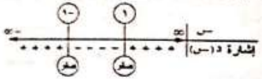
د(س) = س$^{٢}$ − ١

، بوضع س$^{٢}$ − ١ = ٠

∴ (س + ١) (س − ١) = ٠

∴ س = −١ أو س = ١

، ∵ أ > ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ]−١ ، ١[

، د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−١ ، ١]

(٨) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

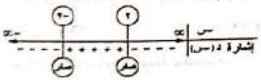
د(س) = ٤ − س$^{٢}$

، بوضع ٤ − س$^{٢}$ = ٠

∴ (٢ + س) (٢ − س) = ٠

∴ س = −٢ أو س = ٢

، ∵ أ < ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٢ ، ٢]

(٩) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د(س) = ٧ + س$^{٢}$ − ٤ س

، بوضع س$^{٢}$ − ٤ س + ٧ = ٠

، ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ

= (−٤)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ٧ = −١٢ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٠) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة

د(س) = ٢ س + س$^{٢}$ + ٤

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س + ٤ = ٠

، ∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ

= (٢)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ٤ = −١٢ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية ، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

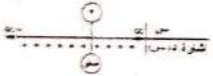
(١١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة

د(س) = س$^{٢}$ − ٤ س + ٤

، بوضع س$^{٢}$ − ٤ س + ٤ = ٠

∴ (س − ٢)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ أ > ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د(س) = ٠ عندما س = ٢

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(١٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة

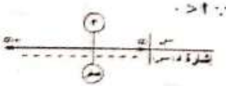
د(س) = ٦ س − س$^{٢}$ − ٩

، بوضع ٦ س − س$^{٢}$ − ٩ = ٠

∴ س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ < ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − {٣}

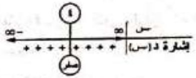
(١٣) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ − ٨ س + ١٦

، بوضع س$^{٢}$ − ٨ س + ١٦ = ٠

∴ (س − ٤)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٤

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٤) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

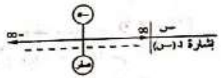
د (س) = − س$^{٢}$ − ١٠ س − ٢٥

، بوضع − س$^{٢}$ − ١٠ س − ٢٥ = ٠

∴ س$^{٢}$ + ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س + ٥)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = −٥

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {−٥}

، د (س) = ٠ عندما س = −٥

∴ مجموعة حل المتباينة = {−٥}

(١٥) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

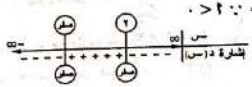
د (س) = ٢ س − س$^{٢}$

، بوضع ٢ س − س$^{٢}$ = ٠

∴ س (٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ ، أ س = ٢

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [٠ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٠ ، ٢]

**٢**

(١) ∵ س$^{٢}$ ≤ ٩ ∴ س$^{٢}$ − ٩ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

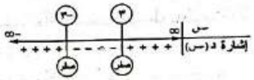
∴ د (س) = س$^{٢}$ − ٩

، بوضع س$^{٢}$ − ٩ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٣ ، أ س = ٣

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ٣[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ٣]

(٢) ∵ س$^{٢}$ > ١٦ ∴ س$^{٢}$ − ١٦ > ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

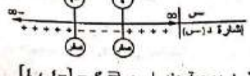
∴ د (س) = س$^{٢}$ − ١٦

، بوضع س$^{٢}$ − ١٦ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٤ ، أ س = ٤

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٤]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٤ ، ٤]





(٣) ∵ س$^{٢}$ + ٥ س < −٤

∴ س$^{٢}$ + ٥ س + ٤ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

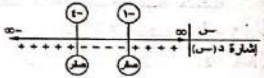
د (س) = س$^{٢}$ + ٥ س + ٤

، بوضع س$^{٢}$ + ٥ س + ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = −٤ ، أ س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٤ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة = ]−٤ ، −١[

(٤) ∵ ٥ س$^{٢}$ + ١٢ س ≥ ٤٤

∴ ٥ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

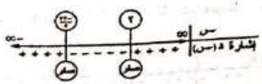
د (س) = ٥ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤

، بوضع ٥ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٤٤ = ٠

∴ (٥ س + ٢٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = $\frac{-٢٢}{٥}$ ، أ س = ٢

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [$\frac{-٢٢}{٥}$ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-٢٢}{٥}$ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − ]$-\frac{٢٢}{٥}$ ، ٢[

(٥) ∵ ٣ س$^{٢}$ ≤ ١١ س + ٤

∴ ٣ س$^{٢}$ − ١١ س − ٤ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

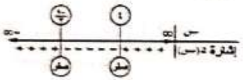
د (س) = ٣ س$^{٢}$ − ١١ س − ٤

، بوضع ٣ س$^{٢}$ − ١١ س − ٤ = ٠

∴ (٣ س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = $\frac{-١}{٣}$ ، أ س = ٤

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]$\frac{-١}{٣}$ ، ٤[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-١}{٣}$ ، ٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = [$\frac{-١}{٣}$ ، ٤]

(٦) ∵ س$^{٢}$ ≥ ٦ س − ٩

∴ س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ ≥ ٠

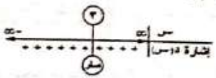
نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ − ٦ س + ٩

، بوضع س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٧) ∵ ٣ − ٢ س ≥ س$^{٢}$

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ٣ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

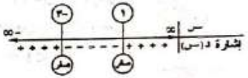
د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ٣

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(٨) ∵ ٧ س + ١٥ ≤ ٢ س$^{٢}$

∴ ٢ س$^{٢}$ − ٧ س − ١٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

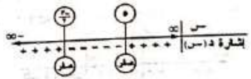
د (س) = ٢ س$^{٢}$ − ٧ س − ١٥

، بوضع ٢ س$^{٢}$ − ٧ س − ١٥ = ٠

∴ (٢ س + ٣) (س − ٥) = ٠

∴ س = $\frac{-٣}{٢}$ أ، س = ٥

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − ]$\frac{-٣}{٢}$ ، ٥[

(٩) ∵ س$^{٢}$ + ٥ ≥ ١ ∴ س$^{٢}$ + ٤ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ + ٤

، بوضع س$^{٢}$ + ٤ = ٠

∴ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٠ − ٤ × ١ × ٤

= −١٦ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٠) ∵ − س$^{٢}$ − ٧ < ٢

∴ − س$^{٢}$ − ٩ < ٠ ∴ س$^{٢}$ + ٩ > ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ + ٩ ، بوضع س$^{٢}$ + ٩ = ٠

∴ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٠ − ٤ × ١ × ٩

= −٣٦ < ٠

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(١١) ∵ (س − ٢)$^{٢}$ ≥ ٩

∴ س$^{٢}$ − ٤ س + ٤ ≥ ٩

∴ س$^{٢}$ − ٤ س − ٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

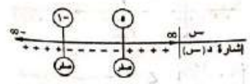
د (س) = س$^{٢}$ − ٤ س − ٥

، بوضع س$^{٢}$ − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ س = ٥ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − ]−١ ، ٥[





(١٢) ∵ (س − ٢)$^{٢}$ ≤ −٥

∴ س$^{٢}$ − ٤ س + ٤ ≤ −٥

∴ س$^{٢}$ − ٤ س + ٩ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ − ٤ س + ٩

، بوضع س$^{٢}$ − ٤ س + ٩ = ٠

∴ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ

= (−٤)$^{٢}$ − ٤ × ١ × ٩ = −٢٠ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٣) ∵ س (س + ٢) − ٣ ≤ ٠

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ٣ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

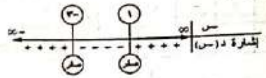
د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ٣

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(١٤) ∵ (س + ٢)$^{٢}$ + (س + ١) (س − ٤) < ٠

∴ س$^{٢}$ + ٤ س + ٤ + س$^{٢}$ − ٣ س − ٤ < ٠

∴ ٢ س$^{٢}$ + س < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

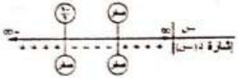
د (س) = ٢ س$^{٢}$ + س

، بوضع ٢ س$^{٢}$ + س = ٠

∴ س (٢ س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-١}{٢}$

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]$\frac{-١}{٢}$ ، ٠[

∴ مجموعة حل المتباينة = ]$\frac{-١}{٢}$ ، ٠[

(١٥) ∵ (س + ٣)$^{٢}$ < ١٠ − ٣ (س + ٣)

∴ س$^{٢}$ + ٦ س + ٩ < ١ − ٣ س

∴ س$^{٢}$ + ٩ س + ٨ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

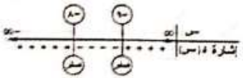
د (س) = س$^{٢}$ + ٩ س + ٨

، بوضع س$^{٢}$ + ٩ س + ٨ = ٠

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٨ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة = ]−٨ ، −١[

(١٦) ∵ ٥ − ٢ س ≥ س$^{٢}$

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ٥

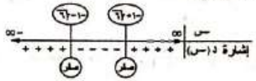
، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ = ٠

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١}$

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$ = −١ ± $\sqrt{٦}$

∴ س = −١ + $\sqrt{٦}$ أ، س = −١ − $\sqrt{٦}$

، ∵ أ > ٠

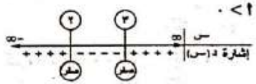


∴ د موجبة عندما
س ∈ ح − [−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$]
، د (س) = ٠ عندما
س ∈ {−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$}
∴ مجموعة حل المتباينة
= ح − ]−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$[

---

**٣**

∵ د (س) = س$^{٢}$ − ٥ س + ٦
، بوضع س$^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = ٣
، ∵ أ > ٠



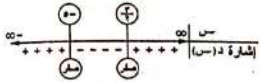
∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]
، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}
، د سالبة عندما س ∈ ]٢ ، ٣[
∴ مجموعة حل المتباينة = ]٢ ، ٣[

---

**٤**

∵ د (س) = ٢ س$^{٢}$ + ٧ س − ١٥
، بوضع ٢ س$^{٢}$ + ٧ س − ١٥ = ٠
∴ (٢ س − ٣) (س + ٥) = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أ، س = −٥
، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٥ ، $\frac{٣}{٢}$]
، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، $\frac{٣}{٢}$}
، د سالبة عندما س ∈ ]−٥ ، $\frac{٣}{٢}$[
∴ مجموعة حل المتباينة = [−٥ ، $\frac{٣}{٢}$]

---

**٥**

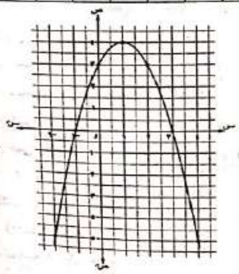
∵ د (س) = س$^{٢}$ + ٤ ، بوضع س$^{٢}$ + ٤ = ٠
∴ المميز = −٤ × ١ × ٤ = −١٦ < ٠
∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية
، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح
∴ مجموعة الحل المتباينة = ∅

---

**٦**

د (س) = − س$^{٢}$ + ٢ س + ٣

| س | −٢ | −١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | −٥ | ٠ | ٣ | ٤ | ٣ | ٠ | −٥ |







ومن الرسم نجد أن :
(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ هى {−١ ، ٣}
(٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠
هى ح − ]−١ ، ٣[
(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠ هى ]−١ ، ٣[

---

**٧**

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (أ) (٦) (د)

---

**٨** حل نور هو الصحيح

---

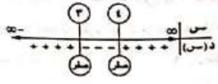
**٩** حل إسلام هو الصحيح لأن مجموعة الحل = ح

---

**١٠** (١) (د) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (أ)
(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)
(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ)

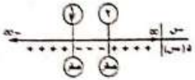
**إرشادات لحل رقم ١٠**

(١) ∵ د (س) = س$^{٢}$ − ٧ س + ١٢
، بوضع س$^{٢}$ − ٧ س + ١٢ = ٠
∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠
∴ س = ٣ أ، س = ٤



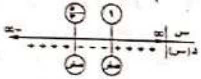
∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}
، مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠
هى ح − [٣ ، ٤]
، مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى ]٣ ، ٤[
∴ الاختيار الخاطئ هو (د)

(٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :
د (س) = (س − ٢) (٢ س − ١)
، بوضع (س − ٢) (٢ س − ١) = ٠
∴ س = ٢ أ، س = $\frac{١}{٢}$



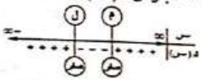
∴ مجموعة حل المتباينة = [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]
∴ مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة الحل = ١ + ٢ = ٣

(٣) ∵ (س + ٣)$^{٢}$ < ٤ (س + ١)$^{٢}$
∴ س$^{٢}$ + ٦ س + ٩ < ٤ س$^{٢}$ + ٨ س + ٤
∴ ٣ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ > صفر
∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :
د (س) = ٣ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥
، بوضع ٣ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ = ٠
∴ (٣ س + ٥) (س − ١) = ٠
∴ س = $\frac{-٥}{٣}$ أ، س = ١



∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

(٤) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة
أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠
، أ > ٠ ، بفرض د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + جـ



∴ مجموعة حل المتباينة = ]ل ، م[

(٥) ∵ المميز سالب ، أ < ٠

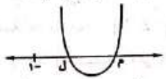
∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة تقع بالكامل أسفل محور السينات (سالبة).

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٦) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

∴ (ك − ٢)$^{٢}$ − ٤ (٢) (−٥) ≥ ٠




∴ (ك − ٢)$^{٢}$ ≥ −٤٠ متحققة لجميع قيم ك ∈ ح (١)

، ∵ الجذران أكبر من −١

∴ (معامل س$^{٢}$) × د (−١) > ٠

∴ ٢ (٢ − (ك − ٢) − ٥) > ٠

∴ ٢ (−ك − ١) > ٠ ∴ −ك − ١ > ٠

∴ ك < −١ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك < −١

(٧) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

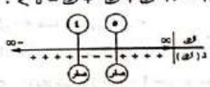
∴ (−٢ ك)$^{٢}$ − ٤ (ك$^{٢}$ + ك − ٥) ≥ ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك$^{٢}$ − ٤ ك + ٢٠ ≥ ٠

∴ ٤ ك ≤ ٢٠ ∴ ك ≤ ٥ (١)

، ∵ الجذران أقل من ٥ ∴ د (٥) > ٠

∴ ٢٥ − ١٠ ك + ك$^{٢}$ + ك − ٥ > ٠




∴ ك$^{٢}$ − ٩ ك + ٢٠ > ٠

∴ (ك − ٤) (ك − ٥) > ٠

∴ ك ∈ ح − [٤ ، ٥] (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ك ∈ ]−∞ ، ٤[

(٨) ∵ جذرا المعادلة غير حقيقيين

∴ المميز < صفر

∴ (−ك)$^{٢}$ − ٤ (١) (١) < ٠

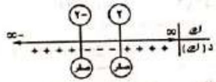
∴ ك$^{٢}$ − ٤ < ٠

، المعادلة المرتبطة بالمتباينة ك$^{٢}$ − ٤ = ٠

ك$^{٢}$ = ٤

∴ ك = ٢ أ، ك = −٢

، ∵ أ > صفر




∴ حل المتباينة هو −٢ < ك < ٢

(٩) ∵ س$^{٢}$ − ٤ ≤ س + ك

∴ س$^{٢}$ − س − ٤ − ك ≤ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى [−٢ ، ٢]

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٢

∴ (−٢)$^{٢}$ − (−٢) − ٤ − ك = ٠

∴ ك = ٢

(١٠) ∵ س$^{٢}$ − ١٠ < ب س

∴ س$^{٢}$ − ب س − ١٠ < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى ]−٢ ، ٥[

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٥

∴ ب = −٢ + ٥ ∴ ب = ٣

(١١) ∵ أحد الجذرين فقط يقع فى الفترة ]١ ، ٢[

∴ د (١) × د (٢) < ٠

∴ (١ − ب + ٣) × (٤ − ٢ ب + ٣) < ٠

∴ (٤ − ب) (٧ − ٢ ب) < ٠

∴ ب ∈ ]٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٤[





(١٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :

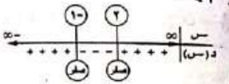
د (س) = س$^{٢}$ − س − ٢

، بوضع س$^{٢}$ − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠




∴ م$_{١}$ = [−١ ، ٢]

، الدالة المرتبطة بالمتباينة د :

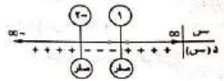
د (س) = س$^{٢}$ + س − ٢

، بوضع : س$^{٢}$ + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠




∴ م$_{٢}$ = [−٢ ، ١]

∴ م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [−١ ، ١]

(١٣) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة

أ س$^{٢}$ + أ س + أ + ٢ = ٠

، الدالة المرتبطة بالمعادلة

د (س) = أ س$^{٢}$ + أ س + أ + ٢

∴ د (ل) = د (م) = صفر

فإذا كان : أ > صفر ، ٢ ∈ ]ل ، م[

∴ د (٢) < صفر

∴ (٢)$^{٢}$ أ + ٢ أ + أ + ٢ < صفر

∴ ٧ أ + ٢ < صفر

∴ أ < $\frac{-٢}{٧}$ (مرفوض)

وإذا كان أ < صفر ، ٢ ∈ ]ل ، م[

∴ د (٢) > صفر ∴ ٧ أ + ٢ > صفر

∴ أ > $\frac{-٢}{٧}$ ∴ $\frac{-٢}{٧}$ < أ < صفر

**١١**

∵ ١٠ > س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ ≥ ٣

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ < ١٠

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ١٥ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

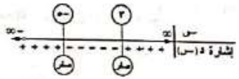
د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ١٥

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ١٥ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٣

، ∵ أ > ٠




∴ د سالبة عندما س ∈ ]−٥ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة = ]−٥ ، ٣[ (١)

، ∵ س$^{٢}$ + ٢ س − ٥ ≥ ٣

∴ س$^{٢}$ + ٢ س − ٨ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

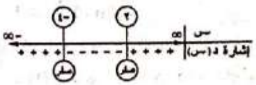
د (س) = س$^{٢}$ + ٢ س − ٨

، بوضع س$^{٢}$ + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠




∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٤ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − ]−٤ ، ٢[ (٢)

من (١) ، (٢) :




∴ مجموعة حل المتباينة ١٠ > س$^{٢}$ + ٢س − ٥ ≥ ٣

= ]−٥ ، −٤] ∪ [٢ ، ٣[

## إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

**١**

بالتعويض عن : ف = ٢٩٫٤ متر ، ع = ٢٤٫٥ متر/ث.

فى العلاقة : ف = ع ن − ٤٫٩ ن$^{٢}$

∴ ٢٩٫٤ = ٢٤٫٥ ن − ٤٫٩ ن$^{٢}$

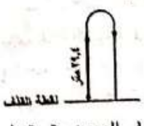
∴ ٦ = ٥ ن − ن$^{٢}$

∴ ن$^{٢}$ − ٥ ن + ٦ = ٠

∴ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٠

∴ ن = ٢ ثانية أ، ن = ٣ ثانية

**تفسير وجود جوابين :**




القذيفة تصعد إلى أعلى حتى تصل إلى ارتفاع ٢٩٫٤ متر بعد مرور [٢ ثانية] ثم تستمر فى الصعود حتى تصل لأقصى ارتفاع ، ثم تعود إلى نفس الارتفاع (٢٩٫٤ متر) بعد مرور [٣ ثانية] من لحظة إطلاقها.

**٢**

بالتعويض عن : ف = ١٠ أمتار

فى العلاقة : ف = − ٤٫٩ ن$^{٢}$ + ٣٫٥ ن + ١٠

∴ ١٠ = − ٤٫٩ ن$^{٢}$ + ٣٫٥ ن + ١٠

∴ ٤٫٩ ن$^{٢}$ = ٣٫٥ ن

∴ ٤٫٩ ن = ٣٫٥ حيث ن ≠ ٠ ∴ ن = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

**٣**

∵ مساحة الأرض الحالية = ٦ × ٩ = ٥٤ م$^{٢}$

∴ مساحة الأرض بعد مضاعفة مساحتها

= ٢ × ٥٤ = ١٠٨ م$^{٢}$

ونفرض أن الزيادة فى بُعدى الأرض = س م

∴ (٦ + س) (٩ + س) = ١٠٨

∴ س$^{٢}$ + ١٥ س + ٥٤ = ١٠٨

∴ س$^{٢}$ + ١٥ س − ٥٤ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١٨) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١٨ (مرفوض)

∴ المقدار المضاف = ٣ أمتار.

**٤**

(١) ∵ − ١٦ ن$^{٢}$ + ٨٠ ن + ٢٠ = ٠

∴ أ = − ١٦ ، ب = ٨٠ ، حـ = ٢٠

∴ ن = $\frac{-٨٠ \pm \sqrt{٦٤٠٠ + ١٢٨٠}}{-٣٢}$ = $\frac{-٨٠ \pm \sqrt{٧٦٨٠}}{-٣٢}$

∴ ن ≈ ٥٫٢٤ أ، ن ≈ −٠٫٢٤ (مرفوض)

∴ الكرة ستصل إلى سطح الأرض بعد ٥٫٢٤ ثانية تقريبًا

(٢) نحسب نقطة رأس المنحنى لمعرفة أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.





∵ نقطة رأس المنحنى = ( $\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$) )

= (٢٫٥ ، ١٢٠)

أى أن : أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو ١٢٠ قدمًا وتصله بعد ٢٫٥ ثانية وبالتالى فإنها لن تصل إلى ارتفاع ١٣٠ قدمًا.

**٥**

(١) عند ن = ٠ ∴ ع = ٩١ مليونًا

(٢) عند ن = ٢٠

∴ ع = (٢٠)$^{٢}$ + ١٫٢ × ٢٠ + ٩١ = ٥١٥ مليونًا

(٣) عند ع = ٢٠٣ ∴ ٢٠٣ = ن$^{٢}$ + ١٫٢ ن + ٩١

∴ ن$^{٢}$ + ١٫٢ ن − ١١٢ = ٠

ن = $\frac{-١٫٢ \pm \sqrt{١٫٤٤ - ٤ \times ١ \times -١١٢}}{٢}$

∴ ن = ١٠ أ، ن = −١١٫٢ (مرفوض)

∴ يبلغ عدد السكان ٢٠٣ ملايين بعد ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٣٣

**٦**

شدة التيار الكلية = ٤ − ٢ ت + $\frac{٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{(٤ - ٢ ت) (٢ + ت) + ٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{٨ - ٢ ت^{٢} + ٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ = $\frac{١٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$

= $\frac{١٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ × $\frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

= $\frac{٣٢ - ١٠ ت - ٣ ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}}$

= $\frac{٣٥ - ١٠ ت}{٥}$ = (٧ − ٢ ت) أمبير.

**٧**

شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى

= ٦ + ٤ ت − $\frac{١٧}{٤ - ت}$ = $\frac{(٦ + ٤ ت) (٤ - ت) - ١٧}{٤ - ت}$

= $\frac{٢٤ + ١٠ ت - ٤ ت^{٢} - ١٧}{٤ - ت}$ = $\frac{١١ + ١٠ ت}{٤ - ت}$

= $\frac{١١ + ١٠ ت}{٤ - ت}$ × $\frac{٤ + ت}{٤ + ت}$ = $\frac{٤٤ + ٥١ ت + ١٠ ت^{٢}}{١٦ - ت^{٢}}$

= $\frac{٣٤ + ٥١ ت}{١٧}$ = (٢ + ٣ ت) أمبير.

**٨**

(١) ∵ د (ن) = ١٢ ن$^{٢}$ − ٩٦ ن + ٤٨٠

∴ المميز = ب$^{٢}$ − ٤أحـ

= (−٩٦)$^{٢}$ − ٤ × ١٢ × ٤٨٠

= −١٣٨٢٤ > ٠

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة

، ∵ أ = ١٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم ن ∈ ح

(٢) • فى عام ١٩٩٠ : ن = ٠ ∴ د (٠) = ٤٨٠

∴ إنتاج المنجم = ٤٨٠ ألف أوقية

• فى عام ٢٠٠٥ : ن = ١٥

∴ د (١٥) = ١٢ × (١٥)$^{٢}$ − ٩٦ × ١٥ + ٤٨٠

= ١٧٤٠

∴ إنتاج المنجم = ١٧٤٠ ألف أوقية

(٣) ∵ د (ن) = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن$^{٢}$ − ٩٦ ن + ٤٨٠ = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن$^{٢}$ − ٩٦ ن − ١٥٣٦ = ٠

∴ ن$^{٢}$ − ٨ ن − ١٢٨ = ٠

∴ (ن − ١٦) (ن + ٨) = ٠

∴ ن = ١٦ أ، ن = −٨ (مرفوض)

∴ العام المطلوب هو : ٢٠٠٦

# إرشادات الوحدة الثانية

## إرشادات تمارين 7

**١**

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ)

(٤) (ب) (٥) (أ) (٦) (جـ)

**٢**

(١) الزاوية الموجهة ∠ أ حـ ء ليست فى وضعها القياسى ، لأن رأس الزاوية حـ ليست نقطة الأصل و

(٢) الزاوية الموجهة ∠ أ و هـ فى وضعها القياسى.

(٣) الزاوية الموجهة ∠ هـ و أ ليست فى وضعها القياسى ، لأن ضلعها الابتدائى و هـ لا يقع على و س

(٤) الزاوية الموجهة ∠ أ و ن فى وضعها القياسى.

(٥) الزاوية الموجهة ∠ ب و ن ليست فى وضعها القياسى ، لأن ضلعها الابتدائى و ب لا يقع على و س

(٦) الزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى.

**٣**

(١) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليست نقطة الأصل و

(٢) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٣) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٤) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٥) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليس نقطة الأصل و

(٦) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٧) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٨) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على و س

(٩) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

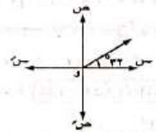
**٤**

(١) −٣٠٦° (٢) ٢٧٠° (٣) ٢٢٥°

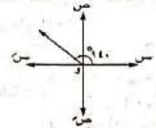
(٤) ٣٠٠° ٢٨َ (٥) ٢٤٥° (٦) −٦٩° ٢٠َ

**٥**

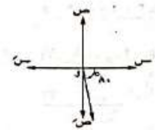
(١)



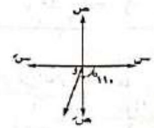

(٢)




(٣)



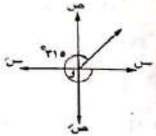

(٤)








(٥)




**٦**

(١) الأول (٢) الثالث (٣) الرابع

(٤) الثانى (٥) الثانى (٦) الأول

(٧) ربعية (٨) ربعية

**٧**

(١) ٣٠٤° ، الرابع (٢) ٢٤٠° ، الثالث

(٣) ١٤٥° ، الثانى (٤) ٢٢٠° ، الثالث

(٥) ٥٥° ، الأول (٦) ٢١٠° ، الثالث

(٧) ٤٠° ١٥َ ، الأول (٨) ١٢٩° ٤٢َ ، الثانى

**٨**

(١) −٢٧٧° (٢) −٢٢٤° (٣) −٢٧٠°

(٤) −٩٦° (٥) −١١٦° (٦) −١٠°

**٩**

(١) ٤٠٠° ، −٣٢٠° (٢) ٥١٠° ، −٢١٠°

(٣) ٢٣٥° ، −٤٨٥° (٤) ١٢٠° ، −٦٠٠°

(٥) ١٨٠° ، −٥٤٠°

**١٠**

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ)

(٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)

(٩) (ب) (١٠) (ب)

**١١**

إجابة زياد هى الإجابة الصحيحة.

**١٢**

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (د)

### إرشادات لحل رقم ١٢

(١) ∵ أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين.

∴ ب = أ ± ٣٦٠° ن

∴ ب + حـ = أ + حـ ± ٣٦٠° ن

∴ (ب + حـ) ، (أ + حـ) يمثلان قياسى زاويتين متكافئتين.

، ب − حـ = أ − حـ ± ٣٦٠° ن

∴ (ب − حـ) ، (أ − حـ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.

، حـ ب = حـ أ ± ٣٦٠° حـ ن ، حـ ∈ ص

∴ (حـ ب) ، (حـ أ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.

∴ الإجابة هى (د)

(٢) ∵ أ = −أ ± ٣٦٠° ن

بوضع ن = ١ أ = −أ + ٣٦٠°

∴ ٢ أ = ٣٦٠° ∴ أ = ١٨٠°

(٣) (٢ س − ٥)° = (٢ ص − ٥)° + ٣٦٠°

∴ ٢ س − ٢ ص = ٣٦٠°

∴ س − ص = ١٢٠°

(٤) (θ + ٢٠)° = (٢٠ − ٨ θ)° + ٣٦٠°

∴ ٩ θ = ٣٦٠° ∴ θ = ٤٠°

(٥) الضلع النهائى يمثل الزاوية = ٦٠° + ٢ $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠°

= ٨٧٠°

وهذه الزاوية مكافئة للزاوية التى قياسها

= ٨٧٠° − ٢ × ٣٦٠° = ١٥٠°

(٦) الضلع النهائى يمثل الزاوية

= ٣٠° − ٢ $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = −١٢٢٠°

وهذه الزاوية مكافئة للزاوية التى قياسها

= −١٢٢٠° + ٤ × ٣٦٠° = ٢١٠° والضلع النهائى لهذه الزاوية يقع فى الربع الثالث.

(٧) الضلع النهائى يمر بالنقطة (−١ ، ٠)

∴ الزاوية الموجهة المعطاة هى زاوية ربعية.

∴ الإجابة هى (د)

## إرشادات تمارين 8

**1**

$\theta^{\text{د}} = \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$

(1) $\theta^{\text{د}} = \frac{135^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{3}{4}\pi$

(2) $\theta^{\text{د}} = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{1}{2}\pi$

(3) $\theta^{\text{د}} = \frac{300^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{5}{3}\pi$

(4) $\theta^{\text{د}} = \frac{-235^\circ}{180^\circ}\pi = -\frac{47}{36}\pi$

(5) $\theta^{\text{د}} = -\frac{210^\circ}{180^\circ}\pi = -\frac{7}{6}\pi$

(6) $\theta^{\text{د}} = \frac{112.5^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{5}{8}\pi$

(7) $\theta^{\text{د}} = \frac{390^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{13}{6}\pi$

(8) $\theta^{\text{د}} = \frac{780^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{13}{3}\pi$

**2**

$\theta^{\text{د}} = \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$

(1) $\theta^{\text{د}} = 58^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 1.012^{\text{د}}$

(2) $\theta^{\text{د}} = 56.6^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 0.988^{\text{د}}$

(3) $\theta^{\text{د}} = 37^\circ\,15' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 0.650^{\text{د}}$

(4) $\theta^{\text{د}} = 115^\circ\,28'\,9'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2.018^{\text{د}}$

(5) $\theta^{\text{د}} = 257^\circ\,54' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 4.486^{\text{د}}$

(6) $\theta^{\text{د}} = 160^\circ\,50'\,48'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2.807^{\text{د}}$

**3**

$\text{س}^\circ = \theta^{\text{د}} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

(1) $\text{س}^\circ = \frac{11}{15} \times 180^\circ = 132^\circ$

(2) $\text{س}^\circ = 0.72 \times 180^\circ = 129^\circ\,36'$

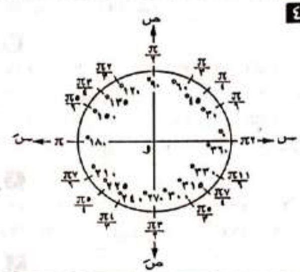
(3) $\text{س}^\circ = 0.49 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 28^\circ\,4'\,30''$

(4) $\text{س}^\circ = -1.67 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq -(95^\circ\,41'\,4'')$

(5) $\text{س}^\circ = 2.27 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 130^\circ\,3'\,41''$

(6) $\text{س}^\circ = -3\frac{1}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq -(200^\circ\,32'\,7'')$

**4**



**5**

$\theta^{\text{د}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

(1) $\theta^{\text{د}} = \frac{12}{10} = 1.2^{\text{د}}$

$\therefore \text{س}^\circ = 1.2 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 68^\circ\,45'\,18''$

(2) $\theta^{\text{د}} = \frac{14}{7} = 2^{\text{د}}$

$\therefore \text{س}^\circ = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 114^\circ\,35'\,30''$

(3) $\theta^{\text{د}} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \text{س}^\circ = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$

(4) $\theta^{\text{د}} = \frac{15.72}{9.17} = 1\frac{5}{7}^{\text{د}}$

$\therefore \text{س}^\circ = 1\frac{5}{7} \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 98^\circ\,13'\,17''$





**6**

$\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{\text{د}}}$

(1) $\theta^{\text{د}} = \frac{9}{8}\pi \simeq 3.534^{\text{د}}$

$\therefore \text{نق} = \frac{22.5}{3.534} \simeq 6.37$ سم

(2) $\text{نق} = \frac{38.35}{0.767} = 50$ سم

(3) $\theta^{\text{د}} = 139^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2.426^{\text{د}}$

$\therefore \text{نق} = \frac{24.325}{2.426} \simeq 10$ سم

(4) $\theta^{\text{د}} = 78^\circ\,36'\,36'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 1.37^{\text{د}}$

$\therefore \text{نق} = \frac{43.92}{1.37} \simeq 32$ سم

**7**

(1) $\text{ل} = \theta^{\text{د}} \times \text{نق} = 1.6 \times 12.5 = 20$ سم

(2) $\text{ل} = \theta^{\text{د}} \times \text{نق} = 2.43 \times 20 = 48.6$ سم

(3) $\text{ل} = \theta^{\text{د}} \times \text{نق} = 67^\circ\,40' \times \frac{\pi}{180^\circ} \times 7.5$

$\simeq 8.9$ سم

(4) $\text{ل} = \theta^{\text{د}} \times \text{نق} = 104^\circ\,58'\,9'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \times 15$

$\simeq 27.5$ سم

**8**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) (ب) | (2) (جـ) | (3) (د) | (4) (ب) |
| (5) (د) | (6) (أ) | (7) (جـ) | (8) (د) |
| (9) (ب) | (10) (ب) | (11) (ب) | (12) (جـ) |
| (13) (أ) | (14) (ب) | (15) (جـ) | (16) (جـ) |
| (17) (جـ) | (18) (جـ) | | |

**9**

$\because$ قياس الزاوية المحيطية $= 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

$= 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

$\therefore \theta^{\text{د}} = 90^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{\text{د}}} = 12 \div \frac{\pi}{2} = \frac{24}{\pi}$ سم

$\therefore$ محيط الدائرة $= 2\pi\,\text{نق} = 2\pi \times \frac{24}{\pi} = 48$ سم

**10**

$\because \text{ل} = 2\,\text{نق} \quad \therefore \theta^{\text{د}} = \frac{2\,\text{نق}}{\text{نق}} = 2^{\text{د}}$

$\therefore \text{س}^\circ = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 114^\circ\,35'\,30''$

**11**

$\because \theta^{\text{د}} = 105^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{12}$

$\therefore \text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{\text{د}}} = \frac{7}{3}\pi \div \frac{7\pi}{12}$

$= \frac{7}{3}\pi \times \frac{12}{7\pi} = 4$ سم

$\therefore$ طول القطر $= 8$ سم

**12**

القياس الستينى للزاوية الأخرى $= \frac{1}{4} \times 180^\circ = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الثالثة $= 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

$\therefore$ القياس الدائرى لها $= 75^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5}{12}\pi$

**13**

$\frac{11}{6}^{\text{د}}$ تكافئ $\frac{11}{6} \times \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}} = 105^\circ$

، $2\frac{4}{9}^{\text{د}}$ تكافئ $\frac{22}{9} \times \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}} = 140^\circ$

$\therefore$ القياس الستينى للزاوية الرابعة

$= 360^\circ - (105^\circ + 140^\circ + 45^\circ) = 70^\circ$

$\therefore$ القياس الدائرى لها $= 70^\circ \times \frac{\frac{22}{7}}{180^\circ} = \frac{11}{9}^{\text{د}}$

**14**

بفرض أن قياسى الزاويتين هما :

$\text{س}^\circ ، \text{ص}^\circ ، \text{س}^\circ > \text{ص}^\circ$

$\therefore \text{س}^\circ + \text{ص}^\circ = 70^\circ$ (1)

، س° − ص° = $\frac{١}{٥}$ × ١٨٠° = ٣٦° (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ س = ١٠٦° ∴ س° = ٥٣°

∴ سᵉ = ٥٣° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٥٣}{١٨٠}$ π

، ص° = ٧٠° − ٥٣° = ١٧°

∴ صᵉ = ١٧° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{١٧}{١٨٠}$ π

**15**

بفرض أن قياسي الزاويتين هما :

س ، ص ، س° > ص° ∴ سᵉ + صᵉ = π

، سᵉ − صᵉ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ٢ سᵉ = $\frac{٤}{٣}$ π ∴ سᵉ = $\frac{٢}{٣}$ π

، صᵉ = $\frac{١}{٣}$ π

، س° = $\frac{٢}{٣}$ × ١٨٠° = ١٢٠°

، ص° = $\frac{١}{٣}$ × ١٨٠° = ٦٠°

**16**

مساحة Δ أ م ب = $\frac{١}{٢}$ × أ م × م ب

، ∵ أ م = ب م = نق ∴ $\frac{١}{٢}$ نق² = ٣٢

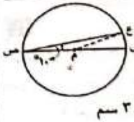
∴ نق² = ٦٤ ∴ نق = ٨ سم

∴ طول ⌒أب = ٩٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٨ = ١٢,٥٧ سم

∴ محيط الشكل المظلل = ٨ + ٨ + ١٢,٥٧

= ٢٨,٥٧ سم

**17**

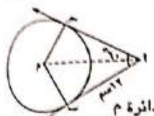


ق(∠ ع م س) = ٢٠°

∴ طول ⌒س ع

= ٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٩ = ٣,١٤ سم

**18**



العمل : نرسم أم

البرهان :

∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة م

∴ م ب ⊥ أب ، م حـ ⊥ أحـ

، م ب نصف قطر فيها

∴ ق(∠م) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠م) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

، ∵ أم ينصف ∠أ ∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°

∴ م ب = $\frac{١}{٢}$ أ م

، ∵ م ب = نق ∴ أ م = ٢ نق

في Δ أ ب م القائم الزاوية في ب

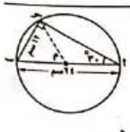
(٢ نق)² = نق² + (١٢)² ∴ ٣ نق² = ١٤٤

∴ نق² = ٤٨ ∴ نق = ٤√٣ سم

∴ طول ⌒ب حـ الأكبر = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٤√٣

= ٢٩ سم

**19**



∵ ∠حـ قائمة

∴ أب قطر

∴ نق = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢ سم

، ∵ ∠حـ قائمة ، ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

نرسم م حـ حيث م مركز الدائرة منتصف أب

∴ ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠أ م حـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ⌒ب حـ يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠°

∴ طول ⌒ب حـ = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ = ١٢,٦ سم

، ∵ ⌒أحـ يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠°

∴ طول ⌒أحـ = ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ = ٢٥,١ سم





، ∵ ⌒أب يقابل زاوية مركزية قياسها ١٨٠°

∴ طول ⌒أب (وهو نصف محيط الدائرة)

= ١٨٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ١٢ = ٣٧,٧ سم

**20**



ق(∠ب م حـ) = ٢ ق(∠أ)

= ١٢٠°

∴ طول ⌒ب حـ الأصغر

= ١٢٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥ = ١٥,٧ سم

، ق(∠أ م حـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٠٨°

∴ طول ⌒أحـ الأصغر = ١٠٨° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥

= ١٤,١ سم

، ق(∠أ م ب) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٠٨°) = ١٣٢°

∴ طول ⌒أب الأصغر = ١٣٢° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧,٥

= ١٧,٣ سم

**21**

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (حـ)

(٥) (ب) (٦) (حـ) (٧) (حـ) (٨) (ب)

(٩) (ب) (١٠) (ب) (١١) (حـ)

**إرشادات لحل رقم 21**

(١) طول القوس = θᵉ نق = $\frac{٧٢°}{١٨٠°}$ × π × ١٤

= $\frac{٢٨}{٥}$ π سم

∴ محيط الدائرة = $\frac{٢٨}{٥}$ π

∴ ٢ π نق = $\frac{٢٨}{٥}$ π

∴ نق = $\frac{١٤}{٥}$ = ٢,٨ سم

(٢) ∵ ٥ < طول القوس ⌒أب < ٦

∴ ٥ < $\frac{س}{١٨٠°}$ × π × ١٠ < ٦

∴ ٥ < $\frac{\pi}{١٨}$ س < ٦

∴ ٢٨,٦° < س < ٣٤,٤°

(٣) ∵ النسبة بين قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٥ : ٤ : ٩ : ٦

∴ ٥ س + ٤ س + ٩ س + ٦ س = ٣٦٠°

∴ ٢٤ س = ٣٦٠° ∴ س = ١٥°

∴ قياس أصغر زوايا الشكل الرباعي = ٤ × ١٥°

= ٦٠°

، بالقياس الدائري = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{\pi}{٣}$

(٤) عدد الساعات بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات عند الثانية والنصف تمامًا = ٣,٥ ساعة

∴ الزاوية بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات

= $\frac{٣,٥}{١٢}$ × ٢ π = $\frac{٧}{١٢}$ π

(٥) القياس الدائري للزاوية ٦٠° = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{\pi}{٣}$

بفرض أن نصف قطر دائرته نق₁

∴ طول القوس = نق₁ × $\frac{\pi}{٣}$

، القياس الدائري للزاوية ٨٠° = ٨٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$

= $\frac{٤}{٩}$ π

بفرض أن نصف قطر دائرته نق₂

∴ طول القوس = نق₂ × $\frac{٤}{٩}$ π

∴ نق₁ × $\frac{\pi}{٣}$ = نق₂ × $\frac{٤}{٩}$ π ∴ $\frac{نق_١}{نق_٢}$ = $\frac{٤}{٣}$

(٦) عدد الدورات في الثانية الواحدة = $\frac{٤٥}{٦٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ الزاوية التي تدورها نقطة على سطحها الجانبي في الثانية = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ π = $\frac{٣ \pi}{٢}$

(٧) (قياس الدائرة)ᵉ = ٢ π ≈ ٦,٢٨

، ∵ ٦,٢٨ > ن حيث ن أكبر عدد صحيح ممكن

∴ ن = ٦

(٨) عدد الدورات التي يقطعها عقرب الدقائق من السادسة صباحًا حتى الثالثة والربع عصرًا

= ٩ $\frac{١}{٤}$ دورة

∴ المسافة التي يقطعها رأس عقرب الدقائق

= ٩ $\frac{١}{٤}$ × ٢ π × ٨ = ١٤٨ π سم

(٩) عند دوران الترس الأصغر لفة واحدة عكس عقرب الساعات يدور الترس الأكبر $\frac{١}{٣}$ دورة فى اتجاه عقرب الساعات.

∴ الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر

$= -\frac{١}{٣} \times ٢\pi = \frac{-٢\pi}{٣}$

(١٠) محيط الدائرة له $= ٢\pi \times ٧ = ١٤\pi$ سم

∴ طول $(\overset{\frown}{أب}) = ١٤\pi$

∴ ى(∠ أ م ب) $= \frac{\text{طول القوس}}{\text{نق}} = \frac{١٤\pi}{٢١} = \frac{٢\pi}{٣}$

(١١) ∵ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم.

∴ ى(∠ أ م ب) $= \frac{٢\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

∵ Δ أ م ب مثلث متساوى الأضلاع

∴ نق = ٤ سم

∴ طول $(\overset{\frown}{أب}) = \frac{\pi}{٣} \times ٤ = \frac{٤\pi}{٣}$ سم

**١٢**

القياس الستينى للزاوية التى يصنعها المستقيم مع محور السينات $= \frac{١٨٠^\circ}{٣} = ٦٠^\circ$

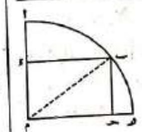
∴ ميل المستقيم = ظا $٦٠^\circ = \sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى : ص $= \sqrt{٣}$ س + حـ

∵ الزاوية فى وضعها القياسى

∴ حـ = ٠ ∴ ص $= \sqrt{٣}$ س

**١٣**




العمل : نرسم $\overline{ب م}$

البرهان :

∵ ب م = حـ ء

(قطران فى المستطيل)

∴ ب م = ١٠ سم ∴ نق = ١٠ سم

، ∵ قياس الزاوية المركزية $= \frac{\pi}{٢}$

∴ ل (طول القوس $\overset{\frown}{أ ب هـ}$) $= \theta^{ء} \times$ نق

$= \frac{\pi}{٢} \times ١٠ = ٥\pi$ سم

## إرشادات تمارين 9

**١**

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (د)

(٩) (جـ) (١٠) (ب) (١١) (جـ) (١٢) (أ)

(١٣) (أ) (١٤) (ب)

**٢**

(١) ∵ $٢٧٠^\circ < ٣٥٠^\circ < ٣٦٠^\circ$

∴ $٣٥٠^\circ$ تقع فى الربع الرابع

∴ جتا $٣٥٠^\circ$ موجبة

(٢) ∵ $٩٠^\circ < ١٠٠^\circ < ١٨٠^\circ$

∴ $١٠٠^\circ$ تقع فى الربع الثانى

∴ ظا $١٠٠^\circ$ سالبة

(٣) ∵ $١٨٠^\circ < ٢٦٥^\circ < ٢٧٠^\circ$

∴ $٢٦٥^\circ$ تقع فى الربع الثالث

∴ قا $٢٦٥^\circ$ سالبة

(٤) ∵ $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠^\circ}{٤} = ٢٢٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثالث

∴ جا $\frac{٥\pi}{٤}$ سالبة

(٥) ∵ $\frac{٣\pi}{٧} = \frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٧} = ٧٧\frac{١}{٧}^\circ$

وهى تقع فى الربع الأول

∴ قتا $\frac{٣\pi}{٧}$ موجبة

(٦) ∵ $\frac{٣\pi}{٤} = \frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٤} = ١٣٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثانى

∴ ظتا $\frac{٣\pi}{٤}$ سالبة





(٧) ∵ ظا $٤١٠^\circ$ = ظا $(٥٠^\circ + ٣٦٠^\circ)$ = ظا $٥٠^\circ$

، ∵ $٥٠^\circ$ تقع فى الربع الأول

∴ ظا $٤١٠^\circ$ موجبة

(٨) ∵ قتا $١٢٠٠^\circ$ = قتا $(١٢٠^\circ + ٣ \times ٣٦٠^\circ)$

= قتا $١٢٠^\circ$

، ∵ $١٢٠^\circ$ تقع فى الربع الثانى

∴ قتا $١٢٠٠^\circ$ موجبة

(٩) ∵ جتا $-١٦٥^\circ$ = جتا $(-١٦٥^\circ + ٣٦٠^\circ)$ = جتا $١٩٥^\circ$

، ∵ $١٩٥^\circ$ تقع فى الربع الثالث

∴ جتا $(-١٦٥^\circ)$ سالبة

(١٠) ∵ $\frac{٣٢\pi}{٣} = \frac{٣٢ \times ١٨٠^\circ}{٣} = ١٩٢٠^\circ$

$= (١٢٠^\circ + ٥ \times ٣٦٠^\circ)$

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ = ظتا $١٢٠^\circ$

، ∵ $١٢٠^\circ$ تقع فى الربع الثانى

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ سالبة

(١١) ∵ $\frac{-٣\pi}{٤} = \frac{-٣ \times ١٨٠^\circ}{٤} = -١٣٥^\circ$

$= (-١٣٥^\circ + ٣٦٠^\circ) = ٢٢٥^\circ$

وهى تقع فى الربع الثالث

∴ ظتا $(\frac{-٣\pi}{٤})$ موجبة

(١٢) ∵ $-\frac{٢٥\pi}{٦} = -\frac{٢٥ \times ١٨٠^\circ}{٦} = -٧٥٠^\circ$

$= (-٧٥٠^\circ + ٣ \times ٣٦٠^\circ) = ٣٣٠^\circ$

∴ قا $(\frac{-٢٥\pi}{٦})$ = قا $٣٣٠^\circ$

، ∵ $٣٣٠^\circ$ تقع فى الربع الرابع

∴ قا $(-\frac{٢٥\pi}{٦})$ موجبة

**٣**

(١) ∵ س $= \frac{٢}{٣}$ ، ص $= \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

∴ جا θ $= \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، جتا θ $= \frac{٢}{٣}$

، ظا θ $= \frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، ظتا θ $= \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

، قتا θ $= \frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، قا θ $= \frac{٣}{٢}$

(٢) ∵ س $= -\frac{٣}{٥}$ ، ص $= -\frac{٤}{٥}$

∴ جا θ $= -\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ $= -\frac{٣}{٥}$

، ظا θ $= \frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ $= \frac{٣}{٤}$

، قتا θ $= -\frac{٥}{٤}$ ، قا θ $= -\frac{٥}{٣}$

(٣) ∵ س = ٠ ، ص = −١

∴ جا θ = −١ ، جتا θ = ٠

، ظا θ غير معرفة ، ظتا θ = ٠

، قتا θ = −١ ، قا θ غير معرفة.

**٤**

(١) ∵ س$^٢$ + ص$^٢$ = ١ ∴ $(٠,٦)^٢$ + ص$^٢$ = ١

∴ ص$^٢$ = ٠,٦٤ ∴ ص = ٠,٨ حيث ص > ٠

∴ ب(٠,٦ ، ٠,٨)

∴ جتا θ = ٠,٦ ، جا θ = ٠,٨ ، ظا θ $= \frac{٤}{٣}$

، قا θ $= \frac{٥}{٣}$ ، قتا θ $= \frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ $= \frac{٣}{٤}$

(٢) ∵ س$^٢$ + ص$^٢$ = ١

∴ س$^٢$ + $(-٠,٦)^٢$ = ١ ∴ س$^٢$ = ٠,٦٤

∴ س = ٠,٨ حيث س > ٠

∴ ب(٠,٨ ، −٠,٦)

∴ جتا θ = ٠,٨ ، جا θ = −٠,٦ ، ظا θ $= -\frac{٣}{٤}$

، قا θ $= \frac{٥}{٤}$ ، قتا θ $= \frac{-٥}{٣}$ ، ظتا θ $= \frac{-٤}{٣}$

(٣) ∵ س$^٢$ + ص$^٢$ = ١ ∴ $\frac{٣}{٤}$ + ص$^٢$ = ١

∴ ص$^٢$ $= \frac{١}{٤}$

∴ ص $= \frac{١}{٢}$ حيث $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$

∴ ب$\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا θ = $\frac{١}{٢}$

، ظا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، قا θ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، قتا θ = ٢ ، ظتا θ = $-\sqrt{٣}$

(٤) ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ س$^{٢}$ + $\frac{٥}{٩}$ = ١

∴ س$^{٢}$ = $\frac{٤}{٩}$

∴ س = $-\frac{٢}{٣}$ حيث س < ٠

∴ ب$\left(-\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٢}{٣}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

، ظا θ = $-\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، قا θ = $-\frac{٣}{٢}$

، قتا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، ظتا θ = $-\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(٥) ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ ١ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ص$^{٢}$ = ٠ ∴ ص = ٠

∴ ب(−١ ، ٠)

∴ جتا θ = −١ ، جا θ = ٠ ، ظا θ = ٠

، قا θ = −١ ، قتا θ غير معرفة

، ظتا θ غير معرفة

(٦) ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ (−س)$^{٢}$ + س$^{٢}$ = ١ ∴ ٢س$^{٢}$ = ١

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث س > ٠

∴ ب$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = −١

، قا θ = $-\sqrt{٢}$ ، قتا θ = $\sqrt{٢}$ ، ظتا θ = −١

(٧) ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ س$^{٢}$ + س$^{٢}$ = ١ ∴ س$^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث س > ٠

∴ ب$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

∴ جتا θ = جا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ظتا θ = ١

، قا θ = قتا θ = $-\sqrt{٢}$

(٨) ∵ θ فى الربع الثالث

∴ كل من ٩أ ، ١٢أ سالبة ∴ أ < ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ٨١أ$^{٢}$ + ١٤٤أ$^{٢}$ = ١ ∴ ٢٢٥أ$^{٢}$ = ١

∴ أ$^{٢}$ = $\frac{١}{٢٢٥}$ ∴ أ = $-\frac{١}{١٥}$

∴ ب$\left(-\frac{٩}{١٥} ، -\frac{١٢}{١٥}\right)$ = $\left(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $-\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

(٩) ∵ θ فى الربع الرابع

∴ $\frac{٣}{٢}$أ > ٠ ، −٢أ < ٠ ∴ أ > ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ $\frac{٩}{٤}$أ$^{٢}$ + ٤أ$^{٢}$ = ١

∴ $\frac{٢٥}{٤}$أ$^{٢}$ = ١ ∴ أ$^{٢}$ = $\frac{٤}{٢٥}$

∴ أ = $\frac{٢}{٥}$ ∴ ب$\left(\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$

∴ جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $-\frac{٣}{٤}$

**٥**

(١) جا ٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠° + جا ٢٧٠°

= ٠ + ١ + ٠ − ١ = ٠

(٢) ظا ٠° + ظا ٤٥° + ظا ١٨٠° = ٠ + ١ + ٠ = ١





(٣) جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظتا ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ − ١ = ٠

(٤) ظا$^{٢}$ ٣٠° + ٢ جا$^{٢}$ ٤٥° + جتا$^{٢}$ ٩٠°

= $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ + ٢$\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ + ٠ = $\frac{١}{٣}$ + ١ = $\frac{٤}{٣}$

(٥) جا ١٨٠° جتا ٤٥° − جتا ١٨٠° جا ٤٥°

= ٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − (−١) × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٦) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

= قا ٣٠° ظا ٦٠° − ظتا ٦٠° جتا ٣٠°

= $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٧) جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا ٠° + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$

= جتا ٩٠° × جتا ٠° + جا ٢٧٠° × جا ٩٠°

= ٠ × ١ + (−١) × ١ = −١

(٨) $\frac{ظا^{٢} ٦٠° − ظتا^{٢} ٤٥°}{قا^{٢} ٣٠° − قتا^{٢} ٤٥°}$ = $\frac{(\sqrt{٣})^{٢} − (١)^{٢}}{\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} − (\sqrt{٢})^{٢}}$

= $\frac{٣ − ١}{\frac{٤}{٣} − ٢}$ = −٣

(٩) $\frac{٤ جا^{٢} ٣٠° − ٢ ظا ٤٥° جتا ٠°}{٢ جتا ٦٠° + ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°}$

= $\frac{٤ × \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} − ٢ × ١ × ١}{٢ × \frac{١}{٢} + ٢ × \frac{١}{\sqrt{٢}} × \frac{١}{\sqrt{٢}}}$ = $\frac{١ − ٢}{١ + ١}$ = −١

(١٠) ٢ جا ٣٠° جا$^{٢}$ ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا$^{٢}$ ٤٥°

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ − ١ × ٢ + (−١) × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

= $-\frac{١١}{٨}$

**٦**

(١) الطرف الأيمن = ٢ × (١)$^{٢}$ = ٢

، الطرف الأيسر = −٢ × (−١) = ٢

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٢) الطرف الأيمن = جتا ٩٠° = ٠ ،

، الطرف الأيسر = جتا$^{٢}$ ٤٥° − جا$^{٢}$ ٤٥°

= $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ − $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = ٠

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٣) الطرف الأيمن = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١

= ١ = الطرف الأيسر.

(٤) الطرف الأيمن = ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\sqrt{٣}$ − ٢ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$

= $\frac{٩}{٢}$ − ٤ = $\frac{١}{٢}$ = الطرف الأيسر.

(٥) الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ × ١

= $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{١}{٣}$ × ١ = $\frac{١}{٤}$

= الطرف الأيسر.

(٦) الطرف الأيمن = ٣ (١)$^{٢}$ − ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

، الطرف الأيسر = $\frac{٣}{٢}$ × ١ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٧) الطرف الأيمن = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\sqrt{٣}$ + $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ − (١)$^{٢}$

= ٢ + $\frac{٤}{٣}$ − ١ = $\frac{٧}{٣}$

= الطرف الأيسر.

(٨) الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

، الطرف الأيسر = جا$^{٢}$ ٤٥° = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٩) الطرف الأيمن = ٣ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ + $\frac{٤}{٣}$ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

− $\frac{١}{٤}$ (١)$^{٢}$ (٢)$^{٢}$ = ٣ × $\frac{١}{٣}$

+ $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ × ١ × ٤

= ١ + ١ − ١ = ١

= الطرف الأيسر.

(١٠) الطرف الأيمن = ٢ جتا$^{٢}$ ٦٠° + ٣ جا$^{٢}$ ٤٥°

+ ٤ ظا$^{٢}$ ٦٠° − ٤ جا ٩٠°

$= ٢\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

$+ ٤\left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٤ \times ١$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + ١٢ - ٤ = ١٠$

= الطرف الأيسر.

(١١) الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣} - \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ + \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٣}}{١ + ١}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}} =$ ظا ٣٠°

= الطرف الأيسر.

(١٢) الطرف الأيمن = $\frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

$= \frac{\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}} = ١$

= جا ٩٠° = الطرف الأيسر.

**٧**

(١) ∵ س جا$^{٢}$ ٤٥° جتا ١٨٠° = ظا$^{٢}$ ٦٠° جا ٢٧٠°

∴ س × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × (−١) = $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ × (−١)

∴ −$\frac{١}{٢}$س = −٣ ∴ س = ٦

(٢) ∵ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٣٠° = ظا$^{٢}$ ٤٥° − جتا$^{٢}$ ٦٠°

∴ س × $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٣} = (١)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

**٨**

(١) ∵ جتا س = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} \div ١\right)$ − صفر

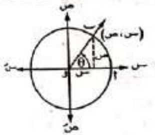
∴ جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

(٢) ∵ جا س = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا س = $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

∴ س = ٩٠°

**٩**



(١) س = جتا θ = ٠,٦

، ص = جا θ

حيث ص > ٠

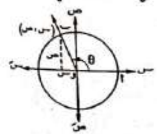
∴ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ٠,٣٦ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ ص$^{٢}$ = ٠,٦٤

∴ ص = ٠,٨ ∴ ب (٠,٦ ، ٠,٨)

∴ جتا θ = ٠,٦ ، جا θ = ٠,٨ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$



(٢) س = جتا θ

حيث س < ٠

، ص = جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

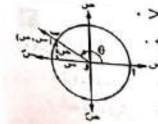
∴ س$^{٢}$ + $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = ١

∴ س$^{٢}$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ س = −$\frac{٥}{١٣}$

∴ ب $\left(-\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

∴ جتا θ = −$\frac{٥}{١٣}$ ، جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا θ = −$\frac{١٢}{٥}$

، قا θ = −$\frac{١٣}{٥}$ ، قتا θ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، ظتا θ = −$\frac{٥}{١٢}$



(٣) س = جتا θ حيث س < ٠

، ص = جا θ حيث ص > ٠

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = −$\frac{٣}{٤}$

∴ ص = −$\frac{٣}{٤}$ س

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١





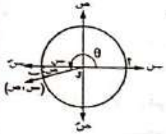
∴ س$^{٢}$ + $\frac{٩}{١٦}$ س$^{٢}$ = ١ ∴ $\frac{٢٥}{١٦}$ س$^{٢}$ = ١

∴ س$^{٢}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$ ∴ س = −$\frac{٤}{٥}$

∴ ص = −$\frac{٣}{٤}$ × −$\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ب $\left(-\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

∴ جتا θ = −$\frac{٤}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = −$\frac{٣}{٤}$

، قا θ = −$\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = −$\frac{٤}{٣}$



(٤) قتا θ = $\frac{١}{ص}$ = −$\frac{٢٥}{٧}$

∴ ص = −$\frac{٧}{٢٥}$

، س < ٠

∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

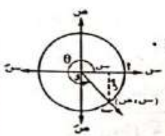
∴ س$^{٢}$ + $\frac{٤٩}{٦٢٥}$ = ١

∴ س$^{٢}$ = $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ ∴ س = −$\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ب $\left(-\frac{٢٤}{٢٥} ، -\frac{٧}{٢٥}\right)$

∴ جتا θ = −$\frac{٢٤}{٢٥}$ ، جا θ = −$\frac{٧}{٢٥}$ ، ظا θ = $\frac{٧}{٢٤}$

، قا θ = −$\frac{٢٥}{٢٤}$ ، قتا θ = −$\frac{٢٥}{٧}$ ، ظتا θ = $\frac{٢٤}{٧}$



(٥) قا θ = $\frac{١}{س}$ = ٢

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ، ص < ٠

∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ $\frac{١}{٤}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ص$^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ص = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ب $\left(\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جا θ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ظا θ = −$\sqrt{٣}$ ، قا θ = ٢ ، قتا θ = −$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، ظتا θ = −$\frac{١}{\sqrt{٣}}$

**١٠**

∵ ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ ∴ كل من ٢ أ ، ٣ أ موجبة

أى أن : أ > ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ (٢ أ)$^{٢}$ + (٣ أ)$^{٢}$ = ١

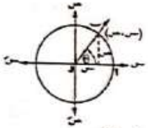
∴ ١٣ أ$^{٢}$ = ١ ∴ أ = $\frac{١}{\sqrt{١٣}}$

∴ النقطة هى $\left(\frac{٢}{\sqrt{١٣}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٣}}\right)$

∴ قا θ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ ، ظا θ = $\frac{٣}{٢}$

∴ قا$^{٢}$ θ − ظا$^{٢}$ θ = $\frac{١٣}{٤} - \frac{٩}{٤}$ = ١

**١١**



س = جتا θ = $\frac{٣}{٥}$

، ص = جا θ ، ص > ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ $\frac{٩}{٢٥}$ + ص$^{٢}$ = ١ ∴ ص$^{٢}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

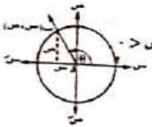
∴ ص = $\frac{٤}{٥}$ ∴ ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

∴ قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

∴ قا θ جا θ − ظا θ قتا θ = ١ − $\frac{٤}{٣} \times \frac{٥}{٤}$

= ١ − $\frac{٥}{٣}$ = −$\frac{٢}{٣}$

**١٢**



ص = جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

، ∵ س = جتا θ حيث س < ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ س$^{٢}$ + $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = ١

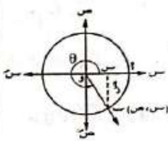
∴ س$^{٢}$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ س = −$\frac{٥}{١٣}$ ∴ ب $\left(-\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

∴ قا θ جا θ − ظا θ ظتا θ + جتا$^{٢}$ θ

= ١ − ١ + $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$

**١٣**




ص = جا θ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$

، س = جتا θ ، س > ٠

، ∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ س$^{٢}$ + $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ = ١

∴ س$^{٢}$ = $\frac{٤٩}{٦٢٥}$

∴ س = جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ ∴ ب $\left(\frac{٧}{٢٥} ، \frac{-٢٤}{٢٥}\right)$

(١) $\frac{\text{ظا } θ - \text{قا } θ}{\text{ظا } θ - \text{قا } θ} = \frac{-\frac{٧}{٢٤} - \left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)}{-\frac{٢٤}{٧} - \frac{٢٥}{٧}} = \frac{-٣}{٢٨}$

(٢) جتا θ − قتا θ ظا θ = $\frac{٧}{٢٥} - \left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right) \times \frac{-٢٤}{٧} = \frac{-٥٧٦}{١٧٥}$

---

**١٤**

إجابة أحمد هى الصحيحة لأنه قام بالتعويض مباشرة.

---

**١٥** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (ب) (٦) (جـ)

(٧) أولًا : (د) ثانيًا : (ب) ثالثًا : (ب)

(٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ)

(١٢) (جـ)

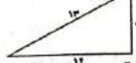
**إرشادات لحل رقم ١٥**

(١) ∵ طول ($\widehat{\text{ب حـ}}$) = $\frac{١}{٢}$ π

∴ ق ($\widehat{\text{ب حـ}}$) = $\frac{\frac{١}{٢}π}{٢π} \times ٣٦٠° = ٦٠°$

∴ قا (∠ ب و حـ) = $\frac{١}{\text{جتا } ٦٠°} = \frac{١}{\left(\frac{١}{٢}\right)} = ٢$

(٢) ∵ أ هى أكبر قياس لزاوية حادة فى مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣




، ∵ (١٣)$^{٢}$ = (٥)$^{٢}$ + (١٢)$^{٢}$

∴ المثلث قائم الزاوية ∴ ظتا أ = $\frac{٥}{١٢}$

(٣) ∵ (س + ١) هو أكبر ضلع.

∴ (س + ١) هو وتر المثلث القائم.

∴ (س + ١)$^{٢}$ = (س)$^{٢}$ + (س − ٧)$^{٢}$

∴ س$^{٢}$ + ٢ س + ١ = س$^{٢}$ + س$^{٢}$ − ١٤ س + ٤٩

∴ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٤٨ = ٠

∴ (س − ١٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ٤

(مرفوض لأن س − ٧ = −٣)

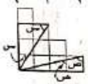
∴ أطوال الأضلاع هى ٥ ، ١٢ ، ١٣

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ هو أصغر ضلع

∴ ب حـ = ٥ سم

∴ قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}} = \frac{١}{\left(\frac{١٢}{١٣}\right)} = \frac{١٣}{١٢}$

(٤) ظتا س + ظتا ص + ظتا ع = $\frac{١}{١} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١١}{٦}$




(٥) ظا س = $\frac{٣}{٢}$

، ظتا ص = $\frac{١}{٤}$

∴ ظا س + ظتا ص = $\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٤}$

(٦) أ و = $\sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، و ب = $\sqrt{(-١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، أ ب = $\sqrt{(١ + ١)^{٢} + (\sqrt{٣} - \sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

∴ Δ أ و ب هو مثلث متساوى الأضلاع

∴ ظتا (∠ أ و ب) = $\frac{١}{\text{ظا } ٦٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٧) أولًا : ∵ الدائرة هى دائرة وحدة

∴ أ و = ١ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\text{و ب}}$ ∴ و ب = قا θ

ثانيًا : ب حـ = ب و − و حـ = قا θ − ١

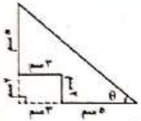
ثالثًا : مساحة المثلث أ ب و = $\frac{١}{٢}$ أ و × أ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ظا θ

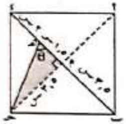




(٨) ظتا θ = $\frac{٥ + ٣}{٥ + ٢} = \frac{٨}{٧}$




(٩) نرسم $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}}$ = {م}




، ∵ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٢}{٥}$

∴ ء هـ = ٢ س

، هـ ب = ٥ س

∴ ب ء = ٧ س

، ∵ أ ب حـ ء مربع

∴ أ حـ = ب ء = ٧ س

، حـ م = ٣,٥ س ، م هـ = ١,٥ س

فى Δ حـ م هـ القائم فى م : ظا θ = $\frac{٣,٥ \text{ س}}{١,٥ \text{ س}} = \frac{٧}{٣}$

(١٠) ∵ ∠ أ ء ب خارجة عن المثلث أ ء حـ

∴ ق (∠ ء أ حـ) + ق (∠ ء حـ أ) = θ

، ∵ ء أ = ء حـ ∴ ق (∠ حـ) = $\frac{θ}{٢}$

فى Δ أ ب ء : ق (∠ ب) = ٩٠° ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

∴ أ ب = ٤ س ، ب ء = ٣ س

∴ أ ء = $\sqrt{(٤ \text{ س})^{٢} + (٣ \text{ س})^{٢}}$ = ٥ س

∴ ء أ = ء حـ = ٥ س

فى Δ أ ب حـ : ظتا $\frac{θ}{٢} = \frac{٣ \text{ س} + ٥ \text{ س}}{٤ \text{ س}} = ٢$

(١١) فى Δ أ ب ء القائم فى ء :

ظا ب = $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{٦}{\text{ب ء}}$

، فى Δ أ ء حـ القائم الزاوية فى ء

ظا حـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٦}{\text{ء حـ}}$

∴ ظا ب + ظا حـ = $\frac{٦}{\text{ب ء}} + \frac{٦}{\text{ء حـ}}$

= $\frac{٦ (\text{ء حـ} + \text{ب ء})}{\text{ب ء . ء حـ}} = \frac{٦ \text{ ب حـ}}{\text{ب ء . ء حـ}}$

، ∵ (أ ء)$^{٢}$ = ب ء × ء حـ

∴ ب ء × ء حـ = ٣٦

∴ ظا ب + ظا حـ = $\frac{٦ (\text{ب حـ})}{٣٦} = \frac{\text{ب حـ}}{٦}$

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{٦} = \frac{٥}{٣}$ ∴ ب حـ = ١٠

(١٢) ∵ ميل الخط المستقيم = ٢

∴ ظا θ = ٢




فى Δ أ ب حـ القائم فى ب

∴ أ حـ = $\sqrt{(٢)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٥}$

∴ جا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

## إرشادات تمارين 10

**١**

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (جـ)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (أ)

(١١) (ب) (١٢) (أ) (١٣) (د) (١٤) (ب) (١٥) (أ)

(١٦) (جـ) (١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (د) (٢٠) (د)

(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (جـ)

---

**٢**

(١) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(٢) قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

(٣) ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(٤) جتا (−١٥٠°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°)

= − جتا ٣٠° = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

(٦) قا $\frac{١١ π}{٦}$ = قا $\left(\frac{١٢ π}{٦} - \frac{π}{٦}\right)$

= − قا $\frac{π}{٦}$ = −٢

(٧) ظتا ٧٨٠° = ظتا (٧٢٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٨) جتا (-٩٠٠°) = جتا (-٩٠٠° + ٢ × ٣٦٠°)

= جتا ١٨٠° = -١

(٩) جا (-٤π/٣) = -جا (٤π/٣) = -جا (π + π/٣)

= جا π/٣ = √٣/٢

(١٠) قا (-٢π/٣) = قا (-٢/٣ × ١٨٠°)

= قا (-١٢٠°) = قا ١٢٠°

= قا (١٨٠° - ٦٠°) = -قا ٦٠°

= -٢

(١١) قا (-٤٨٠°) = قا ٤٨٠° = قا (٣٦٠° + ١٢٠°)

= قا ١٢٠° = قا (١٨٠° - ٦٠°)

= -قا ٦٠° = -٢

(١٢) جا (-٧π/٤) = جا (-٧ × ١٨٠°/٤) = جا -٣١٥°

= جا (-٣١٥° + ٣٦٠°)

= جا ٤٥° = ١/√٢

**٣**

(١) جتا ١٢٠° + ظا ٢٢٥° + قا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠°

= جتا (١٨٠° - ٦٠°) + ظا (١٨٠° + ٤٥°)

+ قا (٣٦٠° - ٣٠°) + جتا (٣٦٠° + ٦٠°)

= -جتا ٦٠° + ظا ٤٥° - قا ٣٠° + جتا ٦٠°

= -١/٢ + ١ - ٢ + ١/٢ = -١

(٢) جا ٣٩٠° جتا (-٦٠°) + جتا ٣٠° جا ١٢٠°

= جا (٣٦٠° + ٣٠°) جتا ٦٠°

+ جتا ٣٠° جا (١٨٠° - ٦٠°)

= جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

= ١/٢ × ١/٢ + √٣/٢ × √٣/٢ = ١/٤ + ٣/٤ = ١

(٣) ∵ جتا ٩٣٠° = جتا (٢ × ٣٦٠° + ٢١٠°) = جتا ٢١٠°

= جتا (١٨٠° + ٣٠°) = -جتا ٣٠°

∴ جا ١٥٠° جتا (-٣٠٠°) - جتا ٣٠° ظتا ٢٤٠°

= جا (١٨٠° - ٣٠°) جتا (٣٦٠° - ٦٠°)

- جتا ٣٠° ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

= جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا ٣٠° ظتا ٦٠°

= ١/٢ × ١/٢ - √٣/٢ × ١/√٣ = -١/٤

(٤) ظا ٢π/٣ قا ١١π/٣ + ظتا ١١π/٦ قتا ١٩π/٦

+ ظا ٢٥π/٦ قا (-١٩π/٣)

= ظا (π - π/٣) قا (١٢π/٣ - π/٣)

+ ظتا (١٢π/٦ - π/٦) قتا (١٢π/٦ + ٧π/٦)

+ ظا (٢٤π/٦ + π/٦) قا (-١٨π/٣ - π/٣)

= -ظا π/٣ قا π/٣ - ظتا (π/٦) قتا (π + ١/٦ π)

- ظا π/٦ قا (π/٣)

= -ظا π/٣ قا π/٣ + ظتا π/٦ قتا π/٦ - ظا π/٦ قا π/٣

= -√٣ × ٢ + √٣ × ٢ - ١/√٣ × ٢/√٣ = -٢/٣

**٤**

(١) جتا (-٣٠٠°) = جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° - ٦٠°)

= جتا ٦٠° = ١/٢

، جا ٤٢٠° = جا (٦٠° + ٣٦٠°) = جا ٦٠° = √٣/٢

، جتا ٧٥٠° = جتا (٣٠° + ٣٦٠° × ٢) = جتا ٣٠° = √٣/٢

، جتا ٦٦٠° = جتا (٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٣٠٠°

= جتا (٣٦٠° - ٦٠°) = جتا ٦٠° = ١/٢

∴ الطرف الأيمن = ١/٢ × √٣/٢ - √٣/٢ × ١/٢

= صفر = الطرف الأيسر.

(٢) جا ٦٠٠° = جا (٣٦٠° + ٢٤٠°) = جا ٢٤٠°

= جا (١٨٠° + ٦٠°) = -جا ٦٠°

= -√٣/٢





، جتا (-٣٠°) = جتا ٣٠° = √٣/٢

، جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = ١/٢

، جتا (-٢٤٠°) = جتا ٢٤٠° = جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= -جتا ٦٠° = -١/٢

∴ الطرف الأيمن = -√٣/٢ × √٣/٢ + ١/٢ × (-١/٢)

= -١ = الطرف الأيسر.

(٣) جا ٤٨٠° = جا (٣٦٠° + ١٢٠°) = جا ١٢٠°

= جا (١٨٠° - ٦٠°) = جا ٦٠° = √٣/٢

، جتا (-٦٠°) = جتا ٦٠° = ١/٢

، جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° - ٦٠°) = جتا ٦٠° = ١/٢

، جا (-١٢٠°) = -جا ١٢٠° = -جا (١٨٠° - ٦٠°)

= -جا ٦٠° = -√٣/٢

∴ الطرف الأيمن = √٣/٢ × ١/٢ + ١/٢ × -√٣/٢

= √٣/٤ - √٣/٤ = صفر

= الطرف الأيسر.

(٤) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = ١/٢

، ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

، جتا ٣١٥° = جتا (٣٦٠° - ٤٥°) = جتا ٤٥° = ١/√٢

، قا (-١٢٠°) = قا ١٢٠° = قا (١٨٠° - ٦٠°)

= -قا ٦٠° = -٢

، جا (-١٣٥°) = -جا ١٣٥° = -جا (١٨٠° - ٤٥°)

= -جا ٤٥° = -١/√٢

، قتا ٢١٠° = قتا (١٨٠° + ٣٠°) = -قتا ٣٠° = -٢

∴ الطرف الأيمن

= ١/٢ × ١ + ١/√٢ × (-٢) + (-١/√٢) × (-٢)

= ١/٢ - ٢/√٢ + ٢/√٢ = ١/٢ = الطرف الأيسر.

**٥**

جا θ = ٤/٥ ، جتا θ = -٣/٥

(١) جا (١٨٠° + θ) = -جا θ = -٤/٥

(٢) جتا (π/٢ - θ) = جتا (٩٠° - θ) = جا θ = ٤/٥

(٣) ظا (٣٦٠° - θ) = -ظا θ = -(٤/٥)/(-٣/٥) = ٤/٣

(٤) قا (٣π/٢ - θ) = قا (٢٧٠° - θ) = -قتا θ = ٥/٤

(٥) قا (θ + π) = قا (θ + ١٨٠°) = -قا θ = ٥/٣

(٦) جا (θ - π) = جا (θ - ١٨٠°) = جا (١٨٠° + θ)

= -جا θ = -٤/٥

**٦**

جا θ = ٢/٣ ، جتا θ = √٥/٣

(١) جا (٢٧٠° + θ) = -جتا θ = -√٥/٣

(٢) قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ = ٣/٢

(٣) قتا (θ + π/٢) = قتا (θ + ٩٠°) = قا θ = ٣/√٥

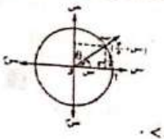
(٤) ظا (π/٢ - θ) = ظا (٩٠° - θ) = ظتا θ

= (√٥/٣)/(٢/٣) = √٥/٢

(٥) ظتا (θ - ١٨٠°) = ظتا θ = √٥/٢

(٦) قا (-θ) = قا θ = ٣/√٥

**٧**



∵ س٢ + ص٢ = ١

∴ س٢ + ٩/٢٥ = ١

∴ س٢ = ١٦/٢٥

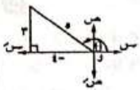
∴ س = ٤/٥ حيث س > ٠

∴ ب (٤/٥ ، ٣/٥)

∴ جا (٩٠° - θ) + ظا (٩٠° - θ) جتا (٩٠° + θ)

= جتا θ + ظتا θ (-جا θ) = ٤/٥ + ٤/٣ × -٣/٥ = صفر

**٨**



جا θ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ θ تقع فى الربع الثانى

(١) جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ = −(−$\frac{٤}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$

(٢) ظا (١٨٠° + θ) = ظا θ = $\frac{-٣}{٤}$

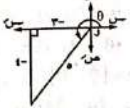
(٣) قتا (−θ) = − قتا θ = −($\frac{٥}{٣}$) = −$\frac{٥}{٣}$

(٤) ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ = −($\frac{-٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٣}$

(٥) جا (٩٠° − θ) = جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$

(٦) جا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ = −($\frac{-٤}{٥}$) = $\frac{٤}{٥}$

**٩**



جتا θ = −$\frac{٣}{٥}$

، ∵ ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

∴ θ تقع فى الربع الثالث

(١) قا (١٨٠° + θ) = − قا θ = $\frac{٥}{٤}$

(٢) قا (− θ) = قا θ = −$\frac{٥}{٣}$

(٣) ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ = −$\frac{٤}{٣}$

(٤) ظتا (θ − ٩٠°) = − ظتا (٩٠° − θ)

= − ظا θ = −$\frac{٤}{٣}$

(٥) قا (٩٠° + θ) = − قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

(٦) ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

**١٠**

(١) ∵ جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ − ٥°)

∴ ٣ θ + ١٥° + ٢ θ − ٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٨٠° ، ∴ θ = ١٦°

(٢) ∵ قا (θ + ٢٥°) = قتا (θ + ١٥°)

∴ θ + ٢٥° + θ + ١٥° = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٤٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٥٠° ∴ θ = ٢٥°

(٣) ∵ ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

∴ θ + ٢٠° + ٣ θ + ٣٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ + ٥٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ = ٤٠° ∴ θ = ١٠°

(٤) ∵ جتا ($\frac{θ + ٢٠°}{٢}$) = جا ($\frac{θ + ٤٠°}{٢}$)

∴ $\frac{θ + ٢٠°}{٢}$ + $\frac{θ + ٤٠°}{٢}$ = ٩٠°

∴ θ + ٢٠° + θ + ٤٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ + ٦٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠° ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ١٨° ٢٤َ) = ظتا (θ + ٦٠° ٥٢َ)

∴ θ + ١٨° ٢٤َ + θ + ٦٠° ٥٢َ = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٧٠° ٢٤َ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٩° ٣٦َ ∴ θ = ٩° ٤٣َ

**١١**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) (د) | (٢) (أ) | (٣) (د) | (٤) (جـ) |
| (٥) (جـ) | (٦) (ب) | (٧) (ب) | (٨) (ب) |

**١٢**

(١) ∵ جا ٢ θ = جتا θ

∴ ٢ θ ± θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

∴ إما ٢ θ + θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها ٣ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{٢\pi}{٣}$ ن

أ، ٢ θ − θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ الحل العام هو : $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{٢\pi}{٣}$ ن أ، $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن





(٢) ∵ جتا ٥ θ = جا θ

∴ جا θ = جتا ٥ θ

∴ θ ± ٥ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ إما θ + ٥ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها ٦ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = $\frac{\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$ ن

أ، θ − ٥ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

ومنها −٤ θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ θ = −$\frac{\pi}{٨}$ − $\frac{\pi}{٢}$ ن

∴ الحل العام هو :

$\frac{\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$ ن أ، −$\frac{\pi}{٨}$ − $\frac{\pi}{٢}$ ن

**١٣**

(١) ∵ قتا (θ + ١٥°) = قا ٤٢°

∴ (θ + ١٥°) ± (٤٢°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ١٥° + ٤٢° = ٩٠° ∴ θ = ٣٣°

(٢) ∵ جا (θ + ٣٠°) = جتا θ

∴ (θ + ٣٠°) ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ٣٠° + θ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٦٠° ∴ θ = ٣٠°

(٣) ∵ جا θ = جتا θ ∴ θ ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

(٤) ∵ قتا (θ − $\frac{\pi}{٦}$) = قا θ

∴ (θ − $\frac{\pi}{٦}$) ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ − ٣٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠° ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ٢٧°) = ظتا ٢ θ

∴ (θ + ٢٧°) + (٢ θ) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ٢٧° + ٢ θ = ٩٠°

∴ ٣ θ = ٦٣° ∴ θ = ٢١°

أ، θ + ٢٧° + ٢ θ = ٢٧٠°

∴ ٣ θ = ٢٤٣° ∴ θ = ٨١°

(٦) ∵ ظا (θ + ١٠°) = ظتا (٤ θ − ١٠°)

∴ (θ + ١٠°) + (٤ θ − ١٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ١٠° + ٤ θ − ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٩٠° ∴ θ = ١٨°

أ، ٥ θ = ٢٧٠° ∴ θ = ٥٤°

أ، ٥ θ = ٤٥٠° ∴ θ = ٩٠°

(٧) ∵ قا (٢ θ + ٣٥°) = قتا (٣ θ − ١٠°)

∴ قتا (٣ θ − ١٠°) = قا (٢ θ + ٣٥°)

∴ (٣ θ − ١٠°) ± (٢ θ + ٣٥°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٦٥° ∴ θ = ١٣°

أ، ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥°

= ٩٠° + ٣٦٠° = ٤٥٠°

∴ ٥ θ = ٤٢٥° ∴ θ = ٨٥°

(٨) ∵ قا θ = قتا (٣ θ − ٩٠°)

∴ قتا (٣ θ − ٩٠°) = قا θ

∴ (٣ θ − ٩٠°) ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ٩٠° + θ = ٩٠°

∴ ٤ θ = ١٨٠° ∴ θ = ٤٥°

أ، ٣ θ − ٩٠° − θ = ٩٠° ∴ ٢ θ = ١٨٠°

∴ θ = ٩٠° (مرفوض)

(٩) ∵ جا (٤ θ + ٤٨°) = جتا (θ − ٣٣°)

∴ (٤ θ + ٤٨°) ± (θ − ٣٣°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٤ θ + ٤٨° + θ − ٣٣° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٥° = ٩٠° ∴ θ = ١٥°

أو ٥ $\theta$ + ١٥° = ٤٥٠° ∴ $\theta$ = ٨٧°

أو ٤ $\theta$ + ٤٨° − $\theta$ + ٣٣° = ٩٠°

∴ ٣ $\theta$ + ٨١° = ٩٠° ∴ $\theta$ = ٣°

(١٠) ∵ قا ٨ $\theta$ = قتا ٢ $\theta$

∴ (٨ $\theta$) ± (٢ $\theta$) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٨ $\theta$ + ٢ $\theta$ = ٩٠°

∴ ١٠ $\theta$ = ٩٠° ∴ $\theta$ = ٩°

أو ١٠ $\theta$ = ٤٥٠° ∴ $\theta$ = ٤٥°

أو ١٠ $\theta$ = ٨١٠° ∴ $\theta$ = ٨١°

أو ٨ $\theta$ − ٢ $\theta$ = ٩٠°

∴ ٦ $\theta$ = ٩٠° ∴ $\theta$ = ١٥°

أو ٦ $\theta$ = ٤٥٠° ∴ $\theta$ = ٧٥°

**١٤**

(١) ∵ ظا $\theta$ − ١ = ٠ ∴ ظا $\theta$ = ١

، ∵ ظا موجبة فى الربع الأول والثالث

∴ $\theta$ = ٤٥° أو $\theta$ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

، ∵ $\theta$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ ∴ $\theta$ = ٤٥°

(٢) ∵ ٢ جتا $\theta$ − ١ = ٠ ∴ جتا $\theta$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ $\theta$ = ٦٠° أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

، ∵ $\theta$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ ∴ $\theta$ = ٦٠°

(٣) ∵ ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ١

∴ جتا (٩٠° − $\theta$) = $\frac{١}{٢}$ ∴ جا $\theta$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ جا موجبة فى الربع الأول والثانى

∴ $\theta$ = ٣٠° أو $\theta$ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

، ∵ $\theta$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ ∴ $\theta$ = ٣٠°

(٤) ∵ ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = $\sqrt{٣}$

∴ جا (٩٠° − $\theta$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ جتا $\theta$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ $\theta$ = ٣٠° أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

، ∵ $\theta$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ ∴ $\theta$ = ٣٠°

**١٥**

(١) جتا $\theta$ = −$\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أو $\theta$ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ مجموعة الحل = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٢) قا $\theta$ = $\sqrt{٢}$ ∴ جتا $\theta$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥°

∴ $\theta$ = ٤٥° أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {٤٥° ، ٣١٥°}

(٣) جا $\theta$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثانى.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ٦٠° أو $\theta$ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∴ مجموعة الحل = {٦٠° ، ١٢٠°}

(٤) جتا $\theta$ = −١ ∴ مجموعة الحل = {١٨٠°}

(٥) جا $\theta$ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٢٤٠° ، ٣٠٠°}





(٦) ظا $\theta$ = −١ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها = ١ هى ٤٥°

∴ $\theta$ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {١٣٥° ، ٣١٥°}

(٧) قتا $\theta$ = −$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ جا $\theta$ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٨) جا² $\theta$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ جا $\theta$ = ±$\frac{١}{٢}$

∴ جا $\theta$ = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∴ $\theta$ = ٣٠° أو $\theta$ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

أو جا $\theta$ = −$\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ $\theta$ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

أو $\theta$ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

∴ مجموعة الحل = {٣٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

**١٦**

∵ جتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا (٢٧٠° − $\theta$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ − جا $\theta$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا $\theta$ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ جا (٩٠° + $\theta$) = $\frac{١}{٢}$

∴ جتا $\theta$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ جا سالبة و جتا موجبة ∴ $\theta$ تقع فى الربع الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta$ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

**١٧**

∵ جا (٢ $\theta$ + ١٥°) = جتا ($\theta$ + ٣٠°)

∴ (٢ $\theta$ + ١٥°) ± ($\theta$ + ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ $\theta$ + ١٥° + $\theta$ + ٣٠° = ٩٠°

∴ ٣ $\theta$ + ٤٥° = ٩٠° ∴ ٣ $\theta$ = ٤٥°

∴ $\theta$ = ١٥°

∴ قتا² ٢ $\theta$ + ظا² ٣ $\theta$ + قا² ٤ $\theta$

= قتا² ٣٠° + ظا² ٤٥° + قا² ٦٠° = ٤ + ١ + ٤ = ٩

**١٨**

∵ $\frac{\text{ظا}(٣\theta - ٢٥°)}{\text{ظتا}(٢\theta - ٣٥°)}$ = ١

∴ ظا (٣ $\theta$ − ٢٥°) = ظتا (٢ $\theta$ − ٣٥°)

∴ (٣ $\theta$ − ٢٥°) + (٢ $\theta$ − ٣٥°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ $\theta$ − ٢٥° + ٢ $\theta$ − ٣٥° = ٩٠°

∴ ٥ $\theta$ = ١٥٠° ∴ $\theta$ = ٣٠°

∴ $\frac{\text{ظا } ١٨°}{\text{ظتا } ٧٢°}$ + جا (١٨٠° − $\theta$)

= $\frac{\text{ظتا } ٧٢°}{\text{ظتا } ٧٢°}$ + جا $\theta$ = ١ + جا ٣٠° = ١ $\frac{١}{٢}$

**١٩**

∵ $\frac{\text{ظا }\theta}{\text{ظتا } ٢\theta}$ = ١ ∴ ظا $\theta$ = ظتا ٢ $\theta$

∴ $\theta$ + ٢ $\theta$ = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ $\theta$ + ٢ $\theta$ = ٩٠° ∴ ٣ $\theta$ = ٩٠°

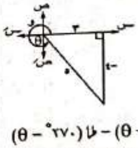
∴ $\theta$ = ٣٠°

∴ جا (١٨٠° − ٣θ) جتا (٣٦٠° − ٢θ)
+ ظا ٢θ ظتا (θ − ١٨٠°)
= جا (١٨٠° − ٩٠°) جتا (٣٦٠° − ٦٠°)
+ ظا ٦٠° ظتا (٣٠° − ١٨٠°)
= جا ٩٠° جتا ٦٠° + ظا ٦٠° ظتا (−١٥٠°)
= جتا ٦٠° − ظا ٦٠° ظتا ١٥٠°
= جتا ٦٠° − ظا ٦٠° ظتا (١٨٠° − ٣٠°)
= جتا ٦٠° + ظا ٦٠° ظتا ٣٠° = ١/٢ + √٣ × √٣ = ٣ ١/٢

**٢٠**

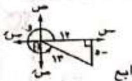
∵ ظا (θ − ١٥°) = ظتا (٢θ + ١٥°)
∴ (θ − ١٥°) + (٢θ + ١٥°) = ٩٠° + ١٨٠° ن
∴ θ − ١٥° + ٢θ + ١٥° = ٩٠°
∴ ٣θ = ٩٠°   ∴ θ = ٣٠°
∴ (١ + جا (٢٧٠° + ٢θ))/(١ + جا (٩٠° + ٢θ)) = (١ + جا (٢٧٠° + ٦٠°))/(١ + جا (٩٠° + ٦٠°))
= (١ − جتا ٦٠°)/(١ + جتا ٦٠°) = (١ − ١/٢)/(١ + ١/٢) = ١/٣

**٢١**



جتا θ = ٣/٥
، ∵ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°
∴ θ تقع فى الربع الرابع
∴ جا (١٨٠° − θ) + ظا (٩٠° − θ) − ظا (٢٧٠° − θ)
= جا θ + ظتا θ − ظتا θ = جا θ = −٤/٥

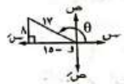
**٢٢**



جتا θ = ١٢/١٣ (موجبة)
∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع
، ∵ ٩٠° < θ < ٣٦٠°
∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ المقدار = ١٣ جا θ − ١٠ (١/√٢)² (√٣)²
+ ٥٠ جا (١٨٠° − ٣٠°)
= ١٣ × −٥/١٣ − ١٠ × ١/٢ × ٣ + ٥٠ جا ٣٠°
= −٥ − ١٥ + ٥٠ × ١/٢ = ٥

**٢٣**



ظا θ = −٨/١٥
، ∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°
∴ θ تقع فى الربع الثانى
∴ جا θ = ٨/١٧ ، جتا θ = −١٥/١٧ ، ظا θ = −٨/١٥
، قتا θ = ١٧/٨ ، قا θ = −١٧/١٥ ، ظتا θ = −١٥/٨
، ٢ جا θ جتا θ = ٢ × ٨/١٧ × −١٥/١٧ = −٢٤٠/٢٨٩
، قا (١٠٨٠° + θ) = قا (θ + ٣ × ٣٦٠°) = قا θ = −١٧/١٥

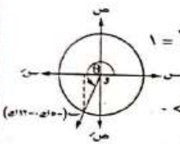
**٢٤**

∵ جا θ = √٢/٢ = ١/√٢
، ∵ θ ∈ ]٠ ، π/٢[   ∴ θ = ٤٥°
(١) (١ − ٢ ظا (٢٧٠° − θ))/(١ + جتا² (٢٧٠° + θ)) = (١ − ٢ ظا (٢٧٠° − ٤٥°))/(١ + جتا² (٢٧٠° + ٤٥°))
= (١ − ٢ ظا ٤٥°)/(١ + جا² ٤٥°) = (١ − ٢)/(١ + ١/٢) = −١/(٣/٢) = −٢/٣
(٢) الطرف الأيمن = جتا ٢θ = جتا ٩٠° = صفر
، الطرف الأيسر = (١ − ظا² (٢٧٠° − θ))/(قا² (٩٠° + θ))
= (١ − ظتا² θ)/(قتا² θ)
= (١ − ظتا² ٤٥°)/(قتا² ٤٥°) = (١ − ١)/٢
= صفر
∴ الطرفان متساويان.



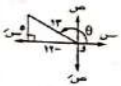


**٢٥**



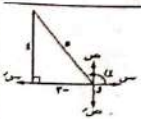
∵ س² + ص² = ١
∴ ٢٥ ك² + ١٤٤ ك² = ١
∴ ك² = ١/١٦٩
∴ ك = ١/١٣ حيث ك > ٠
∴ ب (−٥/١٣ ، −١٢/١٣)
∴ قا (٩٠° − θ) جا (٩٠° + θ) + ١٢ ظا (٢٧٠° + θ)
= قا θ جتا θ + ١٢ (− ظتا θ)
= − ١٣/٥ × −٥/١٣ − ١٢ × ٥/١٢ = ١ − ٥ = −٤

**٢٦**



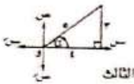
∵ ١٣ جا θ − ٥ = ٠
∴ جا θ = ٥/١٣
، ∵ θ ∈ ]π/٢ ، π[
∴ قا (٢٧٠° + θ) = − قا θ = −(−١٣/١٢) = ١٣/١٢
، جتا (θ − ٢٧٠°) = جتا (θ − ٢٧٠° + ٣٦٠°)
= جتا (٩٠° + θ) = − جا θ = −٥/١٣
، ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ = −(−١٢/٥) = ١٢/٥
، جا (٢٧٠° − θ) × قا (٢٧٠° + θ) × ظا (٢٧٠° + θ)
= − جتا θ × قا θ × − ظا θ
= ١٢/١٣ × ١٣/٥ × ٥/١٢ = ١ = جا ٩٠°

**٢٧**

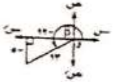


∵ جتا² α = ٩/٢٥
، ٩٠° < α < ١٨٠°
∴ α تقع فى الربع الثانى
∴ جتا α سالبة   ∴ جتا α = −٣/٥
∴ ٢٥ جا α − ٤ ظا α = ٢٥ × ٤/٥ − ٤ × −٣/٤
= ٢٠ + ٣ = ٢٣

**٢٨**

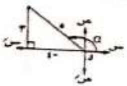


∵ ظا α = ٣/٤ (موجبة)
∴ α تقع فى الربع الأول أو الثالث
، ∵ α أصغر زاوية موجبة
∴ α تقع فى الربع الأول
∴ جا α = ٣/٥ ، جتا α = ٤/٥
، ظا α = ٣/٤ ، قا α = ٥/٤
، قتا α = ٥/٣ ، ظتا α = ٤/٣

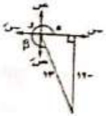


، ∵ ظا β = ٥/١٢
، ١٨٠° < β < ٢٧٠°
∴ β تقع فى الربع الثالث
∴ جا β = −٥/١٣ ، جتا β = −١٢/١٣ ، ظا β = ٥/١٢
، قتا β = −١٣/٥ ، قا β = −١٣/١٢ ، ظتا β = ١٢/٥
∴ جا α جتا β − جتا α جا β
= ٣/٥ × −١٢/١٣ − ٤/٥ × −٥/١٣ = −٣٦/٦٥ + ٢٠/٦٥ = −١٦/٦٥

**٢٩**

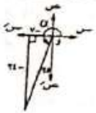


جا α = ٣/٥
، ∵ α ∈ ]π/٢ ، π[
∴ α تقع فى الربع الثانى



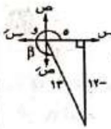
، جتا β = ٥/١٣
، ∵ β ∈ ]٣π/٢ ، ٢π[
∴ β تقع فى الربع الرابع
∴ جتا α جتا β + جا α جا β
= −٤/٥ × ٥/١٣ + ٣/٥ × −١٢/١٣ = −٢٠/٦٥ − ٣٦/٦٥ = −٥٦/٦٥

**٣٠**



جا α = −٢٤/٢٥
، ∵ ١٨٠° < α < ٢٧٠°
∴ α تقع فى الربع الثالث

، ظا β = $\frac{-١٢}{٥}$ (سالبة)




∴ β تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ β أكبر زاوية موجبة

، β ∈ ]٠° ، ٣٦٠°[

∴ β تقع فى الربع الرابع

(١) المقدار = − جا α − جتا β

= − $\frac{-٢٤}{٢٥}$ − $\frac{٥}{١٣}$ = $\frac{١٨٧}{٣٢٥}$

(٢) المقدار = − قتا α ظا β − قا α (− ظا β)

= − $\left(\frac{-٢٥}{٢٤}\right)\left(\frac{-١٢}{٥}\right) - \left(\frac{-٢٥}{٧}\right)\left(\frac{١٢}{٥}\right)$

= $\frac{-٥}{٢}$ + $\frac{٦٠}{٧}$ = $\frac{٨٥}{١٤}$

(٣) المقدار = قا α (− ظا β) (ظتا α) (− قا β)

= $\frac{٢٥}{-٧}\left(\frac{١٢}{٥}\right)\left(\frac{٧}{٢٤}\right)\left(\frac{-١٣}{٥}\right)$ = ٦ $\frac{١}{٢}$

**[٣١]**

∵ θ هى متممة (٩٠° − θ)

∴ θ تعين على دائرة الوحدة النقطة (ص ، $\frac{٥}{١٣}$)

∵ س² + ص² = ١ ∴ ص² + $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = ١

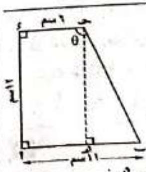
∴ ص² = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ ص = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ θ تعين النقطة ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$) على دائرة الوحدة

∴ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا θ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ظا θ = $\frac{٥}{١٢}$

، قا θ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، قتا θ = $\frac{١٣}{٥}$ ، ظتا θ = $\frac{١٢}{٥}$

**[٣٢]**




العمل : نرسم $\overline{حـ هـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

البرهان :

فى الشكل الرباعى أ ب حـ د :

ق (∠ب) = ١٨٠° − θ

فى Δ هـ ب حـ القائم الزاوية فى هـ :

ب حـ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = ١٣ سم

∴ جا ب = جا (١٨٠° − θ) = جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

**[٣٣]**

∵ ق (∠ أ ب هـ) = ق (∠ ب و حـ) بالتبادل

، ∵ ق (∠ أ ب هـ) = ١٨٠° − θ

∴ ق (∠ ب و حـ) = ١٨٠° − θ

فى Δ ب حـ و القائم الزاوية فى حـ :

ب و = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∴ قتا (∠ ب و حـ) = قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

**[٣٤]**

إجابة كريم صحيحة لأن : جا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ = جتا θ

**[٣٥]**

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (د) ، (٦) (د)

(٧) أولًا : (ب) ثانيًا : (أ)

(٨) (ب) (٩) (أ) (١٠) (جـ) (١١) (ب)

(١٢) (أ) (١٣) (ب) (١٤) (جـ) (١٥) (ب)

إرشادات لحل رقم **[٣٥]**

(١) ∵ جتا ٩٠° = صفر

∴ جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ٩٠°

× ... × جتا ١٣٥° = صفر

(٢) ∵ جا ٧٥° = جا (٩٠° − ١٥°) = جتا ١٥°

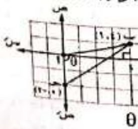
، جتا ١٢° = جتا (٩٠° − ٧٨°) = جا ٧٨°

∴ جا ٧٥° × جتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨°

= جتا ١٥° × جا ٧٨° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ١

(٣) أ ب = $\sqrt{(٤)^٢ + (١)^٢}$

= $\sqrt{١٧}$




، ∵ جا (∠ ب أ حـ)

جا (٩٠° + θ) = جتا θ

= $\frac{٤}{\sqrt{١٧}}$





(٤) $\frac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } ١° \times \text{قتا } ٢° \times ... \times \text{قتا } ٨٨° \times \text{قتا } ٨٩°}$

= $\frac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } (٩٠° - ٨٩°) \times \text{قتا } (٩٠° - ٨٨°) \times ... \times \text{قتا } (٩٠° - ٢°) \times \text{قتا } (٩٠° - ١°)}$

= $\frac{\text{قا } ١° \times \text{قا } ٢° \times ... \times \text{قا } ٨٨° \times \text{قا } ٨٩°}{\text{قتا } ٨٩° \times \text{قتا } ٨٨° \times ... \times \text{قا } ٢° \times \text{قا } ١°}$ = ١

(٥) $\frac{\text{جا } (٦٠\pi + θ) + \text{جتا } (٩٠\pi + θ)}{\text{جتا } \left(\frac{٥\pi}{٢} + θ\right) - \text{جا } \left(\frac{٩\pi}{٢} + θ\right)}$

= $\frac{\text{جا } (٣٠ (٢\pi) + θ) + \text{جتا } (٤٥ (٢\pi) + θ)}{\text{جتا } \left(٢\pi + \frac{١}{٢}\pi + θ\right) - \text{جا } \left(٤\pi + \frac{١}{٢}\pi + θ\right)}$

= $\frac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{\text{جتا } \left(\frac{١}{٢}\pi + θ\right) - \text{جا } \left(\frac{١}{٢}\pi + θ\right)}$

= $\frac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{- \text{جا } θ - \text{جتا } θ}$ = $\frac{\text{جا } θ + \text{جتا } θ}{-(\text{جا } θ + \text{جتا } θ)}$ = −١

(٦) $\frac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } ٤ س} + \frac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } ٥ س} = \frac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } (٧ س - ٣ س)}$

+ $\frac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } (٧ س - ٢ س)} = \frac{\text{جا } ٣ س}{\text{جتا } \left(\frac{\pi}{٢} - ٣ س\right)}$

+ $\frac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظتا } \left(\frac{\pi}{٢} - ٢ س\right)} = \frac{\text{جا } ٣ س}{\text{جا } ٣ س} + \frac{\text{ظا } ٢ س}{\text{ظا } ٢ س}$

= ١ + ١ = ٢

(٧) أولًا : ∵ س + ص = ٣٠°

∴ ٣ س + ٣ ص = ٩٠°

، ∵ س + ٢ ص = (٣ س + ٣ ص)

− (٢ س + ص) = ٩٠° − (٢ س + ص)

∴ ظا (س + ٢ ص) ظا (٢ س + ص)

= ظا (٩٠° − (٢ س + ص)) ظا (٢ س + ص)

= ظتا (٢ س + ص) ظا (٢ س + ص) = ١

ثانيًا : جا (٣ س + ٢ ص) + جا (٩ س + ٨ ص)

= جا (٣ س + ٣ ص − ص)

+ جا (٩ س + ٩ ص − ص)

= جا (٩٠° − ص) + جا (٢٧٠° − ص)

= جتا ص − جتا ص = صفر

(٨) د (هـ) + د $\left(هـ + \frac{\pi}{٢}\right)$ + د (هـ + π)

+ د $\left(هـ + \frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ... + د (هـ + ٩٩ π)

+ د $\left(هـ + \frac{١٩٩}{٢}\pi\right)$

= جا (٢ هـ) + جا (٢ هـ + π)

+ جا (٢ هـ + ٢ π) + جا (٢ هـ + ٣ π) + ...

+ جا (٢ هـ + ١٩٨ π) + جا (٢ هـ + ١٩٩ π)

= جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ) + جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ)

+ ... + جا (٢ هـ) − جا (٢ هـ) = صفر

(٩) ∵ جتا² θ = ١ ∴ جتا θ = ± ١

∴ جتا θ = ١

∴ θ = صفر أو ± ٢ π أو ± ٤ π ....

أو جتا θ = −١ ∴ θ = ± π أو ± ٣ π أو ± ٥ π ...

∴ θ = صفر أو ± π أو ± ٢ π أو ± ٣ π أو ...

= ن π حيث ن ∈ ص

(١٠) ظا س = − $\sqrt{٣}$

∴ س تنتمى للربع الثانى أو الربع الرابع

∴ يوجد حل للمعادلة كل نصف دوره

، ∵ ٠ ≤ س ≤ ١٥ π بها ٣٠ نصف دوره

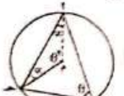
∴ عدد حلول المعادلة = ٣٠ حلًا

(١١) ∵ ٢ θ = ١٨٠° − ٢ α

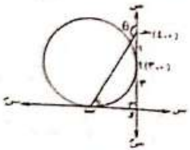
∴ ظا θ = ظا $\left(\frac{١٨٠° - ٢ α}{٢}\right)$

= ظا (٩٠° − α)

= ظتا α




(١٢)



∵ و أ = و ب = ٣ سم (قطعتان مماستان للدائرة)

فى $\Delta$ حـ و ب القائم فى و

∴ ب حـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ وحدة طول.

، جتا $\theta$ = جتا (٩٠° + ق (∠ حـ ب و))

= − جا (∠ حـ ب و) = − $\frac{٤}{٥}$

(١٣) ∵ أ ء حـ ب رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ ء حـ) = ١٨٠° − $\theta$

∴ جتا (∠ أ ء حـ) = جتا (١٨٠° − $\theta$) = − جتا $\theta$

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى نصف الدائرة م

∴ ∠ $\theta$ زاوية حادة.

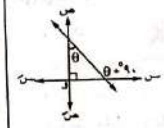


، ∵ جا $\theta$ = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ جتا $\theta$ = $\frac{٥}{١٣}$

∴ جتا (∠ أ ء حـ) = − $\frac{٥}{١٣}$

(١٤) ∵ معادلة الخط المستقيم هى ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥



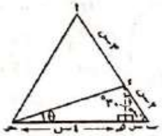
∴ ظا (٩٠° + $\theta$) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ − ظتا $\theta$ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ظتا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ظا $\theta$ = $\frac{٤}{٣}$

(١٥)



فى $\Delta$ ء ب هـ : ∵ ق (∠ ب هـ ء) = ٩٠°

∴ ء هـ = $\sqrt{(٢ س)^٢ − س^٢}$ = $\sqrt{٣}$ س

∴ ظا $\theta$ = $\frac{ء هـ}{هـ حـ}$ = $\frac{\sqrt{٣} س}{٤ س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

**٣٦** ∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ٢ ق (∠ حـ)

= ١٨٠° + ق (∠ حـ)

∴ جا (أ + ب + ٢ حـ) = جا (١٨٠° + حـ)

= − جا حـ = − $\frac{٢}{٥}$

**٣٧**

(١) ∵ جتا (١٨٠° − س) = − جتا س

∴ جتا ١٦٠° = − جتا ٢٠°

، جتا ١٤٠° = − جتا ٤٠° ... وهكذا

∴ المقدار = (جتا ٢٠° + جتا ١٦٠°)

+ (جتا ٤٠° + جتا ١٤٠°)

+ (جتا ٦٠° + جتا ١٢٠°)

+ (جتا ٨٠° + جتا ١٠٠°) + جتا ١٨٠°

= (جتا ٢٠° − جتا ٢٠°) + (جتا ٤٠° − جتا ٤٠°)

+ (جتا ٦٠° − جتا ٦٠°) + (جتا ٨٠° − جتا ٨٠°)

+ جتا ١٨٠° = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + (−١) = −١

(٢) ∵ جا (٣٦٠° − س) = − جا س

∴ جا ٣٥٩° = − جا ١° ، جا ٣٥٨° = − جا ٢° ... وهكذا

∴ المقدار = (جا ١° + جا ٣٥٩°)

+ (جا ٢° + جا ٣٥٨°) + ..... + جا ١٨٠°

= ٠ + ٠ + ..... + ٠ = صفر

## إرشادات تمارين 11

**١** (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (حـ)

(٥) (حـ) (٦) (حـ) (٧) (ب)

**٢**

(١) القيمة العظمى = $\frac{١}{٢}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٢}$

، المدى = $[\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}]$





(٢) القيمة العظمى = $\frac{١}{٣}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٣}$

، المدى = $[\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٣}]$

(٣) القيمة العظمى = ٢ ، القيمة الصغرى = −٢

، المدى = [−٢ ، ٢]

**٣**

كون الجدول وارسم بنفسك ومن الرسم نجد أن :

(١) القيمة الصغرى = −٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [−٤ ، ٤]

(٢) القيمة الصغرى = −٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [−٤ ، ٤]

(٣) القيمة الصغرى = −٢ ، القيمة العظمى = ٢

، المدى = [−٢ ، ٢]

(٤) القيمة الصغرى = −٣ ، القيمة العظمى = ٣

، المدى = [−٣ ، ٣]

**٤**

(١) ∵ ٠° ≤ $\theta$ ≤ ١٢٠° ∴ ٠° ≤ ٣ $\theta$ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٣ $\theta$ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، $\frac{٤\pi}{٦}$ ، ... ، ٢ $\pi$

∴ $\theta$ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{٢\pi}{١٨}$ ، $\frac{٣\pi}{١٨}$ ، $\frac{٤\pi}{١٨}$

، ... ، $\frac{١٢\pi}{١٨}$

، ∵ ص = جتا ٣ $\theta$

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

• القيمة الصغرى = −١ • القيمة العظمى = ١

• مدى الدالة = [−١ ، ١]

(٢) ∵ ٠° ≤ $\theta$ ≤ ١٨٠° ∴ ٠° ≤ ٢ $\theta$ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٢ $\theta$ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، ... ، ٢ $\pi$

∴ $\theta$ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{٢\pi}{١٢}$ ، $\frac{٣\pi}{١٢}$ ، ... ، $\pi$

، ∵ ص = ٥ جا ٦ $\theta$

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

• القيمة الصغرى = −٥ • القيمة العظمى = ٥

• مدى الدالة = [−٥ ، ٥]

**٥** مثل بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :

مدى الدالة : ص = ٤ جتا $\theta$ هو [−٤ ، ٤]

القيمة العظمى = ٤ ، القيمة الصغرى = −٤

، مدى الدالة : ص = ٣ جا $\theta$ هو [−٣ ، ٣]

، القيمة العظمى = ٣ ، القيمة الصغرى = −٣

**٦**

(١) (أ) (٢) (حـ) (٣) (حـ) (٤) (ب) (٥) (د)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (حـ) (٩) (د)

إرشادات لحل رقم **٦**

(١) ∵ −١ ≤ جا س ≤ ١

∴ ١ ≥ − جا س ≥ −١

∴ −١ ≤ − جا س ≤ ١

∴ ١ ≤ ٢ − جا س ≤ ٣

∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ $\frac{٢ − جا س}{٣}$ ≤ ١ ∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ م ≤ ١

(٢) أقصى قيمة للدالة ص هى ١

∴ جا ($\frac{\pi}{٤}$ + س) = ١

$\frac{\pi}{٤}$ + س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٤}$

(٣) دورة الدالة د (س) = جا (ب س) هى $\frac{٢\pi}{ب}$

∴ $\frac{٢\pi}{ب}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ ب = ٣

(٤) أكبر قيمة للمقدار (جتا $س_١$ − جتا $س_٢$)

تكون عندما تكون جتا $س_١$ = ١

، جتا $س_٢$ = −١

∴ جتا $س_١$ − جتا $س_٢$ = ١ − (−١) = ٢

(٥) ∵ د(س) = أ جتا ب س دورتها $\frac{٢\pi}{ب} = \frac{\pi}{٢}$

∴ ب = ٤

، مداها [−١ ، ١]  ∴ أ = ١

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٤}$

(٦) أ = جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ ، ب = جا $\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ = −١

∴ |أ| + |ب| = |١| + |−١| = ٢

(٧) ∵ دورة الدالة هى $\frac{٢\pi}{\frac{١}{٢}} = ٤\pi$

، ∵ من و إلى ب دورة كاملة.

∴ الإحداثى السينى لـ ب = ٤ π

(٨) ∵ ب = ٢ π ، أ = − π

∴ ب − أ = ٢ π − (− π) = ٣ π

(٩) المنحنى ص = جا ٣ س

∴ يقطع محور السينات فى نقاط عددها

= ٢ × عدد الدورات + ١

، ∵ الدالة ص = جا ٣ س لها دورة كاملة كل $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ عدد الدورات فى الفترة [٠ ، ٢ π]

= ٢ π ÷ $\frac{٢\pi}{٣}$ = ٣

∴ عدد نقاط التقاطع المطلوب = ٢ × ٣ + ١ = ٧

## إرشادات تمارين 12

**١** (١) (أ)  (٢) (ج)  (٣) (ج)  (٤) (أ)
(٥) (أ)  (٦) (أ)  (٧) (أ)

**٢**

(١) ٣٦° ٥٢َ ١٢ً  (٢) ٣٨° ٨َ ٢٥ً  (٣) ٦٧° ٥١َ ٢٤ً

(٤) ∵ θ = ظا⁻¹ (−٠,٨٢٢٧) ، −٠,٨٢٢٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٣٩° ٢٦َ ٢٩ً) = ١٤٠° ٣٣َ ٣١ً

(٥) ∵ θ = جا⁻¹ (−٠,٤٦٥٢) ، −٠,٤٦٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٧° ٤٣َ ٢٣ً) = ٢٠٧° ٤٣َ ٢٣ً

(٦) ∵ θ = جتا⁻¹ (−٠,٥٢٠٦) ، −٠,٥٢٠٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٥٨° ٣٧َ ٣٩ً) = ١٢١° ٢٢َ ٢١ً

(٧) ١٥° ٢٣َ ٤١ً

(٨) ∵ θ = ظتا⁻¹ (−١,٤٦١٢) ، −١,٤٦١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٣٤° ٢٣َ ١٢ً) = ١٤٥° ٣٦َ ٤٨ً

(٩) ١٧° ٢٢َ ٢٣ً

(١٠) ∵ θ = قتا⁻¹ (−٢,٥٤٦٦) ، −٢,٥٤٦٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٣° ٧َ ١٧ً) = ٢٠٣° ٧َ ١٧ً

(١١) ∵ θ = قا⁻¹ (−٣,٥٧) ، −٣,٥٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٧٣° ٤٣َ ٥٩ً) = ١٠٦° ١٦َ ١ً

(١٢) ١٩° ٢٥َ ٥٩ً

**٣**

(١) ∵ θ = جا⁻¹ ٠,٨٦٦٠٣ ، ٠,٨٦٦٠٣ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ θ = ٦٠° ٠َ ٢ً

أ، θ = ١٨٠° − ٦٠° ٠َ ٢ً = ١١٩° ٥٩َ ٥٨ً

(٢) ∵ θ = جتا⁻¹ (−٠,٤٧٥٢) ، −٠,٤٧٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٦١° ٤٧َ ٣٩ً) = ١١٨° ١٢َ ٢١ً

أ، θ = ١٨٠° + (٦١° ٤٧َ ٣٩ً) = ٢٤١° ٤٧َ ٣٩ً

(٣) ∵ θ = قتا⁻¹ (−١,٢٥٧٦) ، −١,٢٥٧٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٥٢° ٤٠َ ١٥ً) = ٢٣٢° ٤٠َ ١٥ً

أ، θ = ٣٦٠° − (٥٢° ٤٠َ ١٥ً) = ٣٠٧° ١٩َ ٤٥ً





(٤) ∵ θ = ظا⁻¹ ١,٥٤١٧ ، ١,٥٤١٧ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∴ θ = ٥٧° ٦َ ٥٢ً

أ، θ = ١٨٠° + (٥٧° ٦َ ٥٢ً) = ٢٣٧° ٦َ ٥٢ً

(٥) ∵ θ = جتا⁻¹ (−٠,٦٤٢) ، −٠,٦٤٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٥٠° ٣َ ٣٢ً) = ١٢٩° ٥٦َ ٢٨ً

أ، θ = ١٨٠° + (٥٠° ٣َ ٣٢ً) = ٢٣٠° ٣َ ٣٢ً

(٦) ∵ θ = قا⁻¹ ٢,٠٥١٥ ، ٢,٠٥١٥ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

∴ θ = ٦٠° ٤٩َ ٣٧ً

أ، θ = ٣٦٠° − (٦٠° ٤٩َ ٣٧ً) = ٢٩٩° ١٠َ ٢٣ً

(٧) ∵ θ = قتا⁻¹ (−١,٨٧١٥) ، −١,٨٧١٥ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٣٢° ١٧َ ٥٥ً) = ٢١٢° ١٧َ ٥٥ً

أ، θ = ٣٦٠° − (٣٢° ١٧َ ٥٥ً) = ٣٢٧° ٤٢َ ٥ً

(٨) ∵ θ = ظتا⁻¹ (−٢,٧٠١٢) ، −٢,٧٠١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٢٠° ١٨َ ٥٣ً) = ١٥٩° ٤١َ ٧ً

أ، θ = ٣٦٠° − (٢٠° ١٨َ ٥٣ً) = ٣٣٩° ٤١َ ٧ً

(٩) ∵ θ = ظا⁻¹ (−٢,١٤٥٦) ، −٢,١٤٥٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٦٥° ٠َ ٤٠ً) = ١١٤° ٥٩َ ٢٠ً

أ، θ = ٣٦٠° − (٦٥° ٠َ ٤٠ً) = ٢٩٤° ٥٩َ ٢٠ً

**٤**

(١) ∵ النقطة ب $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ تقع فى الربع الأول

∴ θ تقع فى الربع الأول

، ∵ جا⁻¹ $\frac{١}{٢}$ = ٣٠°  ∴ θ = ٣٠°

(٢) ∵ النقطة ب $\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ تقع فى الربع الثانى

∴ θ تقع فى الربع الثانى

، ∵ جا⁻¹ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

(٣) ∵ النقطة ب $\left(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠}\right)$ تقع فى الربع الرابع

∴ θ تقع فى الربع الرابع

، ∵ جتا⁻¹ $\frac{٦}{١٠}$ = ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ θ = ٣٦٠° − (٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ٣٠٦° ٥٢َ ١٢ً

**٥**

(١) ∵ ظا θ = $\frac{٨}{٥}$  ∴ θ = ظا⁻¹ $\frac{٨}{٥}$

∴ θ = ٥٧° ٥٩َ ٤١ً

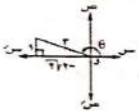
(٢) ∵ جتا θ = $\frac{٧}{٩}$  ∴ θ = جتا⁻¹ $\frac{٧}{٩}$

∴ θ = ٣٨° ٥٦َ ٣٣ً

(٣) ∵ جا θ = $\frac{٤}{٩}$  ∴ θ = جا⁻¹ $\frac{٤}{٩}$

∴ θ = ٢٦° ٢٣َ ١٦ً

**٦**




(١) ∵ ٩٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

∴ θ تقع فى الربع الثانى

∴ جا θ = $\frac{١}{٣}$

∴ θ = جا⁻¹ $\frac{١}{٣}$

∴ θ = ١٨٠° − (١٩° ٢٨َ ١٦ً) = ١٦٠° ٣١َ ٤٤ً

(٢) ∴ جتا θ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، ظا θ = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢}}$

، قا θ = $-\frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

**٧**

∵ جتا أ = −٠,٥٨٠٧  ∴ ق(∠ أ) = ١٢٥° ٣٠َ

∵ ظا ب = ٠,٤٥٧٨  ∴ ق(∠ ب) = ٢٤° ٣٦َ

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ ب) = ١٥٠° ٦َ

∴ ق(∠ ج) = ١٨٠° − ١٥٠° ٦َ = ٢٩° ٥٤َ

**٨**

∵ ظا $\theta$ ≃ ٠,٤٩٩ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∵ $\theta$ = ظا$^{-1}$ ٠,٤٩٩   ∴ $\theta$ ≃ ٢٦° ٣١َ

أ، $\theta$ = ١٨٠° + ٢٦° ٣١َ = ٢٠٦° ٣١َ

---

**٩**

∵ جتا $\theta$ = − ٠,٣٥٦٤ (سالبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

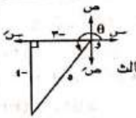
وبفرض جتا $\theta$ = ٠,٣٥٦٤

∴ $\theta$ = ٦٩° ٧َ ∴ $\theta$ = ١٨٠° − ٦٩° ٧َ = ١١٠° ٥٣َ

أ، $\theta$ = ١٨٠° + ٦٩° ٧َ = ٢٤٩° ٧َ

---

**١٠**



∵ ظا $\theta$ = $\frac{٤}{٣}$ (موجبة)

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ $\theta$ أكبر زاوية موجبة

، $\theta$ ∈ [٠° ، ٣٦٠°]

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث

∴ جا $\alpha$ = جا (١٨٠° − ٣٠°) (− جا $\theta$)

+ $\frac{١}{٥}$ (− قا $\theta$) ظا (١٨٠° + ٤٥°)

= جا ٣٠° $\left(\frac{٤}{٥}\right)$ + $\frac{١}{٥}$ $\left(\frac{٥}{٤}\right)$ ظا ٤٥°

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٨ + ٥}{٢٠}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

∴ جا $\alpha$ = $\frac{١٣}{٢٠}$ (موجبة)

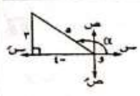
∴ $\alpha$ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∵ $\alpha$ = جا$^{-1}$ $\frac{١٣}{٢٠}$   ∴ $\alpha$ = ٤٠° ٣٢َ

أ، $\alpha$ = ١٨٠° − ٤٠° ٣٢َ = ١٣٩° ٢٨َ

---

**١١**



جا $\alpha$ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ ٩٠° < $\alpha$ < ١٨٠°

∴ $\alpha$ تقع فى الربع الثانى

، ∵ $\frac{-٥}{٤}$ جتا (٣٦٠° − $\alpha$) + ظتا (٢٧٠° − $\theta$) = ٢

∴ $\frac{-٥}{٤}$ جتا $\alpha$ + ظا $\theta$ = ٢

∴ $\frac{-٥}{٤}$ × $\frac{-٤}{٥}$ + ظا $\theta$ = ٢

∴ ١ + ظا س = ٢   ∴ ظا $\theta$ = ١ (موجبة)

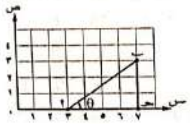
∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ ظا ٤٥° = ١

∴ $\theta$ = ٤٥° أ، $\theta$ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

---

**١٢**



من الرسم :

أ حـ = ٤ وحدة طول

، ب حـ = ٣ وحدة طول

، ∵ ظا $\theta$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$   ∴ ظا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\theta$ = ظا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$   ∴ $\theta$ ≃ ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

---

**١٣** إجابة كريم هى الصحيحة وذلك لأن :

قا $\theta$ = $\frac{١٣}{٧}$ أما ظا $\theta$ ≠ $\frac{١٣}{٧}$

---

**١٤** (١) (جـ)   (٢) (ب)   (٣) (أ)   (٤) (ب)

(٥) (ب)   (٦) (أ)   (٧) (جـ)

إرشادات لحل رقم **١٤**

(١) ظا (∠ أ ب حـ) = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق (∠ أ ب حـ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$

(٢) جا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = ٣٠°   ∴ جا (٣٠°) = $\frac{١}{٢}$

(٣) جتا$^{-1}$ (صفر) = $\frac{\pi}{٢}$   ∴ قا $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = $\frac{١}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)}$ = ١

(٤) فى Δ أ ب حـ : ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ أ حـ = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

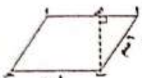
ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٥}{١٢}\right)$ = ق (∠ أ حـ ب)

∴ جا (∠ أ حـ ب) = $\frac{٥}{١٣}$





(٥) ∵ مساحة متوازى الأضلاع





أ ب حـ ء = ٤٠ سم$^٢$

∴ ب هـ = $\frac{٤٠}{٨}$ = ٥ سم

∴ جا أ = $\frac{٥}{٦}$

∴ ق (∠ أ) ≃ ٥٦°

(٦) ∵ ظا $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$   ∴ ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ = $\frac{\pi}{٦}$

، ∵ ظتا $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = $\sqrt{٣}$   ∴ ظتا$^{-1}$ $\left(\sqrt{٣}\right)$ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ + ظتا$^{-1}$ $\left(\sqrt{٣}\right)$ = $\frac{\pi}{٦}$ + $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\pi}{٣}$

(٧) نفرض أن جتا$^{-1}$ س = $\alpha$

∴ جتا $\alpha$ = س

، نفرض أن جا$^{-1}$ س = $\beta$

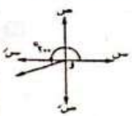
∴ جا $\beta$ = س   ∴ جتا $\alpha$ = جا $\beta$

∴ $\alpha$ + $\beta$ = $\frac{\pi}{٢}$

∴ جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = $\frac{\pi}{٢}$

## إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

**١**



القياس الدائرى

= ٢٠٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$

≃ ٣,٤٩ ء

---

**٢**

قياس الزاوية التى يصنعها العقرب بعد مرور ١٠ دقائق

= ٦٠°

∴ المسافة التى تقطعها النقطة = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × ٦

= ٢ $\pi$ سم

**٣**

المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

= ٢ $\pi$ × ٩٠٠٠ ≃ ٥٦٥٤٨,٦٧ كم

∴ سرعة القمر الصناعى

= $\frac{٥٦٥٤٨,٦٧}{٦}$ = ٩٤٢٤,٧٨ كم/ساعة

---

**٤**

طول نصف قطر دائرة مسار القمر الصناعى

= ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

= ٢ $\pi$ × ١٠٠٠٠ ≃ ٦٢٨٣١,٨٥ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال ساعة واحدة

= $\frac{٦٢٨٣١,٨٥}{٣}$ ≃ ٢٠٩٤٤ كم

---

**٥**

(١) قياس الزاوية التى يدور الظل عندها بعد مرور ٤ ساعات

= ١٥ × ٤ × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٠٥ ء

(٢) القياس الستينى للزاوية = $\frac{٢ \pi}{٣}$ × $\frac{١٨٠°}{\pi}$ = ١٢٠°

∴ عدد الساعات = ١٢٠° ÷ ١٥° = ٨ ساعات

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى يصنعها الظل بعد مرور ١٠ ساعات

= ١٥° × ١٠ × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٥ \pi}{٦}$

∴ طول القوس = $\frac{٥ \pi}{٦}$ × ٢٤ = ٢٠ $\pi$ سم

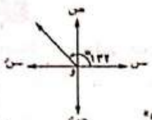
---

**٦**

∵ جا $\theta_١$ = ك جا $\theta_٢$   ∴ جا $\theta_١$ = $\frac{\text{جا } ٦٠°}{\sqrt{٣}}$

∴ جا $\theta_١$ = $\frac{١}{٢}$   ∴ $\theta_١$ = ٣٠°

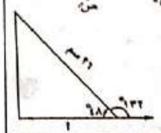
**٧**




(١) الزاوية المنتسبة

$= ١٨٠° - ١٣٢°$

$= ٤٨°$ «توجد حلول أخرى»

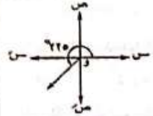



(٢) $\text{حتا } ٤٨° = \frac{\text{أ}}{٢٦}$

$\therefore \text{أ} = ٢٦ \text{ حتا } ٤٨°$

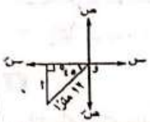
$\simeq ١٧$ سم

**٨**




(١) $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠°}{٤}$

$= ٢٢٥°$




(٢) $\text{جا } ٤٥° = \frac{\text{أ}}{١٢}$

$\therefore \text{أ} = ١٢ \text{ جا } ٤٥°$

$\simeq ٨,٤٩$ متر

**٩**

عندما ف = ١٠ $\therefore$ ٦ جا (١٥ ن)° = ٠

$\therefore$ جا (١٥ ن)° = ٠

$\therefore$ ١٥ ن = ٠ $\therefore$ ن = ٠

أ، ١٥ ن = ١٨٠ $\therefore$ ن = ١٢

أ، ١٥ ن = ٣٦٠ $\therefore$ ن = ٢٤

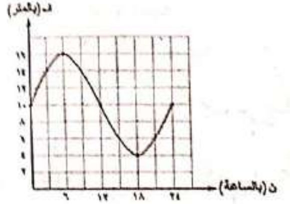
أ، ١٥ ن = ٥٤٠ $\therefore$ ن = ٣٦ (مرفوض)

$\therefore$ عمق المياه = ١٠ أمتار

عند ن = ٠ ، ١٢ ، ٢٤ ساعة

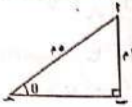
ف = (٦ جا ١٥ ن)° + ١٠

| ن بالساعة | ٠ | ٦ | ١٢ | ١٨ | ٢٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ف (بالمتر) | ١٠ | ١٦ | ١٠ | ٤ | ١٠ |




تستطيع السفينة دخول الميناء عندما ن ∋ [٠ ، ١٢]

**١٠**



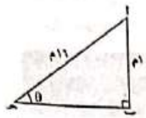

$\because \text{جا } \theta = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \theta = \text{جا}^{-١} \frac{٣}{٥}$

$\therefore \theta \simeq ٣٦° \; ٥٢' \; ١٢''$

$\therefore \theta^{د} = ٣٦° \; ٥٢' \; ١٢'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٠,٦٤٤^{د}$

**١١**




$\because \text{جا } \theta = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

$= \frac{١٠}{١٦} = \frac{٥}{٨}$

$\therefore \theta = \text{جا}^{-١} \frac{٥}{٨}$

$\therefore \theta \simeq ٣٨,٦٨٢°$

**١٢**




$\because \text{جا } \theta = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{٨}{٦٥}$

$\therefore \theta = \text{جا}^{-١} \frac{٨}{٦٥}$ $\therefore \theta \simeq ٧° \; ٤' \; ١١''$





# إرشادات الوحدة الثالثة

## إرشادات تمارين 1

**١**

(١) $\because$ ق (∠ب) = ق (∠س)

، ق (∠جـ) = ق (∠ص) ، ق (∠ء) = ق (∠ع)

$\therefore$ ق (∠أ) = ق (∠ل) (١)

، $\because \frac{\text{أب}}{\text{ل س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ع ل}} = \frac{٥}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ المضلع أ ب جـ ء ∼ المضلع ل س ص ع

(٢) $\because$ المضلع و ز س هـ مربع ، المضلع أ ب جـ ء مربع

$\therefore$ المربع و ز س هـ ∼ المربع أ ب جـ ء

، معامل التشابه = $\frac{٨}{٥}$

(٣) $\because \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} \neq \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ $\therefore$ المضلعان غير متشابهين

(٤) $\because$ المضلع أ ب جـ ء متوازي أضلاع

$\therefore$ ق (∠ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، $\because$ المضلع ز و هـ س متوازي أضلاع

$\therefore$ ق (∠ز) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

، $\because$ ق (∠أ) = ق (∠ز) ، ق (∠ب) = ق (∠و)

، ق (∠جـ) = ق (∠هـ)

، ق (∠ء) = ق (∠س) (١)

، $\frac{\text{أب}}{\text{ز و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ز س}} = \frac{٣}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ متوازي الأضلاع أ ب جـ ء

∼ متوازي الأضلاع ز و هـ س

(٥) $\because$ المضلع س ص ع ل مستطيل

$\therefore$ س ص = ل ع = ٣٠ سم

، $\because \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} \neq \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$

$\therefore$ المضلعان غير متشابهين

(٦) $\because$ المضلع أ ب جـ ء معين

$\therefore$ ق (∠أ) = ق (∠جـ) = $\frac{٣٦٠° - ١٤٠°}{٢}$ = ١١٠°

، $\because$ المضلع ص س ل ع معين

$\therefore$ ق (∠س) = ق (∠ع) = $\frac{٣٦٠° - ٢٢٠°}{٢}$ = ٧٠°

، $\because$ ق (∠أ) = ق (∠ص) ، ق (∠ب) = ق (∠س)

، ق (∠جـ) = ق (∠ل) ، ق (∠ء) = ق (∠ع) (١)

، $\frac{\text{أب}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ل}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ل ع}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ع ص}} = \frac{٧}{٧}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ المعين أ ب جـ ء ∼ المعين ص س ل ع

(٧) $\because$ ق (∠ب) = ق (∠ء) ، ق (∠جـ) = ق (∠و)

$\therefore$ ق (∠أ) = ق (∠هـ) (١)

، $\because \frac{\text{أب}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٧}{١١}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore \triangle$ أ ب جـ ∼ $\triangle$ هـ ء و

(٨) $\because \overline{\text{أء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما

$\therefore$ ق (∠أ) = ١٨٠° − ق (∠ب)

، $\because \overline{\text{ص ع}} \,//\, \overline{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ قاطع لهما

$\therefore$ ق (∠ع) = ١٨٠° − ق (∠ل)

، $\because$ ق (∠ب) = ق (∠ل)

$\therefore$ ق (∠أ) = ق (∠ع)

، $\because$ ق (∠أ) = ق (∠ع) ، ق (∠ب) = ق (∠ل)

، ق (∠جـ) = ق (∠س)

$\therefore$ ق (∠ء) = ق (∠ص) (١)

، $\because \frac{\text{أب}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ل س}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ص ع}} = \frac{٥}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ المضلع أ ب جـ ء ∼ المضلع ع ل س ص

**٢**

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ن ك ل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ن ك}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ن ل}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{١٥}{١٠} = \frac{١٢}{\text{س}} = \frac{١٤}{\text{ص}}$

∴ معامل التشابه = $\frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولًا)

، س = ٨ سم ، ص = $٩\frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانيًا)

**٣**

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع هـ و ز ح

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{هـ ح}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{(\text{ص} + ٢)}{٦} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨}$

∴ معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولًا)

، س = ١٠ سم ، ص + ٢ = ٩

∴ ص = ٧ سم (المطلوب ثانيًا)

**٤**

∵ Δ جـ ب أ ~ Δ جـ هـ ء

∴ $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جـ ء}}$ ∴ $\frac{١٢}{٤} = \frac{٩}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أجـ}}{٥}$

∴ هـ ء = ٣ سم ، أجـ = ١٥ سم

∴ هـ أ = ١١ سم (وهو المطلوب)

**٥**

∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ

∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ ب) وهما متناظرتان

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (المطلوب أولًا)

، ∵ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{٦}{\text{أب}} = \frac{٤}{١٢} = \frac{٥}{\text{أجـ}}$

∴ أب = ١٨ سم ∴ ب ء = ١٢ سم

، أجـ = ١٥ سم

∴ جـ هـ = ١٠ سم (المطلوب ثانيًا)

**٦**

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{محيط Δ أ ب جـ}}{\text{محيط Δ ء هـ و}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{أجـ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

∴ أب = ٢٤ سم ، ب جـ = ٢٧ سم

، أجـ = ٣٠ سم (وهو المطلوب)

**٧**

∵ المثلثان متشابهان

∴ $\frac{\text{طول أكبر ضلع فى المثلث الأول}}{\text{طول أكبر ضلع فى المثلث الثانى}} = \frac{\text{محيط المثلث الأول}}{\text{محيط المثلث الثانى}}$

∴ طول أكبر ضلع فى المثلث الأول = $\frac{٨ \times ٧٤}{١٨,٥}$ = ٣٢ سم

(وهو المطلوب)

**٨**

بفرض أن بعدى المستطيل الثانى هما س سم ، ص سم

∵ المستطيلان متشابهان ∴ $\frac{٨}{\text{س}} = \frac{١٢}{\text{ص}} = \frac{٤٠}{٢٠٠}$

∴ س = ٤٠ سم ، ص = ٦٠ سم

∴ مساحة المستطيل الثانى = ٤٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠ سم²

(وهو المطلوب)

**٩**

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ س) = ١١٥°

∴ ق(∠ س ل ع) = ٣٦٠° − (١١٥° + ٨٥° + ٧٠°)

= ٩٠°

، ∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{س ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{٤,٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{١٩,٥}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}$

∴ أء = ٣,٦ سم (المطلوب أولًا)

، محيط المضلع س ص ع ل = ٢٦ سم (المطلوب ثانيًا)





**١٠**

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (جـ)

(٤) (أ) (٥) (ب) (٦) (ب)

(٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (جـ)

**١١**

(١) س ص (٢) جـ ء (٣) أ ء

(٤) س ص ع ل ، أ ب جـ ء

**١٢**

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ ∴ $\frac{٣٢}{٣\text{م} - ١} = \frac{٤٠}{٣\text{م} + ١}$

∴ ١٢٠ م − ٤٠ = ٩٦ م + ٣٢

∴ ٢٤ م = ٧٢ ∴ م = ٣ (وهو المطلوب)

**١٣**

∵ Δ م أ ب ~ Δ م ء جـ

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ء) وهما متبادلتان

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ (المطلوب أولًا)

∵ Δ م أ ب ~ Δ م ء جـ ∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}} = \frac{٥}{٣}$

∴ م أ = ٥ ك ، م ء = ٣ ك

، ∵ أء = م أ + م ء ، أء = ٦ سم

∴ ٥ ك + ٣ ك = ٦ ∴ ٨ ك = ٦

∴ ك = $\frac{٣}{٤}$

∴ أم = $\frac{٥ \times ٣}{٤} = ٣\frac{٣}{٤}$ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٤**

∵ Δ م أ ب ~ Δ م جـ ء ∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب ء}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ء جـ رباعى دائرى (المطلوب أولًا)

، ∵ Δ م أ ب ~ Δ م جـ ء

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ء}}$ ∴ $\frac{٤,٨}{\text{م جـ}} = \frac{٨}{٤} = \frac{\text{م ب}}{٢,٥}$

∴ م جـ = ٢,٤ سم ، م ب = ٥ سم

∴ ب جـ = ٢,٤ + ٥ = ٧,٤ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٥**

(١) لاحظ أن المثلث المطلوب تكبير للمثلث أ ب جـ

ويفرض أن Δ أَ بَ جـَ ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ جـَ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أَ جـَ}}{\text{أ جـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{٥} = \frac{\text{بَ جـَ}}{٦} = \frac{\text{أَ جـَ}}{٩}$ = ٢,٥

∴ أَ بَ = ١٢,٥ سم ، بَ جـَ = ١٥ سم

، أَ جـَ = ٢٢,٥ سم (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المثلث المطلوب تصغير للمثلث أ ب جـ

ويفرض أن Δ أَ بَ جـَ ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ جـَ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أَ جـَ}}{\text{أ جـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{٥} = \frac{\text{بَ جـَ}}{٦} = \frac{\text{أَ جـَ}}{٩}$ = ٠,٦

∴ أَ بَ = ٣ سم ، بَ جـَ = ٣,٦ سم

، أَ جـَ = ٥,٤ سم (وهو المطلوب)

**١٦**

(١) لاحظ أن المستطيل المطلوب تكبير المستطيل المعطى

ويفرض أن المستطيل أَ بَ جـَ ءَ ~ المستطيل أ ب جـ ء

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ جـَ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ جـَ ءَ}}{\text{محيط المستطيل أ ب جـ ء}}$

= معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{١٠} = \frac{\text{بَ جـَ}}{٦} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ جـَ ءَ}}{٣٢}$ = ٣

∴ أَ بَ = ٣٠ سم ، بَ جـَ = ١٨ سم

محيط المستطيل أَ بَ جـَ ءَ = ٩٦ سم

، مساحة المستطيل أَ بَ جـَ دَ

= ٣٠ × ١٨ = ٥٤٠ سم$^2$ (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المستطيل المطلوب تصغير للمستطيل المعطى

ونفرض أن المستطيل أَ بَ جـَ دَ ~ المستطيل أ ب جـ د

∴ أَبَ / أب = بَجـَ / ب جـ = محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ / محيط المستطيل أ ب جـ د

= معامل التشابه

∴ أَبَ / ١٠ = بَجـَ / ٦ = محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ / ٣٢ = ٠,٤

∴ أَبَ = ٤ سم ، بَجـَ = ٢,٤ سم

، محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ = ١٢,٨ سم

، مساحة المستطيل أَ بَ جـَ دَ

= ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم$^2$ (وهو المطلوب)

**١٧**

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ د أ ب)

∴ أب مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ د جـ (المطلوب أولًا)

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ ∴ أب / د ب = ب جـ / ب أ

∴ (أ ب)$^2$ = د ب × ب جـ

∴ أ ب وسط متناسب بين ب د ، ب جـ (المطلوب ثانيًا)

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ ∴ أب / د ب = ب جـ / ب أ = أ جـ / أ د

∴ ٦ / د ب = ٩ / ٦ = ٧,٥ / أ د

∴ أ د = ٥ سم ، د ب = ٤ سم

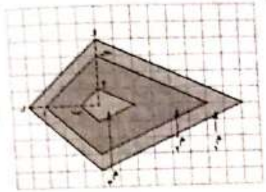
∴ جـ د = ٩ − ٤ = ٥ سم (المطلوب ثالثًا)

**١٨**

نفرض أن طول ضلع المربع = وحدة طولية

∴ طول قطر المربع = $\sqrt{2}$ وحدة طولية

(١)



من فيثاغورث :

∴ أ ب = $\sqrt{2}$ وحدة طولية

، جـ د = ٣ $\sqrt{2}$ وحدة طولية

، و ر = ٤ $\sqrt{2}$ وحدة طولية

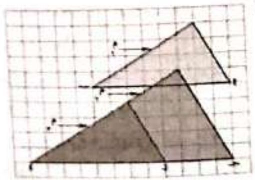
∴ معامل تشابه المضلع م$_3$ للمضلع م$_1$

= و ر / أ ب = ٤ $\sqrt{2}$ / $\sqrt{2}$ = ٤

∴ معامل تشابه المضلع م$_2$ للمضلع م$_1$

= جـ د / أ ب = ٣ $\sqrt{2}$ / $\sqrt{2}$ = ٣

(٢)



∵ أ ب = ٨ وحدة طولية

، جـ د = ١٢ وحدة طولية

، و د = ٨ وحدة طولية

∴ معامل تشابه المضلع م$_3$ للمضلع م$_1$

= و د / أ ب = ٨ / ٨ = ١

، معامل تشابه المضلع م$_2$ للمضلع م$_1$

= جـ د / أ ب = ١٢ / ٨ = ٣ / ٢



**١٩**

∵ المستطيل أ ب جـ د ~ المستطيل أ هـ و ن

∴ محيط المستطيل أ ب جـ د / محيط المستطيل أ هـ و ن = أ ب / أ هـ

= أ د / أ ن = (أ ب − أ د) / (أ هـ − أ ن) (وهو المطلوب)

## إرشادات تمارين 2

**١**

(١) في Δ أ ب جـ

ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٥٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ د) = ٤٥°

، ق(∠ جـ) = ق(∠ و) = ٥٥°

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

(٢) ∵ ΔΔ س ص ع ، ن ل م قائما الزاوية

، ق(∠ ع) = ق(∠ م) = ٦٥°

∴ Δ س ص ع ~ Δ ن ل م

(٣) في Δ أ ب جـ

ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٣٠°) = ٨٥°

، في Δ س ص ع

ق(∠ س) = ١٨٠° − (٧٥° + ٦٥°) = ٤٠°

∴ في ΔΔ أ ب جـ ، س ص ع

فقط ق(∠ أ) = ق(∠ ص)

∴ المثلثان غير متشابهين.

(٤) ∵ أ هـ // د ب ∴ Δ أ هـ جـ ~ Δ ب جـ د

(٥) ∵ ΔΔ أ ب جـ ، د هـ و متساويا الأضلاع

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

(٦) ∵ ΔΔ أ ب جـ ، س ع ص متساويا الساقين

، ق(∠ ب) = ق(∠ ع) = ٧٠°

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ س ع ص

(٧) ΔΔ أ د هـ ، أ ب جـ غير متشابهين

(٨) Δ س ص ع ~ Δ ن ل م

∴ س ص / ن ل = ص ع / ل م = س ع / ن م = [illegible]

(٩) Δ أ هـ جـ ~ Δ ب هـ د

∴ أ هـ / ب هـ = هـ جـ / هـ د = [illegible]

، ق(∠ أ هـ جـ) = ق(∠ ب هـ د) (بالتقابل بالرأس)

(١٠) Δ س ص ع ~ Δ ل ص م

∴ س ص / ل ص = ص ع / ص م = [illegible]

، ق(∠ ص) = ق(∠ ص) [illegible]

**٢**

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ب)

(٩) (جـ) (١٠) (د) (١١) (د) (١٢) (ب)

**٣**

(١) ∵ د هـ // ب جـ

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ (المطلوب أولًا)

∴ أ د / أ ب = د هـ / ب جـ ∴ [illegible]

∴ ٢٤ س − ٣٠ = ٤ س + ٦٠ [illegible]

∴ ٢٠ س = ٩٠ ∴ س = ٤,٥ (المطلوب ثانيًا)

(٢) ∵ ب جـ // د هـ

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ د هـ (المطلوب أولًا)

∴ أ ب / أ د = ب جـ / د هـ ∴ [illegible]

∴ ٥ س + ٢٠ = ٦ س + ٩ [illegible]

∴ س = ١١ (المطلوب ثانيًا)

(٣) ∵ (أ ب)$^2$ = أ د × أ جـ

∴ س$^2$ = ١٨ × ٨ = ١٤٤

∴ س = ١٢ (وهو المطلوب)

(٤) ∵ $(هـ حـ)^{٢}$ = هـ ب × هـ ء

∴ ٣٦ = ٤ × (٢ س + ١)

∴ ٣٦ = ٨ س + ٤ ∴ ٣٢ = ٨ س

∴ س = ٤ (وهو المطلوب)

(٥) ∵ ΔΔ أ ء هـ ، ب حـ هـ فيهما :

$\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ء هـ}{حـ هـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{ء هـ}{حـ هـ}$

، ∵ ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ ب هـ حـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ ب حـ هـ

وينتج أن : ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٧٥°

∴ س = ٧٥° (وهو المطلوب)

(٦) ∵ ΔΔ ب ء هـ ، ب حـ أ فيهما :

$\frac{ب ء}{ب حـ} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{ب هـ}{ب أ} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ب ء}{ب حـ} = \frac{ب هـ}{ب أ}$

، ∵ ∠ ب مشتركة ∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب حـ أ

، $\frac{ء هـ}{حـ أ} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ص}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ ص = ٣ سم (وهو المطلوب)

(٧) ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أحـ}$

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أحـ} = \frac{١}{٢}$ ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{ء هـ}{ب حـ} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٦}{س + ٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ س + ٤ = ١٢

∴ س = ٨

∴ أهـ = س − ٣ = ٨ − ٣ = ٥ سم

∴ هـ حـ = ص + ١ = ٥

∴ ص = ٤ (وهو المطلوب)

**٤**

∵ ΔΔ أ هـ ء ، أ حـ ب فيهما :

ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠ حـ) ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{أهـ}{أحـ} = \frac{هـ ء}{حـ ب} = \frac{أء}{أب}$ ∴ $\frac{١٤}{أحـ} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{أء}{أب}$

∴ أحـ = ١٧,٥ سم ، $\frac{أء}{أب} = \frac{١٢}{١٥}$

∴ $\frac{أء}{أء + ٤} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ٥ أء = ٤ أء + ١٦

∴ أء = ١٦ سم ، أب = ٢٠ سم (وهو المطلوب)

**٥**

∵ $\overline{أء} \parallel \overline{ب حـ}$

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ ب هـ حـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{أهـ}{ب هـ} = \frac{هـ ء}{هـ حـ}$

∴ أهـ × هـ حـ = ء هـ × هـ ب (المطلوب ثانيًا)

**٦**

∵ ∠ أ تتمم ∠ أ هـ ء ، ق(∠ أ) = ق(∠ ب هـ ء)

∴ ق(∠ أ هـ ء) + ق(∠ ب هـ ء) = ٩٠°

∴ Δ أ هـ ب قائم الزاوية في هـ ، $\overline{هـ ء} \perp \overline{أب}$

∴ $(ب هـ)^{٢}$ = ب ء × ب أ = ٦٤

∴ ب هـ = ٨ سم (وهو المطلوب)

**٧**

∵ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤,٥}{٦} = \frac{٦}{٨}$ ∴ $\frac{أب}{هـ و} = \frac{ب حـ}{ء هـ} = \frac{حـ أ}{و ء}$

∴ Δ حـ أ ب ~ Δ ء و هـ (وهو المطلوب)

**٨**

∵ $\frac{س ب}{أ ب} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ب ص}{ب حـ} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$

، $\frac{س ص}{أ حـ} = \frac{١٣,٥}{١٨} = \frac{٣}{٤}$





∴ $\frac{س ب}{أ ب} = \frac{ب ص}{ب حـ} = \frac{س ص}{أ حـ}$

∴ Δ س ب ص ~ Δ أ ب حـ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠ س ب ص) = ق(∠ أ ب حـ)

∴ $\overrightarrow{ب حـ}$ ينصف ∠ أ ب س (المطلوب ثانيًا)

**٩**

∵ $\frac{أب}{ء ب} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ب حـ}{ب أ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{أحـ}{أء} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أب}{ء ب} = \frac{ب حـ}{ب أ} = \frac{أحـ}{أء}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ب حـ)

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ ينصف ∠ ء ب حـ (المطلوب ثانيًا)

**١٠**

أهـ = ٦ − ٢ = ٤ سم

∴ $\frac{أهـ}{أب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أء}{أحـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ΔΔ أ هـ ء ، أ ب حـ فيهما : ∠ أ مشتركة

، $\frac{أهـ}{أب} = \frac{أء}{أحـ} = \frac{١}{٢}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب (وهو المطلوب)

**١١**

∵ $\frac{أهـ}{ء هـ} = \frac{٧,٥}{١٠} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ ΔΔ أ ب هـ ، ء حـ هـ فيهما : $\frac{أهـ}{ء هـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٣}{٤}$

، ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ حـ هـ ء) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ ء حـ هـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{أب}{ء حـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$ ∴ $\frac{٦}{ء حـ} = \frac{٣}{٤}$

∴ ء حـ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٢**




∵ ΔΔ أ ب م ، أ حـ ب فيهما :

∠ أ مشتركة ، ق(∠ أ ب م) = ق(∠ حـ)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{ب م}{حـ ب} = \frac{أم}{أب}$

∴ $(أب)^{٢}$ = أم × أحـ (وهو المطلوب)

**١٣**

(١) Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

، Δ أ ء س ~ Δ أ ب ص

، Δ أ س هـ ~ Δ أ ص حـ

(٢) ∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ء هـ}{ب حـ} = \frac{أهـ}{أحـ}$ (١)

∵ Δ أ ء س ~ Δ أ ب ص

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ء س}{ب ص} = \frac{أس}{أص}$ (٢)

∵ Δ أ س هـ ~ Δ أ ص حـ

∴ $\frac{أس}{أص} = \frac{س هـ}{ص حـ} = \frac{أهـ}{أحـ}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ $\frac{ء س}{ب ص} = \frac{س هـ}{ص حـ} = \frac{ء هـ}{ب حـ}$ (وهو المطلوب)

**١٤**

∵ $(أب)^{٢}$ = ب ء × ب حـ

∴ $(٣٠)^{٢}$ = ب ء (ب ء + ٣٢)

∴ ٩٠٠ = $(ب ء)^{٢}$ + ٣٢ ب ء

∴ $(ب ء)^{٢}$ + ٣٢ ب ء − ٩٠٠ = ٠

∴ (ب ء − ١٨) (ب ء + ٥٠) = ٠

∴ ب ء = ١٨ سم (المطلوب أولاً)

∴ $(أء)^{٢}$ = ب ء × ء حـ = ١٨ × ٣٢ = ٥٧٦

∴ أء = ٢٤ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٥**

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{٦}{٤،٥} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{بو}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

، $\frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$

∴ Δ أبجـ ~ Δ ءبو (المطلوب أولاً)

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ بوء)

، ∵ ق (∠ بوء) = ق (∠ هـ و جـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ هـ و جـ)

∴ Δ هـ و جـ متساوى الساقين (المطلوب ثانيًا)

**١٦**

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{جـهـ}}{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}}$

، ∵ $\frac{\text{بء}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{هـب}}{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{هـب}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{هـب}}$

∴ Δ ءبأ ~ Δ بهـجـ

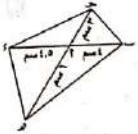
وينتج أن : ق (∠ أءب) = ق (∠ جـبهـ) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$ (المطلوب أولاً)

، ق (∠ أبء) = ق (∠ جـهـب) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـهـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

**١٧**




∵ ΔΔ أبجـ ، أهـء

فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أء}}$ (كل = $\frac{٢}{٣}$)

، ق (∠ بأجـ) = ق (∠ هـأء) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أبجـ ~ Δ أهـء

وينتج أن : ق (∠ أجـب) = ق (∠ أءهـ)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{بهـ}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل بجـءهـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

**١٨**




∵ ΔΔ بءهـ ، بأجـ فيهما :

$\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{\text{بهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{بجـ}}$

، ∵ ∠ ب مشتركة

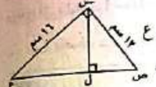
∴ Δ بءهـ ~ Δ بأجـ ، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ∴ ءهـ = ٥ سم (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : ق (∠ بءهـ) = ق (∠ بأجـ)

∴ الشكل أجـءهـ رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

**١٩**




∵ (س ص)² = ص ل × ص ع

، (س ع)² = ع ل × ع ص

∴ $\frac{(\text{س ص})^2}{(\text{س ع})^2} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ع ل}}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ (ص ع)² = (س ص)² + (س ع)²

= ١٤٤ + ٢٥٦ = ٤٠٠

∴ ص ع = ٢٠ سم

، ∵ (س ص)² = ص ل × ص ع

∴ ١٤٤ = ص ل × ٢٠

∴ ص ل = ٧،٢ سم (المطلوب ثانيًا)

، س ل = $\frac{\text{س ص} \times \text{س ع}}{\text{ص ع}} = \frac{١٢ \times ١٦}{٢٠}$ = ٩،٦ سم

(المطلوب ثالثًا)

**٢٠** (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (د)

**٢١**

∵ أبجـء متوازى أضلاع ∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$





∴ Δ أهـى ~ Δ جـهـب (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{هـى}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أى}}{\text{جـب}}$ (١)

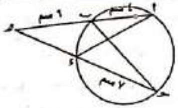
، ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـو}}$ ∴ Δ أبهـ ~ Δ جـوهـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـو}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{هـى}}{\text{هـب}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{وهـ}}$

∴ (هـب)² = هـى × وهـ (المطلوب ثانيًا)

**٢٢**




∵ ∠ أ ، ∠ جـ

تحصران $\overset{\frown}{\text{بء}}$

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ جـ)

، ∵ ∠ هـ مشتركة

∴ Δ أءهـ ~ Δ جـبهـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{جـهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ءهـ}}{٦} = \frac{١٠}{٧ + \text{ءهـ}}$

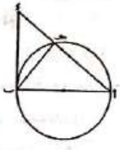
∴ ٧ءهـ + (ءهـ)² = ٦٠

∴ (ءهـ)² + ٧ءهـ − ٦٠ = ٠

∴ (ءهـ + ١٢) (ءهـ − ٥) = ٠ ∴ ءهـ = ٥ سم

∴ جـهـ = ١٢ سم (المطلوب ثانيًا)

**٢٣**




∵ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$

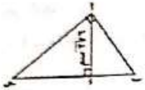
، ∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ أجـب) = ٩٠°

∴ Δ أبء قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{بجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أء}}$

∴ (بجـ)² = جـأ × جـء (وهو المطلوب)

**٢٤**




∵ ءجـ = ٢ بء

، أء = ٦√٢ سم

، ∵ (أء)² = ءب × ءجـ

∴ $(٦\sqrt{٢})^2$ = ءب × ٢ ءب ∴ ٧٢ = ٢ (بء)²

∴ (بء)² = ٣٦ ∴ بء = ٦ سم

∴ جـء = ١٢ سم ∴ (أب)² = ٦ × ١٨ = ١٠٨

∴ أب = ٦√٣ سم ، (أجـ)² = ١٢ × ١٨ = ٢١٦

∴ أجـ = ٦√٦ سم (وهو المطلوب)

**٢٥**

∵ $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٩٠° (بالتبادل)

∴ ΔΔ أبجـ ، هـأء فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{هـأ}} = \frac{٢}{١} = ٢$ (لأن هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$)

، $\frac{\text{بجـ}}{\text{أء}} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

، ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ Δ أبجـ ~ Δ هـأء (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن :

ق (∠ بأجـ) = ق (∠ أهـء) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

**٢٦**

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ ΔΔ أبجـ ، ءبأ فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٣}{٢}$ ، ∠ ب مشتركة

∴ Δ أبجـ ~ Δ ءبأ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أء}}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{٨}{\text{أء}}$

∴ أء = ٥$\frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانيًا)

ومن التشابه ينتج أن : ق(∠ب أ ء) = ق(∠ح)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس △ أ ء ح

(المطلوب ثالثًا)

**٢٧**

∵ $\frac{\text{ك ى}}{\text{ل هـ}} = \frac{4.5}{9} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ى هـ}}{\text{ل م}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

، $\frac{\text{هـ ك}}{\text{هـ م}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ∴ △ ك ى هـ ~ △ هـ ل م

∴ ق(∠ى ك هـ) = ق(∠ل هـ م) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ى ك}} // \overline{\text{ل هـ}}$

، ق(∠ى هـ ك) = ق(∠ل م هـ) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{هـ ى}} // \overline{\text{ل م}}$

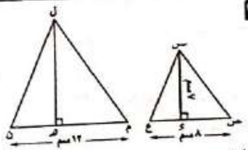
، ∵ $\overline{\text{ل هـ}} // \overline{\text{ى ك}}$ ∴ △ ن ك ى ~ △ ن هـ ل

∴ $\frac{\text{ن ك}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{ك ى}}{\text{هـ ل}} = \frac{4.5}{9}$

∴ $\frac{\text{ن ك}}{\text{ن ك} + 4} = \frac{1}{2}$ ∴ ٢ ن ك = ن ك + ٤

∴ ن ك = ٤ سم (وهو المطلوب)

**٢٨**




∵ △△ س ص ع ، ل م ن متساويان فى قياسات زواياهما المتناظرة

∴ △ س ص ع ~ △ ل م ن

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{م ن}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

فى △△ س ص ء ، ل م هـ :

∵ ق(∠ص) = ق(∠م) (معطى)

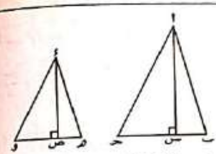
، ق(∠س ء ص) = ق(∠ل هـ م) = ٩٠°

∴ △ س ص ء ~ △ ل م هـ

∴ $\frac{\text{س ء}}{\text{ل هـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ل م}}$ ∴ $\frac{7}{\text{ل هـ}} = \frac{2}{3}$

∴ ل هـ = $10\frac{1}{2}$ سم (وهو المطلوب)

**٢٩**



∵ △ أ ب ح ~ △ ء هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، ق(∠ح) = ق(∠و)

∴ فى △△ أ ب س ، ء هـ ص :

∵ ق(∠ب) = ق(∠هـ)

، ق(∠ب س أ) = ق(∠هـ ص ء) = ٩٠°

∴ △ أ ب س ~ △ ء هـ ص

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$ (١)

، فى △△ أ س ح ، ء ص و :

∵ ق(∠ح) = ق(∠و)

، ق(∠أ س ح) = ق(∠ء ص و) = ٩٠°

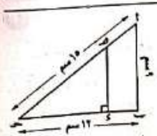
∴ △ أ س ح ~ △ ء ص و

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}} = \frac{\text{س ح}}{\text{ص و}} = \frac{\text{أ ح}}{\text{ء و}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ح}}{\text{ص و}}$

∴ ب س × ص و = س ح × ص هـ (وهو المطلوب)

**٣٠**




∵ $(\text{أ ح})^2 = 225$

، $(\text{أ ب})^2 + (\text{ب ح})^2 = 225$

∴ ∠ب قائمة

∴ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{أ ب}}$ ∴ △ ح هـ ء ~ △ ح أ ب

∴ $\frac{\text{ح ء}}{\text{ح ب}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\frac{3}{4} = \frac{\text{هـ ء}}{9}$

∴ هـ ء = $6\frac{3}{4}$ سم ، ب ء = $12 \times \frac{1}{4} = 3$ سم



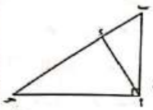


∴ الشكل أ ب ء هـ شبه منحرف مساحته

$= \frac{\text{أ ب} + \text{ء هـ}}{2} \times \text{ب ء} = \frac{9 + 6\frac{3}{4}}{2} \times 3$

$= 23\frac{5}{8}$ سم² (وهو المطلوب)

**٣١**



∵ △△ ء ب أ ، أ ب ح فيهما :

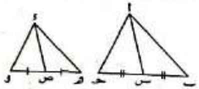
$\frac{\text{ء ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$ ، ∠ب مشتركة

∴ △ ء ب أ ~ △ أ ب ح (المطلوب أولًا)

وينتج أن : ق(∠أ ء ب) = ق(∠ح أ ب) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$ (المطلوب ثانيًا)

**٣٢**



∵ △ أ ب ح ~ △ ء هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) (١)

، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{هـ و}} = \frac{2\,\text{ب س}}{2\,\text{هـ ص}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

△ أ ب س ~ △ ء هـ ص (وهو المطلوب)

**٣٣**



△△ أ ب هـ ، ء ب ح فيهما :

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ء ح}}$

، ق(∠ب أ هـ) = ق(∠ب ء ح)

(محيطيتان مشتركتان فى ⌒ب ح)

∴ △ أ ب هـ ~ △ ء ب ح (المطلوب أولًا)

∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء ب ح)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب ح (المطلوب ثانيًا)

**٣٤**

∵ ∠ح تتمم ∠ء أ ح ، ∠هـ أ ء تتمم ∠ء أ ح

∴ ق(∠ح) = ق(∠هـ أ ء)

، ق(∠ء هـ أ) = ق(∠ء و ح) = ٩٠°

∴ △ أ ء هـ ~ △ ح ء و (المطلوب أولًا)

∵ $(\text{ء هـ})^2 = \text{أ هـ} \times \text{هـ ب}$ ∴ ء هـ = $\sqrt{\text{أ هـ} \times \text{هـ ب}}$

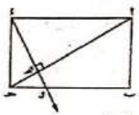
، $(\text{ء و})^2 = \text{أ و} \times \text{و ح}$

∴ ء و = $\sqrt{\text{أ و} \times \text{و ح}}$

∴ مساحة المستطيل أ هـ ء و = ء هـ × ء و

$= \sqrt{\text{أ هـ} \times \text{هـ ب} \times \text{أ و} \times \text{و ح}}$ (المطلوب ثانيًا)

**٣٥**



∵ الشكل أ ب ح ء مستطيل

∴ ق(∠أ ء ح)

= ق(∠ب ح ء) = ٩٠°

∴ △ أ ء ح فيه :

ق(∠أ ء ح) = ٩٠° ، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{أ ح}}$

∴ △ أ ء ح ~ △ أ هـ ء ∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ح}}{\text{أ ء}}$

∴ $(\text{أ ء})^2 = \text{أ هـ} \times \text{أ ح}$ ∴ أ ء = $\sqrt{\text{أ هـ} \times \text{أ ح}}$

، △ ء ح و فيه : ق(∠ء ح و) = ٩٠° ، $\overline{\text{ح هـ}} \perp \overline{\text{ء و}}$

∴ △ ء ح و ~ △ ء هـ ح ∴ $\frac{\text{ء ح}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{ء ح}}$

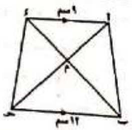
∴ $(\text{ء ح})^2 = \text{ء هـ} \times \text{ء و}$ ∴ ء ح = $\sqrt{\text{ء هـ} \times \text{ء و}}$

∴ مساحة سطح المستطيل أ ب ح ء = أ ء × ء ح

$= \sqrt{\text{أ هـ} \times \text{أ ح}} \times \sqrt{\text{ء هـ} \times \text{ء و}}$

$= \sqrt{\text{أ هـ} \times \text{أ ح} \times \text{ء هـ} \times \text{ء و}}$ (وهو المطلوب)

**٣٦**




∵ $\overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{ب ح}}$

∴ △ م أ ء ~ △ م ح ب

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م ح}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م ب}}$

∴ م أ . م ب = م حـ . م د (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : $\frac{\text{م أ}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{حـ ب}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

∴ م أ = ٣ ك ، م حـ = ٤ ك

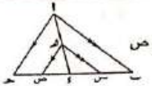
، ∵ أ حـ = م أ + م حـ ، أ حـ = ١٤ سم

∴ ٣ ك + ٤ ك = ١٤ ∴ ٧ ك = ١٤

∴ ك = ٢

∴ م أ = ٢ × ٣ = ٦ سم (المطلوب ثانياً)

**٣٧**



∵ ΔΔ أ ب حـ ، هـ س ص

فيهما :

ق (∠ ب) = ق (∠ هـ س ص) (بالتناظر)

، ق (∠ حـ) = ق (∠ هـ ص س) (بالتناظر)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ هـ س ص (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{س ص}}$ (١)

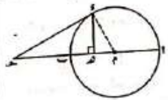
، ∵ $\overline{\text{هـ س}} // \overline{\text{أ ب}}$ ∴ Δ د أ ب ~ Δ د هـ س

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{هـ س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{س ص}}$

∴ س ص × أ د = ب حـ × د هـ (المطلوب ثانياً)

**٣٨**



العمل : نرسم $\overline{\text{م د}}$

البرهان :

∵ $\overline{\text{حـ د}}$ مماسة للدائرة

∴ ∠ حـ د م قائمة ∴ (حـ د)$^2$ = حـ هـ × حـ م (١)

لكن (حـ د)$^2$ = (حـ م)$^2$ − (م د)$^2$ = (حـ م)$^2$ − (م ب)$^2$

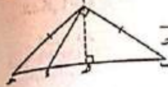
= (حـ م − م ب) (حـ م + م ب) = حـ ب (حـ م + م أ)

= حـ ب × حـ أ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ (حـ د)$^2$ = حـ هـ × حـ م = حـ ب × حـ أ (وهو المطلوب)

**٣٦**



العمل : نرسم $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

البرهان :

∵ أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

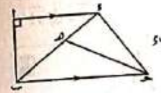
∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

، ∵ (أ ب)$^2$ = ب هـ × ب د

∴ (أ ب)$^2$ = $\frac{1}{2}$ ب حـ × ب د

∴ ٢ (أ ب)$^2$ = ب د × ب حـ (وهو المطلوب)

**٤٠**



∵ أ ب × هـ حـ = د هـ × ب د

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$

، ∵ حـ د × ب د = د أ × هـ حـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{د أ}}{\text{حـ د}}$ ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{د أ}}{\text{حـ د}}$

∴ Δ أ د ب ~ Δ د حـ هـ

وينتج أن : ق (∠ حـ د هـ) = ق (∠ أ) = ٩٠°

∴ في Δ ب حـ د : (ب حـ)$^2$ = (ب د)$^2$ + (حـ د)$^2$

ولكن (ب د)$^2$ = (أ ب)$^2$ + (أ د)$^2$

∴ (ب حـ)$^2$ = (أ ب)$^2$ + (أ د)$^2$ + (حـ د)$^2$

(وهو المطلوب)

**٤١**

∵ ΔΔ ب س أ ، حـ د أ فيهما : $\frac{\text{ب س}}{\text{حـ د}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{حـ أ}}$

، ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{\text{أ د}}$)

∴ Δ ب س أ ~ Δ حـ د أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق (∠ أ س ب) = ق (∠ أ د حـ)

∴ ق (∠ أ د حـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ حـ}}$ قطر في الدائرة. (المطلوب ثانياً)





**٤٢**



∵ أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ ب حـ)

= ق (∠ أ حـ ب)

∴ ق (∠ أ ب د) = ق (∠ أ حـ هـ) (١)

، ∵ (أ ب)$^2$ = د ب × حـ هـ

∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حـ هـ}}$ ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حـ هـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ Δ أ ب د ~ Δ هـ حـ أ (وهو المطلوب)

**٤٣** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (جـ)

(٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)

(١١) (ب) (١٢) (ب) (١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (ب)

(١٦) (جـ) (١٧) (د) (١٨) (جـ)

إرشادات لحل رقم **٤٣**

(١) ∵ $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{2}{7}$

∴ ٧ س − ٧ ص = ٢ س + ٢ ص

∴ ٥ س = ٩ ص ∴ $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{5}{9}$

، ∵ $\overline{\text{د هـ}} // \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ} + 8} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{5}{9}$

∴ ٩ أ هـ = ٥ أ هـ + ٤٠

∴ ٤ أ هـ = ٤٠ ∴ أ هـ = ١٠ سم

(٢) ∵ م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{أ د}} = \frac{2}{3}$

، $\overline{\text{أ د}}$ متوسط في Δ أ ب حـ

∴ د منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ∵ $\overline{\text{هـ د}} // \overline{\text{أ حـ}}$

∴ هـ د = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٩ سم

، في Δ أ هـ د : ∵ $\overline{\text{و م}} // \overline{\text{هـ د}}$

∴ Δ أ و م ~ Δ أ هـ د

∴ $\frac{\text{و م}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{\text{و م}}{9} = \frac{2}{3}$

∴ و م = ٦ سم

(٣) في ΔΔ أ ب حـ ، د ب أ

∵ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ د) ، ∠ ب مشتركة

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ د ب أ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ د}}$

∴ $\frac{6}{5 + \text{ب حـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{6}$

∴ ٣٦ = ٥ ب حـ + (ب حـ)$^2$

∴ (ب حـ)$^2$ + ٥ ب حـ − ٣٦ = ٠

∴ (ب حـ − ٤) (ب حـ + ٩) = ٠

∴ ب حـ = ٤ سم

(٤) في ΔΔ أ حـ د ، أ ب حـ :

ق (∠ أ حـ د) = ق (∠ ب) ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ حـ د ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ د}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ س$^2$ = ص$^2$ + ص ع

∴ س$^2$ − ص$^2$ = ص ع = ١٦

(٥) في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{س د}} // \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{2}{10} = \frac{\text{د هـ}}{15}$

∴ د هـ = ٣ سم

في Δ هـ س حـ :

∵ ق (∠ هـ س حـ) = ق (∠ س حـ ب) (بالتبادل)

، ∵ $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ ق (∠ هـ س حـ) = ق (∠ هـ حـ س)

∴ س هـ = هـ حـ = ٨ سم

∴ س د = ٨ − ٣ = ٥ سم

(٦) في Δ أ د هـ : ∵ أ د = أ هـ

∴ ق (∠ أ د هـ) = ق (∠ أ هـ د)

∴ ق (∠ أ د ب) = ق (∠ أ هـ حـ)

(مكملتين للزاويتين ∠ أ د هـ ، ∠ أ هـ د)

في ΔΔ ب ء ا ، ا هـ حـ

∵ ق(∠ب) = ق(∠هـ ا حـ)

، ق(∠ا ء ب) = ق(∠ا هـ حـ)

∴ Δ ب ء ا ~ Δ ا هـ حـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ء ا}}{\text{هـ حـ}}$ ، ∵ ا ء = ا هـ

∴ $\frac{9}{\text{ا ء}} = \frac{\text{ا ء}}{4}$ ∴ $(\text{ا ء})^2 = 36$

∴ ا ء = 6 سم

(7) ∵ Δ ب ء هـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب هـ ء)

= ق(∠ء ب هـ) = $60^\circ$

∴ ق(∠ب ء ا) = ق(∠ب هـ حـ) = $120^\circ$

، ∵ ق(∠ء ب هـ) = $60^\circ$

∴ ق(∠ا ب ء) + ق(∠حـ ب هـ) = $60^\circ$

، ∵ ق(∠ب ا ء) + ق(∠ا ب ء)

= $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

∴ ق(∠ب ا ء) = ق(∠حـ ب هـ)

في ΔΔ ء ا ب ، هـ ب حـ :

∵ ق(∠ا ء ب) = ق(∠ب هـ حـ) = $120^\circ$

، ق(∠ب ا ء) = ق(∠حـ ب هـ)

∴ Δ ء ا ب ~ Δ هـ ب حـ

∴ $\frac{\text{ا ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{هـ حـ}}$ ∴ $\frac{9}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{4}$

∴ $\text{س}^2 = 36$ ∴ س = 6 سم

(8) ∵ ∠هـ ء و خارجة عن المثلث ا ء حـ

∴ ق(∠هـ ء و) = ق(∠3) + ق(∠حـ ا ء)

، ∵ ق(∠3) = ق(∠1)

∴ ق(∠هـ ء و) = ق(∠1) + ق(∠حـ ا ء)

= ق(∠حـ ا ب)

بالمثل يمكن إثبات أن ق(∠ء و هـ) = ق(∠ا ب حـ)

∴ Δ ء هـ و ~ Δ ا حـ ب

∴ ء هـ : هـ و : و ء = ا حـ : حـ ب : ب ا

= 12 : 11 : 7

(9) في Δ ا ء حـ : ∵ ا ء = ا حـ

∴ ق(∠ا ء حـ) = ق(∠ا حـ ء)

، ∵ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ا ء حـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ا حـ ء)

في ΔΔ ب ء هـ ، ب حـ ا :

ق(∠ا ب حـ) = ق(∠هـ ب ء)

، ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ا حـ ب)

∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب حـ ا

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{حـ ا}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ا ب}}$

∴ $\frac{9}{15} = \frac{3}{\text{حـ ا}}$ ∴ حـ ا = 5 سم

∴ محيط Δ ا ء حـ = 5 + 5 + 6 = 16 سم

(10) في Δ ء ا هـ : ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ا هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ا}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ا هـ}}$

∴ $\frac{\text{ء س}}{\text{ء س} + 4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

∴ 3 ء س = 2 ء س + 8

∴ ء س = 8 سم

في Δ ا ب حـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا حـ}} = \frac{\text{ا ء}}{\text{ا ب}}$ ∴ $\frac{9}{12} = \frac{12}{\text{ا ب}}$

∴ ا ب = 16 سم

∴ ء ب = 16 − 12 = 4 سم

(11) في ΔΔ ا ب حـ ، هـ ء حـ

∵ ق(∠ا حـ ب) + ق(∠هـ حـ ء) = $90^\circ$

في Δ ا ب حـ : ق(∠ب) = $90^\circ$

∴ ق(∠ا حـ ب) + ق(∠حـ ا ب) = $90^\circ$

∴ ق(∠حـ ا ب) = ق(∠هـ حـ ء)





∴ Δ ا ب حـ ~ Δ حـ ء هـ

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{حـ هـ}}$

∴ $\frac{3}{6} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ ص = 2 س

∵ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = (5\sqrt{5})^2$

∴ $\text{س}^2 + (2\,\text{س})^2 = 125$

∴ $5\,\text{س}^2 = 125$ ∴ $\text{س}^2 = 25$

∴ س = 5 ∴ ص = 10

∴ س + ص = 5 + 10 = 15 سم

(12) في الشكل الرباعي ا س و ع :

∵ ق(∠ا س و) + ق(∠ا ع و) = $180^\circ$

∴ ا س و ع شكل رباعي دائري

∴ ق(∠ء و هـ) = ق(∠ا)

بالمثل ق(∠و ء هـ) = ق(∠ب)

∴ Δ ا ب حـ ~ Δ و ء هـ

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{و ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{و هـ}}$

∴ $\frac{12}{4} = \frac{9}{\text{و هـ}}$ ∴ و هـ = 3 سم

(13) في ΔΔ ا ء هـ ، حـ ب ء :

∵ ق(∠ا ء هـ) = ق(∠ء ب حـ) (بالتبادل)

ق(∠ا هـ ء) = ق(∠ب ء حـ) (بالتبادل)

∴ Δ ا ء هـ ~ Δ حـ ب ء

∴ $\frac{\text{ا ء}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ا هـ}}{\text{حـ ء}}$

، ∵ ب هـ = 2 هـ ء ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ء}} = \frac{1}{3}$

∴ $\frac{1}{3} = \frac{\text{ا هـ}}{6}$ ∴ ا هـ = 2 سم

(14) في Δ ا ب حـ : ∵ ق(∠ا) = $90^\circ$

∴ ∠ب تتمم ∠حـ

في Δ ص و حـ : ∵ ق(∠و) = $90^\circ$

∴ ∠حـ تتمم ∠و ص حـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠و ص حـ)

في ΔΔ ب هـ ء ، ص و حـ

∵ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠ص و حـ) = $90^\circ$

، ق(∠ب) = ق(∠و ص حـ)

∴ Δ ب هـ ء ~ Δ ص و حـ

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ص و}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص حـ}}$

∴ $\frac{8}{\text{ص و}} = \frac{\text{هـ ء}}{2}$ ∴ ص و × هـ ء = 16

∵ ء هـ و ص مربع ∴ ص و = هـ ء

∴ مساحة المربع ء هـ و ص = $(\text{ص و})^2$ = 16 $\text{سم}^2$

(15) في Δ ا ب حـ : ∵ $\overline{\text{ا ب}} \parallel \overline{\text{و هـ}}$

∴ $\frac{\text{حـ و}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{ا ب}}$ (1)

، في Δ ب حـ ء : ∵ $\overline{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{حـ ء}}$ (2)

بجمع (1) ، (2) :

∴ $\frac{\text{و هـ}}{\text{ا ب}} + \frac{\text{و هـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{حـ ب}} + \frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{3} + \frac{\text{و هـ}}{6} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{2} = 1$ ∴ و هـ = 2 سم

(16) في Δ ا ب حـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ا حـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}}$ (1)

في Δ ا ء ب : ∵ $\overline{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{ء ب}}$ (2)

بجمع (1) ، (2) :

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ا ب}} + \frac{\text{ا هـ}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} + \frac{\text{و هـ}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = \frac{6}{14} + \frac{\text{و هـ}}{6}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{6} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

∴ و هـ = $\frac{24}{7}$ سم

(17) ∵ ∠ا هـ حـ تكمل ∠ب هـ حـ

، ∠ا حـ ب تكمل ∠ا حـ ء

، ∵ ق(∠ب هـ حـ) = ق(∠ا حـ ء)

∴ ق(∠ا هـ حـ) = ق(∠ا حـ ب)

في ΔΔ أ هـ جـ ، أ جـ ب

∵ ق(∠ أ هـ جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ هـ جـ ~ Δ أ جـ ب

∴ أ هـ / أ جـ = هـ جـ / جـ ب = أ جـ / أ ب

∴ ٤ / ٨ = ٦ / جـ ب = ٨ / أ ب

∴ جـ ب = ١٢ سم ، أ ب = ١٦ سم

∴ ب هـ = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

∴ ب هـ + ب جـ = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

(١٨) ∵ أ ب // د جـ

∴ Δ أ هـ ب ~ Δ جـ هـ د

∴ أ هـ / جـ هـ = هـ ب / هـ د = أ ب / جـ د = ٤ / ٩

∴ أ هـ = ٤ س ، هـ جـ = ٩ س

، ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

، ب هـ ⊥ أ جـ

∴ (أ ب)² = أ هـ × أ جـ

∴ ١٦ = ٤ س × ١٣ س

∴ س² = ٤ / ١٣

، (ب جـ)² = جـ هـ × جـ أ = ٩ س × ١٣ س

= ٩ × ١٣ س² = ٩ × ١٣ × ٤ / ١٣

= ٣٦

∴ ب جـ = ٦ سم

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = (٤ + ٩) / ٢ × ٦

= ٣٩ سم²

## إرشادات تمارين 3

**1** (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (د)
(٦) (د) (٧) (أ) (٨) (د) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (جـ)

**2** ١/٩ ، ١/٣

**3** ∵ م(المضلع الأصغر) / م(المضلع الأكبر) = (١٢/١٦)² = ٩/١٦

∴ ١٣٥ / م(المضلع الأكبر) = ٩/١٦

∴ مساحة المضلع الأكبر = ٢٤٠ سم² (وهو المطلوب)

**4** ∵ مساحة المثلث الأول / مساحة المثلث الثاني = (٢/٥)²

∴ ١٦ / مساحة المثلث الثاني = ٤/٢٥

∴ مساحة المثلث الثاني = ١٠٠ سم² (وهو المطلوب)

**5** ∵ مساحة الأول / مساحة الثاني = ١٠٠/٦٤ = ٢٥/١٦

∴ محيط الأول / محيط الثاني = ٥/٤ ∴ ٦٠ / محيط الثاني = ٥/٤

∴ محيط الثاني = ٤٨ سم (وهو المطلوب)

**6** ∵ مساحة المثلث الأول / مساحة المثلث الثاني = (٣/٢)² = ٩/٤

ويفرض أن مساحة المثلث الأول = ٩ س

، مساحة المثلث الثاني = ٤ س

∵ ٩ س + ٤ س = ١٣٠ ∴ ١٣ س = ١٣٠

∴ س = ١٠

∴ مساحة المثلث الأول = ٩٠ سم²

، مساحة المثلث الثاني = ٤٠ سم² (وهو المطلوب)

**7** ∵ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين = ١ : ٣

∴ النسبة بين مساحتى المضلعين = ١ : ٩

ويفرض مساحة الأول = س





∴ مساحة الثاني = ٩ س ∴ ٩ س − س = ٣٢

∴ ٨ س = ٣٢ ∴ س = ٤

∴ مساحة الأول = ٤ سم²

، مساحة الثاني = ٣٦ سم² (وهو المطلوب)

**8** ∵ ΔΔ أ س ص ، أ جـ ب فيهما :

أ س / أ جـ = ٤/٨ = ١/٢ ، أ ص / أ ب = ٥/١٠ = ١/٢ ، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ جـ ب

∴ مساحة Δ أ س ص / مساحة Δ أ جـ ب = (أ س / أ جـ)² = (١/٢)² = ١/٤

(وهو المطلوب)

**9** ∵ أ ب // د جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ د جـ هـ) (متناظرتان) (١)

، ∵ أ جـ // د هـ

∴ ق(∠ ب جـ أ) = ق(∠ د هـ) (متناظرتان) (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د جـ هـ

∴ مساحة Δ أ ب جـ / مساحة Δ د جـ هـ = (أ ب / د جـ)² = (٣/٢)²

∴ مساحة Δ أ ب جـ / ١٦ = ٩/٤

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٣٦ سم² (وهو المطلوب)

**10** (١) ∵ ΔΔ جـ هـ أ ، ب هـ د فيهما

ق(∠جـ) = ق(∠ب) ، ق(∠ أ هـ جـ)

= ق(∠ د هـ ب) (متقابلتان بالرأس)

∴ مساحة Δ جـ هـ أ / مساحة Δ ب هـ د = (جـ هـ / ب هـ)² = (٥ ك / ٦ ك)²

∴ ٩٠٠ / مساحة Δ د هـ ب = ٢٥/٣٦

∴ مساحة Δ د هـ ب = ١٢٩٦ سم²

(٢) ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، أ د ⊥ ب جـ

∴ Δ د ب أ ~ Δ أ ب جـ

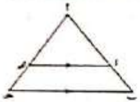
، (ب جـ)² = ١٦ ك² + ٩ ك² = ٢٥ ك²

∴ مساحة Δ د ب أ / مساحة Δ أ ب جـ = (أ ب / ب جـ)²

∴ ١٨٠ / مساحة Δ أ ب جـ = ٩/٢٥

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٥٠٠ سم²

**11**



∵ د هـ // ب جـ

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

∴ مساحة Δ أ د هـ / مساحة Δ أ ب جـ = (أ د / أ ب)² = (٢/٣)²

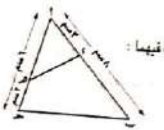
∴ ٦٠ / مساحة Δ أ ب جـ = ٤/٩

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ١٣٥ سم²

∴ للداخل مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم² (وهو المطلوب)

**12**



∵ ΔΔ أ د هـ ، أ جـ ب فيهما :

أ د / أ جـ = ٣/٦ = ١/٢

، أ هـ / أ ب = ٤/٨ = ١/٢

، ∠ أ مشتركة ∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

∴ مساحة Δ أ د هـ / مساحة Δ أ جـ ب = (أ د / أ جـ)² = (١/٢)² = ١/٤

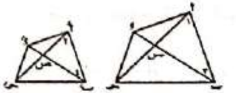
نفرض أن مساحة Δ أ د هـ = س

∴ مساحة Δ أ جـ ب = ٤ س

∴ مساحة الشكل د ب جـ هـ = ٤ س − س = ٣ س

∴ مساحة Δ أ د هـ / مساحة الشكل د ب جـ هـ = س / ٣ س = ١/٣ (وهو المطلوب)

**١٣**



∵ المضلعان متشابهان ∴ Δ ا ب جـ ~ Δ اَ بَ جَ

وينتج أن : ق (د ١) = ق (د ٢)

، Δ ا ب ء ~ Δ اَ بَ ءَ

وينتج أن : ق (د ٣) = ق (د ٤)

∴ Δ ا ب س ~ Δ اَ بَ ص

وينتج أن : $\frac{\text{ب س}}{\text{بَ ص}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{اَ بَ}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع ا ب جـ ء)}}{\text{م (المضلع اَ بَ جَ ءَ)}} = \frac{(\text{ا ب})^2}{(\text{اَ بَ})^2} = \frac{(\text{ب س})^2}{(\text{بَ ص})^2}$

(وهو المطلوب)

**١٤**

∵ ΔΔ ا ء جـ ، ب ء ا فيهما :

د ء مشتركة ، ق (د ء ا جـ) المماسية

= ق (د ب) المحيطية المشتركة معها فى القوس ا⌒جـ

∴ Δ ا ء جـ ~ Δ ب ء ا

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ ا ء جـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ ب ء ا}} = \left(\frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ب}}\right)^2 = \frac{4}{9}$

نفرض أن مساحة Δ ا ء جـ = ٤ س

∴ مساحة Δ ب ء ا = ٩ س

∴ مساحة Δ ا جـ ب

= مساحة Δ ب ء ا − مساحة Δ ا ء جـ

= ٩ س − ٤ س = ٥ س

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ ا ء جـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ ا جـ ب}} = \frac{4\text{ س}}{5\text{ س}} = \frac{4}{5}$ (وهو المطلوب)

**١٥**

∵ ΔΔ ا ب جـ ، ء ب ا فيهما :

د ب مشتركة ، ق (د جـ) = ق (د ء ا ب)

∴ Δ ا ب جـ ~ Δ ء ب ا (المطلوب أولًا)

وينتج أن : $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ا}}$

∴ $(\text{ا ب})^2$ = ء ب × ب جـ = ٦ × ٩

∴ ا ب = ٣ $\sqrt{6}$ سم (المطلوب ثانيًا)

∴ $\frac{\text{م }(\Delta \text{ ا ب جـ})}{\text{م }(\Delta \text{ ء ب ا})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ا}}\right)^2 = \left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2}$

(المطلوب ثالثًا)

**١٦**

∵ Δ ب هـ و ~ Δ ا ء و

∴ $\frac{\text{م }(\Delta \text{ ب هـ و})}{\text{م }(\Delta \text{ ا ء و})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ا و}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

، ∵ م (Δ ب هـ و) = ٩ سم$^2$

∴ م (Δ ا ء و) = ٩ × ٤ = ٣٦ سم$^2$ (١)

، ∵ Δ ب هـ و ~ Δ جـ هـ ء

∴ $\frac{\text{م }(\Delta \text{ ب هـ و})}{\text{م }(\Delta \text{ جـ هـ ء})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{جـ ء}}\right)^2$

$= \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب ا}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

، ∵ م (Δ ب هـ و) = ٩ سم$^2$

∴ م (Δ جـ هـ ء) = ٩ × ٩ = ٨١ سم$^2$

∴ م (المضلع ب و ء جـ)

= م (Δ جـ هـ ء) − م (Δ ب هـ و)

= ٨١ − ٩ = ٧٢ سم$^2$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ مساحة متوازى الأضلاع ا ب جـ ء = ١٠٨ سم$^2$

(وهو المطلوب)

**١٧**

∵ و جـ // ا ء ، ء و قاطع لهما

∴ ق (د و) = ق (د ا ء هـ) (بالتبادل)





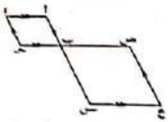
، ∵ ق (د جـ) = ق (د ا) (خواص متوازى الأضلاع)

∴ Δ ء جـ و ~ Δ هـ ا ء (المطلوب أولًا)

∴ $\frac{\text{م }(\Delta \text{ ء جـ و})}{\text{م }(\Delta \text{ هـ ا ء})} = \left(\frac{\text{ء جـ}}{\text{ا هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ا هـ}}\right)^2$

$= \frac{25}{9}$ (المطلوب ثانيًا)

**١٨**



∵ ق (د ا ب جـ)

= ق (د س ب ص)

(بالتقابل بالرأس)

∴ ق (د ا) = ق (د س) ، ق (د جـ) = ق (د ص)

، ق (د ء) = ق (د ع)

، ∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب س}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{جـ ء}}{\text{ص ع}} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ا ء}}{\text{س ع}} = \frac{1}{2}$

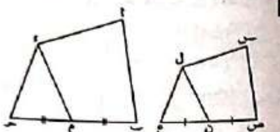
∴ متوازى الأضلاع ا ب جـ ء

~ متوازى الأضلاع س ب ص ع

∴ $\frac{\text{م (متوازى الأضلاع ا ب جـ ء)}}{\text{م (متوازى الأضلاع س ب ص ع)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(وهو المطلوب)

**١٩**



∵ المضلعين متشابهين

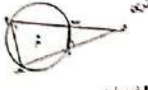
∴ Δ م ء جـ ~ Δ ن ل ع ∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ل ع}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع ا ب جـ ء)}}{\text{م (المضلع س ص ع ل)}} = \left(\frac{\text{ء جـ}}{\text{ل ع}}\right)^2 = \left(\frac{\text{م ء}}{\text{ن ل}}\right)^2$

∴ م (المضلع ا ب جـ ء) : م (المضلع س ص ع ل)

= $(\text{م ء})^2 : (\text{ن ل})^2$ (وهو المطلوب)

**٢٠**



∵ ا ب ء جـ شكل رباعى دائرى

، ء ∈ جـ هـ

∴ ق (د ١) = ق (د ٢)

∴ ΔΔ هـ ب ء ، هـ جـ ا فيهما :

ق (د ١) = ق (د ٢) ، د هـ مشتركة

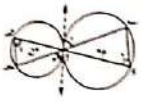
∴ Δ هـ ب ء ~ Δ هـ جـ ا

∴ $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ ب ء}}{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ جـ ا}} = \left(\frac{\text{ب ء}}{\text{ا جـ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(وهو المطلوب)

**٢١**

العمل : نرسم المماس المشترك للدائرتين عند ا



البرهان :

∵ ق (د ١) = ق (د ٢)

، ق (د ٣) = ق (د ٤)

، ق (د ١) = ق (د ٣)

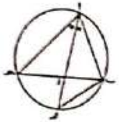
∴ ق (د ٢) = ق (د ٤)

، ∵ ق (د ب ا ء) = ق (د جـ ا هـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ ا ب ء ~ Δ ا جـ هـ

∴ $\frac{\text{م }(\Delta \text{ ا ب ء})}{\text{م }(\Delta \text{ ا جـ هـ})} = \frac{(\text{ب ء})^2}{(\text{جـ هـ})^2}$ (وهو المطلوب)

**٢٢**



∵ ΔΔΔ ا ب هـ ، ا ء جـ

، ب ء هـ فيها :

ق (د ب ا هـ) = ق (د ء ا جـ)

= ق (د ء ب هـ)

، ق (د ا هـ ب) = ق (د ا جـ ء) = ق (د ب هـ ء)

∴ Δ ا ب هـ ~ Δ ا ء جـ ~ Δ ب ء هـ

∴ م (Δ ا ب هـ) : م (Δ ا ء جـ) : م (Δ ب ء هـ)

= $(\text{ب هـ})^2 : (\text{ء جـ})^2 : (\text{ء هـ})^2$ (وهو المطلوب)

**٢٣**



∵ Δ أبحـ ~ Δ س ص ع

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبحـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{س ص ع})} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}}\right)^{2}$

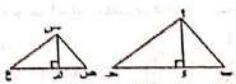
، ولكن $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبحـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{س ص ع})} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ب حـ} \times \text{أ ء}}{\frac{1}{2}\,\text{ص ع} \times \text{س ل}}$

∴ $\left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}}\right)^{2} = \frac{\text{ب حـ} \times \text{أ ء}}{\text{ص ع} \times \text{س ل}}$ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}$

∴ ب حـ × س ل = أ ء × ص ع (وهو المطلوب)

**٢٤**

(١)



بفرض أن Δ أبحـ ~ Δ س ص ع

وأن الارتفاع $\overline{\text{أ ء}}$ هو المناظر للارتفاع $\overline{\text{س هـ}}$

∴ $\frac{\text{مساحة }\Delta\,\text{أبحـ}}{\text{مساحة }\Delta\,\text{س ص ع}} = \frac{(\text{ب حـ})^{2}}{(\text{ص ع})^{2}}$

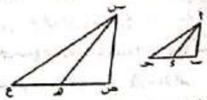
∴ $\frac{\frac{1}{2}\,\text{ب حـ} \times \text{أ ء}}{\frac{1}{2}\,\text{ص ع} \times \text{هـ س}} = \frac{(\text{ب حـ})^{2}}{(\text{ص ع})^{2}}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}}$

∴ النسبة بين الارتفاعين المتناظرين تساوى النسبة بين طولى ضلعين متناظرين.

∴ النسبة بين مساحتى المثلثين المتشابهين تساوى مربع النسبة بين الارتفاعين المتناظرين. (وهو المطلوب)

(٢)



بفرض أن Δ أبحـ ~ Δ س ص ع

، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$ متوسطان متناظران فيهما

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}}$ ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ب حـ}}{\frac{1}{2}\,\text{ص ع}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص هـ}}$

∴ ΔΔ أ ب ء ، س ص هـ فيهما :

ق (∠ ب) = ق (∠ ص) ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ص هـ}}$

∴ Δ أ ب ء ~ Δ س ص هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س هـ}}$

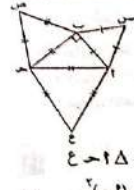
∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فى المثلثين أ ب حـ ، س ص ع تساوى النسبة بين طولى المتوسطين المتناظرين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$

∴ $\frac{\text{مساحة }\Delta\,\text{أبحـ}}{\text{مساحة }\Delta\,\text{س ص ع}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^{2} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{س هـ}}\right)^{2}$

أى مربع النسبة بين طولى المتوسطين المتناظرين.

(وهو المطلوب)

**٢٥**



∵ ΔΔΔ أ ب س

، ب حـ ص ، أ حـ ع

متساويات الأضلاع

∴ Δ أ ب س ~ Δ ب حـ ص ~ Δ أ حـ ع

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب س})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ حـ ع})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{أ ب})^{2}}{(\text{أ حـ})^{2}}$ (١)

، $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{ب حـ ص})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ حـ ع})} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{ب حـ})^{2}}{(\text{أ حـ})^{2}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب س}) + \text{م}(\Delta\,\text{ب حـ ص})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ حـ ع})}$

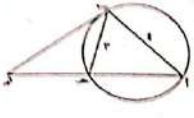
$= \frac{(\text{أ ب})^{2} + (\text{ب حـ})^{2}}{(\text{أ حـ})^{2}} = \frac{(\text{أ حـ})^{2}}{(\text{أ حـ})^{2}}$

∴ م (Δ أ ب س) + م (Δ ب حـ ص) = م (Δ أ حـ ع)

(هو المطلوب)



**٢٦**



∵ ΔΔ ب حـ هـ ، أ ب هـ فيهما :

ق (∠ حـ ب هـ) المماسية

= ق (∠ ء أ) المحيطية

المشتركة معها فى $\frown{\text{ب حـ}}$

، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ ب حـ هـ ~ Δ أ ب هـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{ب حـ هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب هـ})} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}\right)^{2} = \frac{9}{16}$

∴ م (Δ ب حـ هـ) = ٩ س

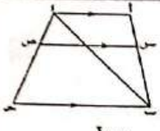
∴ م (Δ أ ب هـ) = ١٦ س

∴ م (Δ أ ب حـ) = م (Δ ب حـ هـ) − م (Δ أ ب هـ)

= ١٦ س − ٩ س = ٧ س

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب هـ})} = \frac{7\,\text{س}}{16\,\text{س}} = \frac{7}{16}$ (وهو المطلوب)

**٢٧**



∵ المضلع أ س ص ء

~ المضلع س ب حـ ص

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ س ص ء})}{\text{م}(\text{المضلع س ب حـ ص})} = \frac{(\text{أ ء})^{2}}{(\text{س ص})^{2}}$

لكن من التشابه $\frac{\text{أ ء}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب حـ}}$

∴ (س ص)$^{2}$ = أ ء × ب حـ

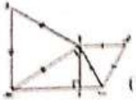
∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ س ص ء})}{\text{م}(\text{المضلع س ب حـ ص})} = \frac{(\text{أ ء})^{2}}{\text{أ ء} \times \text{ب حـ}}$

$= \frac{\text{أ ء}}{\text{ب حـ}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب ء})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء ب حـ})} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب حـ}}$ (لتساوى ارتفاعيهما)(٢)

من (١) ، (٢) : ينتج المطلوب

**٢٨**



∵ Δ أ ء ب ~ Δ حـ ء أ

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حـ أ}}$ (١)

، ∵ Δ أ ب هـ ~ Δ حـ أ و

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{حـ أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{أ و}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{حـ و}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين أ ء ب هـ ، حـ ء أ و متناسبة.

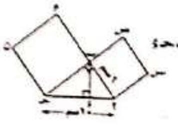
، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين أ ء ب هـ ، حـ ء أ و متساوية فى القياس (لماذا ؟)

∴ المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع حـ ء أ و (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ء ب هـ})}{\text{م}(\text{المضلع حـ ء أ و})} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{حـ ء}}\right)^{2} = \frac{(\text{أ ء})^{2}}{(\text{حـ ء})^{2}}$

$= \frac{\text{ب ء} \cdot \text{ء حـ}}{(\text{حـ ء})^{2}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حـ ء}}$ (المطلوب ثانياً)

**٢٩**



∵ Δ أ ب ء ~ Δ ب حـ ء

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حـ ء}}$

$= \frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ب م}} = \frac{\text{س ص}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{حـ ن}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ب م}} = \frac{\text{س ص}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{حـ ن}}$

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين ء أ س ص ب ، ء ب م ن حـ متناسبة

، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين ء أ س ص ب ، ء ب م ن حـ متساوية فى القياس (لماذا ؟)

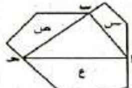
∴ المضلع ء أ س ص ب ~ المضلع ء ب م ن حـ (المطلوب أولاً)

، ∵ ب حـ = $\sqrt{100 - 36}$ = ٨ سم

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ء أ س ص ب)}}{\text{م (المضلع ء ب م ن حـ)}} = \left(\frac{٦}{٨}\right)^{٢} = \frac{٣٦}{٦٤} = \frac{٩}{١٦}$

(المطلوب ثانيًا)

**٣٠**




$\because$ المضلع س ~ المضلع ع

$\therefore \frac{\text{م (المضلع س)}}{\text{م (المضلع ع)}}$

$= \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ حـ})^{٢}}$ (١)

، $\because$ المضلع ص ~ المضلع ع

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢} = \frac{(\text{ب حـ})^{٢}}{(\text{أ حـ})^{٢}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \frac{\text{م (المضلع س) + م (المضلع ص)}}{\text{م (المضلع ع)}}$

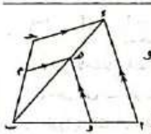
$= \frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}}{(\text{أ حـ})^{٢}}$

$\therefore \frac{٤٠ + ٨٥}{١٢٥} = \frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}}{(\text{أ حـ})^{٢}}$

$\therefore (\text{أ حـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$

$\therefore \triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية في ب (وهو المطلوب)

**٣١**




المضلعان ب حـ ء أ ، ب م هـ و فيهما :

(أ) قياسات زواياهما المتناظرة متساوية لأن : ∠ب مشتركة

، ق (∠أ) = ق (∠ب و هـ) (بالتناظر)

، ق (∠حـ) = ق (∠ب م هـ) (بالتناظر)

، ق (∠أ ء حـ) = ق (∠و هـ م)

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة لأن :

$\triangle$ ب أ ء ~ $\triangle$ ب و هـ

$\therefore \frac{\text{ب أ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب هـ}}$

، $\triangle$ ب ء حـ ~ $\triangle$ ب هـ م

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{هـ م}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب م}}$

$\therefore \frac{\text{ب أ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{هـ م}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب م}}$ (١)

$\therefore$ المضلع ب حـ ء أ ~ المضلع ب م هـ و

$\therefore$ من (١) : $\frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}} \times \frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب حـ}} \times \frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}}$

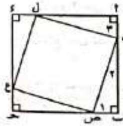
$\therefore \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب م} \times \text{ب و}}{\text{ب حـ} \times \text{ب أ}}$

، $\because \frac{\text{م (المضلع ب م هـ و)}}{\text{م (المضلع ب حـ ء أ)}} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}}\right)^{٢}$

$\therefore \frac{\text{م (المضلع ب م هـ و)}}{\text{م (المضلع ب حـ ء أ)}} = \frac{\text{ب م} \times \text{ب و}}{\text{ب حـ} \times \text{ب أ}}$

(وهو المطلوب)

**٣٢**




بفرض أن المربع أ ب حـ ء طول ضلعه ك وحدة طول

$\therefore$ أ س = $\frac{١}{٤}$ك وحدة طول

، ب س = $\frac{٣}{٤}$ك وحدة طول

، ب ص = $\frac{١}{٤}$ك وحدة طول ، أ ل = $\frac{٣}{٤}$ك وحدة طول

$\therefore \triangle\triangle$ أ س ل ، ب ص س القائما الزاوية فيهما :

س ب = أ ل ، ب ص = أ س

$\therefore \triangle$ أ س ل $\equiv \triangle$ ب ص س

$\therefore$ س ل = س ص وبالمثل يمكن إثبات أن :

ل ع = ع ص ، ق (∠١) = ق (∠٣)

، $\because$ ق (∠١) + ق (∠٢) = ٩٠°

$\therefore$ ق (∠٢) + ق (∠٣) = ٩٠°





$\therefore$ ق (∠ل س ص) = ٩٠°

$\therefore$ س ص ع ل مربع (المطلوب أولًا)

، طول ضلعه = $\sqrt{\left(\frac{١}{٤}\text{ك}\right)^{٢} + \left(\frac{٣}{٤}\text{ك}\right)^{٢}}$

$= \frac{\sqrt{١٠}}{٤}$ ك وحدة طول

، $\because$ كل المربعات متشابهة

$\therefore \frac{\text{م (المربع س ص ع ل)}}{\text{م (المربع أ ب حـ ء)}} = \left(\frac{\frac{\sqrt{١٠}}{٤}\text{ك}}{\text{ك}}\right)^{٢} = \frac{٥}{٨}$

(المطلوب ثانيًا)

**٣٣**

$\because$ ق (∠حـ ب ص) = ق (∠حـ ء ص)

(محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{حـ ص}}$ )

، ق (∠حـ ء ص) = ق (∠س) (بالتناظر)

$\therefore$ ق (∠حـ ب ص) = ق (∠س)

، $\because$ ق (∠ب ء س) = ق (∠ب حـ ص) خارجة عن الرباعي الدائري ب حـ ص ء

$\therefore \triangle$ ء ب س ~ $\triangle$ حـ ص ب

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ ء ب س)}}{\text{م (}\triangle\text{ حـ ص ب)}} = \frac{(\text{ب س})^{٢}}{(\text{ص ب})^{٢}}$ (وهو المطلوب)

**٣٤**

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)

(٩) (أ) (١٠) (د) (١١) (ب) (١٢) (د)

إرشادات لحل رقم **٣٤**

(١) $\because \overline{\text{و ص}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$ $\therefore \triangle$ أ و ص ~ $\triangle$ أ حـ ء

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ و ص)}}{\text{م (}\triangle\text{ أ حـ ء)}} = \left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢}$

$\therefore \left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢} = \frac{٥}{٥ + ٤٠} = \frac{١}{٩}$

، $\because \overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{هـ و}}$

$\therefore \triangle$ أ هـ و ~ $\triangle$ أ ب حـ

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ و)}}{\text{م (}\triangle\text{ أ ب حـ)}} = \left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢}$

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ و)}}{\text{م (}\triangle\text{ أ ب حـ)}} = \frac{١}{٩}$

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ و)}}{\text{م (}\triangle\text{ أ ب حـ) - م (}\triangle\text{ أ هـ و)}} = \frac{١}{٩ - ١} = \frac{١}{٨}$

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ و)}}{٣٢} = \frac{١}{٨}$

$\therefore$ م ($\triangle$ أ هـ و) = ٤ سم$^{٢}$

(٢) $\because \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \triangle$ أ س ص ~ $\triangle$ أ ب حـ

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ س ص)}}{\text{م (}\triangle\text{ أ ب حـ)}} = \left(\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢}$

$\therefore \left(\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}}\right)^{٢} = \frac{٤٠}{٥٠ + ٤٠} = \frac{٤}{٩}$

، $\because \overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{حـ ء}}$

$\therefore \frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{أ ء}}$ $\therefore \left(\frac{\text{أ ع}}{\text{أ ء}}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

$\therefore \frac{\text{أ ع}}{\text{أ ء}} = \frac{٢}{٣}$ $\therefore \frac{\text{ء ع}}{\text{ء أ}} = \frac{١}{٣}$

، $\because \overline{\text{ع م}} \parallel \overline{\text{أ هـ}}$

$\therefore \triangle$ ء ع م ~ $\triangle$ ء أ هـ

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ ء ع م)}}{\text{م (}\triangle\text{ ء أ هـ)}} = \left(\frac{\text{ء ع}}{\text{ء أ}}\right)^{٢}$

$\frac{١٣}{١٣ + \text{م (الشكل أ هـ م ع)}} = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ ١٣ + م (الشكل أ هـ م ع) = ١١٧

$\therefore$ م (الشكل أ هـ م ع) = ١١٧ − ١٣ = ١٠٤ سم$^{٢}$

(٣) في $\triangle$ أ هـ ء ، $\triangle$ ب حـ أ

$\because$ ق (∠أ هـ ء) = ق (∠أ حـ ب) = ٩٠°

، ق (∠ء أ هـ) = ق (∠حـ ب أ)

$\therefore \triangle$ أ هـ ء ~ $\triangle$ ب حـ أ

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ ء)}}{\text{م (}\triangle\text{ ب حـ أ)}} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}\right)^{٢}$

$\therefore \frac{\text{م (}\triangle\text{ أ هـ ء)}}{\text{م (}\triangle\text{ ب حـ أ)}} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$

$\therefore \frac{٦}{\text{م (}\triangle\text{ ب حـ أ)}} = \frac{١}{٩}$

∴ م(Δ أ حـ ب) = ٥٤ سم$^2$

∴ مساحة الجزء المظلل = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم$^2$

(٤) في Δ أ س ص : ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ س ص

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ء هـ)}}{\text{م(Δ أ س ص)}} = \left(\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ص}}\right)^2 = \left(\frac{٢}{٨}\right)^2 = \frac{١}{١٦}$

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ء هـ)}}{\text{م(Δ أ ء هـ) + م(الشكل ء س ص هـ)}} = \frac{١}{١٦}$

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ء هـ)}}{\text{م(Δ أ ء هـ) + ٣٠}} = \frac{١}{١٦}$

∴ ١٦ م(Δ أ ء هـ) = م(Δ أ ء هـ) + ٣٠

∴ ١٥ م(Δ أ ء هـ) = ٣٠

∴ م(Δ أ ء هـ) = ٢ سم$^2$

في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م(Δ أ س ص)}}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}}\right)^2$

∴ $\frac{٢ + ٣٠}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{٨}{١٠}\right)^2 = \frac{١٦}{٢٥}$

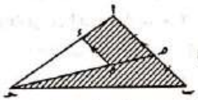
∴ م(Δ أ ب حـ) = $\frac{٣٢ \times ٢٥}{١٦}$ = ٥٠ سم$^2$

∴ مساحة الشكل س ب حـ ص = ٥٠ − ٣٢

= ١٨ سم$^2$

(٥) العمل :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{حـ م}}$ ليقطع $\overline{\text{أ ب}}$ عند هـ




∵ م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

∴ $\overline{\text{حـ هـ}}$ متوسط

∴ م(Δ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ م(Δ أ ب حـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ سم$^2$

، ∵ $\frac{\text{حـ م}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٢}{٣}$ ، ∵ $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{أ هـ}}$

∴ Δ حـ م ء ~ Δ حـ هـ أ

∴ $\frac{\text{م(Δ حـ م ء)}}{\text{م(Δ حـ هـ أ)}} = \left(\frac{\text{حـ م}}{\text{حـ هـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م(Δ حـ م ء)}}{١٨} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ م(Δ حـ م ء) = ٨ سم$^2$

∴ مساحة الجزء المظلل = ٣٦ − ٨ = ٢٨ سم$^2$

(٦) في ΔΔ د ء هـ ، أ ب حـ :

∵ ق(∠ د ء هـ) = ق(∠ أ ب حـ) (بالتناظر)

، ق(∠ د هـ ء) = ق(∠ أ حـ ب) (بالتناظر)

∴ Δ د ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م(Δ د ء هـ)}}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}\right)^2$

∴ $\frac{٦}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{٣}{٩}\right)^2 = \frac{١}{٩}$

∴ م(Δ أ ب حـ) = ٥٤ سم$^2$

∴ مساحة المنطقة المظللة = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم$^2$

(٧) ∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب حـ)}}{\text{م(Δ ء هـ و)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \left(\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right)^2$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + ٢\text{س} + ١}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٧) - (\text{س} + ٢)}$

$= \frac{\text{س}^2}{(\text{س}^2 + ٢\text{س} + ١) - \text{س}^2}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{٥} = \frac{\text{س}^2}{٢\text{س} + ١}$

∴ (س + ٢) (٢ س + ١) = ٥ س$^2$

∴ ٢ س$^2$ + ٥ س + ٢ = ٥ س$^2$





∴ ٣ س$^2$ − ٥ س − ٢ = ٠

∴ (٣ س + ١) (س − ٢) = ٠

∴ س = − $\frac{١}{٣}$ مرفوض أ، س = ٢

(٨) في Δ أ ب حـ : ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ء هـ)}}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ء هـ)}}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^2 = \frac{٤}{٢٥}$

∴ م(Δ أ ء هـ) = $\frac{٤}{٢٥}$ × م(Δ أ ب حـ)

، ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

∴ Δ حـ و هـ ~ Δ حـ ب أ

∴ $\frac{\text{م(Δ حـ و هـ)}}{\text{م(Δ حـ ب أ)}} = \left(\frac{\text{و هـ}}{\text{أ ب}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م(Δ حـ و هـ)}}{\text{م(Δ حـ ب أ)}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^2 = \frac{٩}{٢٥}$

∴ م(Δ حـ و هـ) = $\frac{٩}{٢٥}$ × م(Δ حـ ب أ)

∴ مساحة (▱ ء ب و هـ) = م(Δ أ ب حـ)

− (م(Δ أ ء هـ) + م(Δ حـ و هـ))

= م(Δ أ ب حـ) − ( $\frac{٤}{٢٥}$ × م(Δ أ ب حـ)

+ $\frac{٩}{٢٥}$ × م(Δ أ ب حـ))

= $\frac{١٢}{٢٥}$ × م(Δ أ ب حـ)

∴ $\frac{\text{مساحة (▱ ء ب و هـ)}}{\text{م(Δ أ ب حـ)}} = \frac{١٢}{٢٥}$

(٩) مساحة المربع أ ب حـ ء = ٦ × ٦ = ٣٦ سم$^2$

∴ مساحة Δ ء ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ سم$^2$

∵ $\overline{\text{و ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ ء و ص ~ Δ ء حـ ب

∴ $\frac{\text{م(Δ ء و ص)}}{\text{م(Δ ء حـ ب)}} = \left(\frac{\text{ء و}}{\text{ء حـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م(Δ ء و ص)}}{١٨} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^2$

∴ م(Δ ء و ص) = ٨ سم$^2$

، ∵ $\overline{\text{س هـ}}$ // $\overline{\text{ص و}}$

∴ Δ ء هـ س ~ Δ ء و ص

∴ $\frac{\text{م(Δ ء هـ س)}}{\text{م(Δ ء و ص)}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م(Δ ء هـ س)}}{٨} = \left(\frac{١}{٢}\right)^2$

∴ م(Δ ء هـ س) = ٢ سم$^2$

∴ مساحة (الشكل س ص و هـ) = ٨ − ٢

= ٦ سم$^2$

(١٠) س + ص = $\sqrt{(١٢)^2 + ٩^2}$ = ١٥ سم

، ع = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

∴ س + ص + ع = ٢٢,٢ سم

(١١) في ΔΔ أ ب هـ ، هـ ب و

$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس ب

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب هـ)}}{\text{م(Δ هـ ب و)}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{و ء}}$

∴ Δ أ هـ ب ~ Δ و هـ ء

∴ $\frac{\text{م(Δ أ هـ ب)}}{\text{م(Δ و هـ ء)}} = \left(\frac{\text{أ هـ}}{\text{و هـ}}\right)^2 = \left(\frac{٢}{٣}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{٢}{\text{م(Δ و هـ ء)}} = \frac{٤}{٩}$

∴ م(Δ و هـ ء) = ٤,٥ سم$^2$

، مساحة المستطيل = ٢ مساحة Δ ب و ء

= ٢ × (٣ + ٤,٥) = ١٥ سم$^2$

∴ مساحة الجزء المظلل = ١٥ − (٢ + ٣ + ٤,٥)

= ٥ $\frac{١}{٢}$ سم$^2$

(١٢) ∵ معامل تشابه المضلع $م_1$ للمضلع $م_2$ هو $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع } م_1)}{\text{م (المضلع } م_2)} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$

، معامل تشابه المضلع $م_3$ للمضلع $م_2$ هو $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع } م_3)}{\text{م (المضلع } م_2)} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = \frac{١}{٩}$

∴ م (المضلع $م_1$) : م (المضلع $م_2$) : م (المضلع $م_3$)

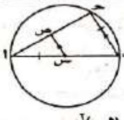
= ٤ : ٩ : ١

∴ $\sqrt{\text{مساحة } (م_1)} + \sqrt{\text{مساحة } (م_3)}$

$= \sqrt{٤ ك} + \sqrt{ك} = ٣ \sqrt{ك}$

، $\sqrt{\text{مساحة } (م_2)} = \sqrt{٩ ك} = ٣ \sqrt{ك}$

**٣٥**




∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ ا ب حـ ~ Δ ا س ص

∴ $\frac{\text{م (Δ ا ب حـ)}}{\text{م (Δ ا س ص)}} = \frac{(\text{ا ب})^٢}{(\text{ا س})^٢} = \frac{(\text{ا ب})^٢}{(\text{حـ ب})^٢}$

∴ م (المضلع س ب حـ ص) = م (Δ ا ب حـ)

− م (Δ ا س ص)

∴ $\frac{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}}{\text{م (Δ ا ب حـ)}}$

$= \frac{\text{م (Δ ا ب حـ)} - \text{م (Δ ا س ص)}}{\text{م (Δ ا ب حـ)}}$

$= ١ - \frac{\text{م (Δ ا س ص)}}{\text{م (Δ ا ب حـ)}} = ١ - \frac{(\text{حـ ب})^٢}{(\text{ا ب})^٢}$

$= \frac{(\text{ا ب})^٢ - (\text{ب حـ})^٢}{(\text{ا ب})^٢}$

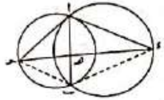
، ∵ ∠ ا حـ ب قائمة (محيطية فى نصف دائرة)

∴ $(\text{ا ب})^٢ - (\text{ب حـ})^٢ = (\text{ا حـ})^٢$

∴ $\frac{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}}{\text{م (Δ ا ب حـ)}} = \frac{(\text{ا حـ})^٢}{(\text{ا ب})^٢}$

∴ $\frac{\text{م (Δ ا ب حـ)}}{\text{م (المضلع س ب حـ ص)}} = \frac{(\text{ا ب})^٢}{(\text{ا حـ})^٢}$ (وهو المطلوب)

**٣٦**




العمل :

نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$

البرهان :

∵ $\frac{\text{م (Δ ا ء هـ)}}{\text{م (Δ ا حـ هـ)}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{م (Δ ب ء هـ)}}{\text{م (Δ ب حـ هـ)}}$

∴ $\frac{\text{م (Δ ا ء هـ)} + \text{م (Δ ب ء هـ)}}{\text{م (Δ ا حـ هـ)} + \text{م (Δ ب حـ هـ)}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}}$

∴ $\frac{\text{م (Δ ا ب ء)}}{\text{م (Δ ا ب حـ)}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}}$ (١)

، ∵ ق (∠ ء ا ب) = ق (∠ ا حـ ب)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$)

، وبالمثل ق (∠ ا ء ب) = ق (∠ ب ا حـ)

∴ Δ ا ء ب ~ Δ حـ ا ب

∴ $\frac{\text{م (Δ ا ء ب)}}{\text{م (Δ حـ ا ب)}} = \frac{(\text{ا ء})^٢}{(\text{حـ ا})^٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{(\text{ا ء})^٢}{(\text{حـ ا})^٢}$

∴ $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{(\text{ا حـ})^٢}{(\text{ا ء})^٢}$ (وهو المطلوب)

**٣٧**

∵ أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع

يكونان متشابهين

∴ $\frac{\text{م (المربع ا ب حـ ء)}}{\text{م (المربع أ َ ب َ حـ َ ء َ)}} = \frac{(\text{ا ب})^٢}{(\text{أ َ ب َ})^٢}$

بفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ ا ب = نق $\sqrt{٢}$ (لأن قطر المربع ا ب حـ ء قطر فى الدائرة)

، أ َ ب َ = ٢ نق (لأن طول ضلع المربع أ َ ب َ حـ َ ء َ يساوى طول قطر الدائرة)

∴ $\frac{\text{م (المربع ا ب حـ ء)}}{\text{م (المربع أ َ ب َ حـ َ ء َ)}} = \frac{(\text{نق} \sqrt{٢})^٢}{(\text{٢ نق})^٢} = \frac{١}{٢}$

(وهو المطلوب)





## إرشادات تمارين 4

**١**

(١) ٦ (٢) ٣ (٣) ٤ (٤) ٨

(٥) ٦ (٦) ٤ $\sqrt{٧}$ (٧) ٤,٨ (٨) ٤ $\sqrt{٧}$

(٩) ٣ (١٠) ٦ (١١) ٣ (١٢) ٤

**٢**

(١) ∵ ا هـ × هـ ب = ٦ × ٧ = ٤٢

، حـ هـ × هـ ء = ٥ × ٨,٤ = ٤٢

∴ ا هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ النقط ا ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(٢) ، (٣) النقط ا ، ب ، حـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة لأن النقط ا ، ب ، ء تقع على استقامة واحدة.

(٤) ∵ ا هـ × هـ ب = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

، حـ هـ × هـ ء = ١٠ × ١٠ = ١٠٠

∴ ا هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ النقط ا ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٥) ∵ ا هـ × ب هـ = ١٢ × ٣ = ٣٦

، حـ هـ × ء هـ = ٩ × ٤ = ٣٦

∴ النقط ا ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٦) ∵ ا هـ × ب هـ = ٦ × ٣,٦ = ٢١,٦

، حـ هـ × ء هـ = ٧,٢ × ٢,٨ = ٢٠,١٦

∴ ا هـ × ب هـ ≠ حـ هـ × ء هـ

∴ النقط ا ، ب ، حـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة.

**٣** (١) ، (٤) ، (٦)

**٤**

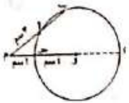
∵ $(\text{س ا})^٢$ = س ب × س حـ

∴ $(١٥)^٢$ = ٩ (٩ + ب حـ)

∴ ٢٢٥ = ٩ (٩ + ٢ نق) ∴ ٢٥ = ٩ + ٢ نق

∴ نق = ٨ سم (وهو المطلوب)

**٥**




نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة فى حـ ، ء

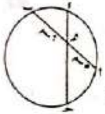
∴ م ء = ٦ + ٤ = ١٠ سم

، ∵ م ا × م ب = م حـ × م ء

∴ ٣ × م ب = ٢ × ١٠ ∴ م ب = $٦\frac{٢}{٣}$ سم

∴ ا ب = $٦\frac{٢}{٣} - ٣ = ٣\frac{٢}{٣}$ سم (وهو المطلوب)

**٦**




بفرض حـ هـ = س سم

∴ ء هـ = (١١,٥ − س) سم

، ∵ ا هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ ٥ × ٦ = س $\left(\frac{٢٣}{٢} - \text{س}\right)$

∴ ٢ $\text{س}^٢$ − ٢٣ س + ٦٠ = ٠

∴ (٢ س − ١٥) (س − ٤) = ٠

∴ طولا $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$ هما ٧,٥ سم ، ٤ سم

(وهو المطلوب)

**٧**

∵ $(\text{ا ب})^٢$ = ا حـ × ا ء

∴ $(٥\sqrt{٢})^٢ = \frac{١}{٢}$ ا ء × ا ء ∴ ٥٠ = $\frac{١}{٢} (\text{ا ء})^٢$

∴ ا ء = ١٠ سم (وهو المطلوب)

**٨**

∵ $\overline{\text{ا ء}}$ مماسة ، $\overline{\text{ا ب}}$ قطر ∴ ق (∠ ء ا ب) = ٩٠°

، ∵ $(\text{ا ء})^٢$ = ء حـ × ء ب = ٤ × ١٦ = ٦٤

∴ $(\text{ا ب})^٢ = (\text{ء ب})^٢ - (\text{ا ء})^٢$

∴ $(\text{ا ب})^٢ = (١٦)^٢ - ٦٤ = ١٩٢ = (\text{٢ نق})^٢$

∴ $\text{نق}^٢$ للدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ١٩٢ = ٤٨

∴ مساحة الدائرة م = ٤٨ π $\text{سم}^٢$ (وهو المطلوب)

**٩**

من الدائرة الكبرى :

(س ص)$^{2}$ = س حـ × س ء (١)

، من الدائرة الصغرى :

(س ص)$^{2}$ = س أ × س ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س حـ × س ء = س أ × س ب

∴ س حـ / س ب = س أ / س ء (وهو المطلوب)

**١٠**

∵ ء ن × ن ب = هـ ن × ن و ∴ ء ن × ٦ = ٢ × ٩

∴ ء ن = ٣ سم ∴ أ ب = ٣ سم

∴ (أ حـ)$^{2}$ = أ ب × أ ء = ٣ × ١٢

∴ أ حـ = ٦ سم (المطلوب أولاً)

∵ ΔΔ أ حـ ب ، أ ء حـ فيهما : ∠ أ مشتركة

، ق (∠ أ حـ ب) المماسية = ق (∠ ء) المحيطية

∴ Δ أ حـ ب ~ Δ أ ء حـ

∴ مساحة Δ أ حـ ب / مساحة Δ أ ء حـ = (أ حـ / أ ء)$^{2}$ = (٦ / ١٢)$^{2}$ = ١/٤ (المطلوب ثانيًا)

**١١**

∵ م ب × م أ = م ص × م س (١)

، ∵ م حـ × م ء = م ص × م س (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م ب × م أ = م حـ × م ء

∴ أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة (وهو المطلوب)

**١٢**

∵ ΔΔ س ل م ، س ع ص فيهما :

س ل / س ع = ٤/٨ = ١/٢ ، س م / س ص = ٦/١٢ = ١/٢

، ∠ س مشتركة

∴ Δ س ل م ~ Δ س ع ص (المطلوب أولاً)

، س ل / س ع = س م / س ص

∴ س ل × س ص = س م × س ع

∴ الشكل ل ص ع م رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

**١٣**




∵ أ هـ = ٥/١٢ ب هـ

، ب هـ = ٦ سم

∴ أ هـ = ٢,٥ سم

، ∵ ء هـ = ٣/٥ حـ هـ ، حـ هـ = ٥ سم

∴ ء هـ = ٣ سم

∵ أ هـ × ب هـ = ٢,٥ × ٦ = ١٥

، ء هـ × هـ حـ = ٣ × ٥ = ١٥

∴ أ هـ × ب هـ = ء هـ × هـ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

**١٤** (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (د)

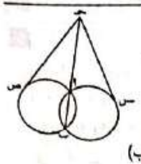
**١٥**

∵ (ن س)$^{2}$ = ن ب × ن أ ، (ن س)$^{2}$ = ن حـ × ن ء

∴ ن ب × ن أ = ن حـ × ن ء

∴ ن ب / ن حـ = ن ء / ن أ (وهو المطلوب)

**١٦**




∵ (حـ س)$^{2}$ = حـ أ × حـ ب

، (حـ ص)$^{2}$ = حـ أ × حـ ب

∴ حـ س = حـ ص

(وهو المطلوب)





**١٧**

فى الدائرة م :

(أ ب)$^{2}$ = أ و × أ هـ ∴ (أ ب)$^{2}$ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أ ب = ٦ سم (١)

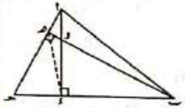
فى الدائرة ن : (أ حـ)$^{2}$ = أ هـ × أ ء = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ أ حـ = ١٢ سم (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ ب = ١/٢ أ حـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ (وهو المطلوب)

**١٨**




العمل : نرسم $\overline{\text{هـ ء}}$

البرهان : ∵ الشكل

و ء حـ هـ رباعى دائرى

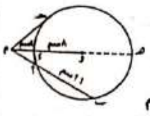
∴ أ هـ × أ حـ = أ و × أ ء

، ∵ الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى

∴ ب و × و هـ = أ و × و ء

وبالقسمة : أ هـ × أ حـ / ب و × و هـ = أ ء / و ء (وهو المطلوب)

**١٩**




نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة

فى ء ، هـ

∴ م هـ = ١٢ + ٨ = ٢٠ سم

، ∵ م أ × م ب = م ء × م هـ

∴ م أ (م أ + ١١) = ٤ × ٢٠

∴ (م أ)$^{2}$ + ١١ م أ − ٨٠ = ٠

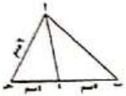
∴ (م أ + ١٦) (م أ − ٥) = ٠

∴ م أ = ٥ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ (م حـ)$^{2}$ = م ء × م هـ = ٤ × ٢٠ = ٨٠

∴ م حـ = $\sqrt{٨٠}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم (المطلوب ثانيًا)

**٢٠**




∵ (أ حـ)$^{2}$ = حـ ء × ب حـ

∴ $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسة للدائرة

المارة بالنقط أ ، ب ، ء (المطلوب أولاً)

، ∵ ΔΔ أ حـ ء ، ب حـ أ فيهما :

ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ب)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\widehat{\text{أ ء}}$)

، ∠ حـ مشتركة

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ (المطلوب ثانيًا)

∴ م (Δ أ حـ ء) / م (Δ ب حـ أ) = (حـ ء / أ حـ)$^{2}$ = (٤/٦)$^{2}$ = ٤/٩

∴ م (Δ أ حـ ء) = ٤ ك ، م (Δ ب حـ أ) = ٩ ك

∴ م (Δ أ ب ء) = ٥ ك

∴ م (Δ أ ب ء) / م (Δ أ ب حـ) = ٥ ك / ٩ ك = ٥/٩ (المطلوب ثالثًا)

**٢١**




العمل : نرسم القطر $\overline{\text{س ص}}$

فى الدائرة الكبرى

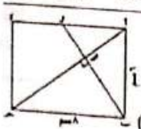
، يقطع الدائرة الصغرى فى ب

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{س ص}}$ = {ب}

∴ أ ب × ب ء = س ب × ب ص

= ٥ × ١٩ = ٩٥ (وهو المطلوب)

**٢٢**




∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية

فى ب ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ (أ ب)$^{2}$ = أ هـ × أ حـ (١)

، ∵ الشكل و هـ حـ ء رباعى دائرى

(لأن ق (∠ ء) + ق (∠ و هـ حـ) = ١٨٠°)

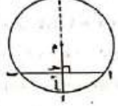
∴ أ و × أ ء = أ هـ × أ حـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ (أ ب)$^{2}$ = أ و × أ ء (المطلوب أولًا)

∴ (٦)$^{2}$ = أ و × ٨

∴ أ و = ٤,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

**٢٣**



∵ $\overline{\text{م جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ جـ = جـ ب = ٤ سم

نرسم $\overline{\text{ء هـ}}$ قطرًا فى الدائرة

ويفرض أن طول نصف القطر = نق ∴ ء هـ = ٢ نق

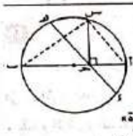
∴ هـ جـ = ء هـ − ء جـ = (٢ نق − ٢) سم

، ∵ أ جـ × جـ ب = ء جـ × جـ هـ

∴ ٤ × ٤ = ٢ (٢ نق − ٢)

∴ نق = ٥ سم (وهو المطلوب)

**٢٤**



العمل : نرسم $\overline{\text{س أ}}$ ، $\overline{\text{س ب}}$

البرهان : ∵ ∠ أ س ب قائمة

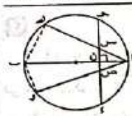
«محيطية مرسومة فى نصف دائرة»

، $\overline{\text{س جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ (س جـ)$^{2}$ = أ جـ × جـ ب

لكن أ جـ × جـ ب = ء جـ × جـ هـ

∴ (س جـ)$^{2}$ = ء جـ × جـ هـ (وهو المطلوب)

**٢٥**



العمل : نرسم $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر

∴ ∠ هـ قائمة ، ∠ و قائمة

، ∵ ∠ س ن ب قائمة ، ∠ ص ن ب قائمة

∴ كل من الشكلين س ن ب هـ ، ص ن ب و رباعى دائرى

، ∵ س ن ب هـ رباعى دائرى

∴ أ س × أ هـ = أ ن × أ ب (١)

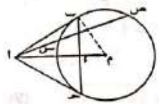
، ∵ ص ن ب و رباعى دائرى

∴ أ ص × أ و = أ ن × أ ب (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أ س × أ هـ = أ ص × أ و (وهو المطلوب)

**٢٦**



العمل : نرسم $\overline{\text{م ب}}$

البرهان :

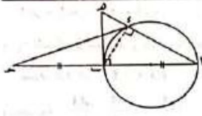
∵ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

، $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ م}}$

∴ (أ ب)$^{2}$ = أ ء × أ م لكن (أ ب)$^{2}$ = أ س × أ ص

∴ أ س × أ ص = أ ء × أ م (وهو المطلوب)

**٢٧**



العمل : نرسم $\overline{\text{ب ء}}$

البرهان :

فى Δ أ ب هـ :

∵ ق (∠ أ ب هـ) = ٩٠°

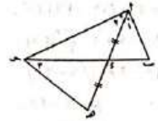
، $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$ ∴ (أ ب)$^{2}$ = أ ء × أ هـ

، ∵ (جـ ء)$^{2}$ = جـ ب × جـ أ

= أ ب × ٢ أ ب = ٢ (أ ب)$^{2}$

∴ (جـ ء)$^{2}$ = ٢ أ ء × أ هـ (وهو المطلوب)

**٢٨**



∵ (أ ء)$^{2}$ = ء ب × ء جـ

∴ أ ء × ء هـ = ء ب × ء جـ

∴ أ ب هـ جـ رباعى دائرى

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

لكن ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ∴ ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)





∴ ΔΔ هـ جـ ء ، هـ أ جـ فيهما :

ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) ، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ هـ جـ ء ~ Δ هـ أ جـ (المطلوب أولًا)

وينتج من التشابه أن : $\frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{هـ جـ}}$

∴ (هـ جـ)$^{2}$ = هـ ء × هـ أ = هـ ء × ٢ هـ ء = ٢ (هـ ء)$^{2}$

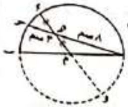
(المطلوب ثانيًا)

**٢٩** (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (جـ)

(٩) (جـ) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (ب)

إرشادات لحل رقم **٢٩**



(١) نفرض أن هـ ء = هـ م = س

∴ م ء = ٢ س = نق

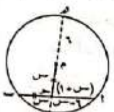
∴ و م = ٢ س = نق

، ∵ هـ أ × هـ جـ = هـ ء × هـ و

∴ ٨ × ٣ = س × ٣ س

∴ ٣ س$^{2}$ = ٢٤ ∴ س$^{2}$ = ٨

∴ س = ٢ $\sqrt{2}$ ∴ م هـ = ٢ $\sqrt{2}$ سم



(٢) نفرض أن :

م جـ = جـ ب = س

∴ جـ هـ × جـ ء

= جـ أ × جـ ب

∴ (٦ + س) (٦ − س) = (س + ١) (س)

∴ ٣٦ − س$^{2}$ = س$^{2}$ + س

∴ ٢ س$^{2}$ + س − ٣٦ = ٠

∴ (٢ س + ٩) (س − ٤) = ٠

∴ س = − $\frac{9}{2}$ (مرفوض) أ ، س = ٤

∴ أ جـ = ٤ + ١ = ٥ سم ، جـ ب = ٤ سم

∴ أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم

(٣) ∵ $\overline{\text{جـ س}}$ قطعة مماسة للدائرة

∴ (جـ س)$^{2}$ = جـ ب × جـ أ

∴ (٨)$^{2}$ = جـ ب × (جـ ب + ٣٠)

∴ (جـ ب)$^{2}$ + ٣٠ (جـ ب) − ٦٤ = ٠

∴ ((جـ ب) − ٢) ((جـ ب) + ٣٢) = ٠

∴ جـ ب = ٢ سم أ ، جـ ب = −٣٢ (مرفوض)

، ∵ $\overline{\text{ء ص}}$ قطعة مماسة للدائرة

∴ (ء ص)$^{2}$ = ء ب × ء أ

∴ (٢٠)$^{2}$ = ء ب (ء ب + ٣٠)

∴ (ء ب)$^{2}$ + ٣٠ (ء ب) − ٤٠٠ = ٠

∴ ((ء ب) − ١٠) ((ء ب) + ٤٠) = ٠

∴ ء ب = ١٠ سم أ ، ء ب = −٤٠ (مرفوض)

∴ ء جـ = ١٠ − ٢ = ٨ سم

(٤) ∵ $\overline{\text{و هـ}}$ مماس للدائرة الكبرى فى هـ

∴ (و هـ)$^{2}$ = و جـ × و ء

∴ (و هـ)$^{2}$ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ و هـ = ٦ سم

، ∵ و هـ × و ب = و جـ × و أ

∴ ٦ × و ب = ٤ × ٣ ∴ و ب = ٢ سم

∴ ب هـ = ٢ + ٦ = ٨ سم

(٥) ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ مماسان للدائرة الصغرى عند ب ، ء

∴ أ ب = أ ء = س ∴ أ جـ = س − ١

، أ هـ = س + ٢

، ∵ (أ ب)$^{2}$ = أ جـ × أ هـ

∴ س$^{2}$ = (س − ١) (س + ٢)

∴ س$^{2}$ = س$^{2}$ + س − ٢

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

(٦) ∵ حـ ب مماس للدائرة

∴ (حـ ب)^٢ = حـ هـ × حـ ء

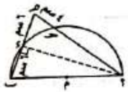
∴ (حـ ب)^٢ = ٣ × (٣ + ١٨) = ٦٣

∴ حـ ب = √٦٣ = ٣√٧ سم

، ∵ ا ب = ا ء (مماسان للدائرة)

∴ ا حـ − ا ء = ا حـ − ا ب = حـ ب = ٣√٧ سم

(٧) نرسم ا ء



∵ ا ب قطر فى نصف الدائرة (م)

∴ ا ء ⊥ ب هـ

فى Δ ا ب هـ :

∵ ب ء = ء هـ = ٦ سم ، ا ء ⊥ ب هـ

∴ Δ ا ب هـ متساوى الساقين

∴ ا هـ = ا ب

، ∵ هـ حـ × هـ ا = هـ ء × هـ ب

∴ ٤ × هـ ا = ٦ × ١٢ ∴ هـ ا = ١٨ سم

∴ ا ب = ١٨ سم

∴ نق = ١٨ ÷ ٢ = ٩ سم

(٨) فى Δ ا ب حـ : ق (∠ب) = ٩٠°

∴ (ا حـ)^٢ = (١٢)^٢ + (٩)^٢ = ٢٢٥

∴ ا حـ = √٢٢٥ = ١٥ سم

، ∵ ا هـ × ا ب = ا ء × ا حـ

∴ ٥ × ١٢ = ا ء × ١٥ ∴ ا ء = ٤ سم

∴ ء حـ = ١٥ − ٤ = ١١ سم

(٩) ∵ س هـ / هـ ص = ٢ / ٣

∴ س هـ = ٢ ك ، هـ ص = ٣ ك

∵ هـ ا × هـ ب = هـ س × هـ ء

∴ هـ ا × هـ ب = ٢ ك × (٣ ك + ٦) (١)

، ∵ هـ ا × هـ ب = هـ ص × هـ حـ

∴ هـ ا × هـ ب = ٣ ك (٢ ك + (حـ س)) (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٢ ك (٣ ك + ٦) = ٣ ك (٢ ك + (حـ س))

∴ ٦ ك^٢ + ١٢ ك = ٦ ك^٢ + ٣ ك (حـ س)

∴ ١٢ ك = ٣ ك (حـ س)

∴ حـ س = ٤ سم

(١٠) ∵ محيط Δ هـ م حـ = ٢٠ سم



∴ ٤ + ٦ + ٢ نق + ء حـ = ٢٠

∴ ء حـ = ١٠ − ٢ نق (١)

، ∵ هـ ا × هـ ب = هـ ء × هـ حـ

∴ ٤ × (٤ + ٢ نق) = ٦ × (٦ + ء حـ) (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

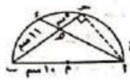
∴ ١٦ + ٨ نق = ٣٦ + ٦ (١٠ − ٢ نق)

∴ ١٦ + ٨ نق = ٣٦ + ٦٠ − ١٢ نق

∴ ٢٠ نق = ٨٠ ∴ نق = ٤ سم

∴ محيط Δ هـ م حـ كافى لإيجاد طول نصف قطر الدائرة.

(١١) نرسم ا حـ



∵ ا ب قطر فى نصف الدائرة

∴ ق (∠ا حـ ب) = ٩٠°

فى Δ ا حـ ب : ا حـ = √((٢٠)^٢ − (١٦)^٢)

∴ ا حـ = ١٢ سم

فى Δ ا حـ هـ : ا هـ = √((١٢)^٢ + (٥)^٢) = ١٣ سم

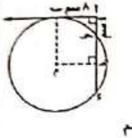
، ∵ هـ حـ × هـ ب = هـ ا × هـ ء

∴ ٥ × ١١ = ١٣ × هـ ء ∴ هـ ء = ٥٥/١٣ سم





(١٢) ∵ ا ب مماس للدائرة



∴ (ا ب)^٢ = ا حـ × ا ء

∴ (٨)^٢ = ٤ × ا ء

∴ ا ء = ١٦ سم

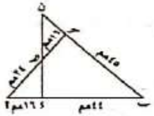
∴ حـ ء = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

، ∵ م هـ ⊥ حـ ء ∴ هـ فى منتصف حـ ء

∴ هـ حـ = ٦ سم

∴ نق = ب م = ٤ + ٦ = ١٠ سم

**٣٠**



ΔΔ ا ء هـ ، ا حـ ب فيهما :

ا ء / ا حـ = ١٦ / ٤٠ = ٢ / ٥

، ا هـ / ا ب = ٢٤ / ٦٠ = ٢ / ٥

، ∠ا مشتركة

∴ Δ ا ء هـ ~ Δ ا حـ ب

∴ ا ء / ا حـ = ء هـ / حـ ب = ا هـ / ا ب ∴ ١٦ / ٤٠ = ء هـ / ٤٥

∴ ء هـ = ١٨ مم (المطلوب أولًا)

، ا ء × ا ب = ا هـ × ا حـ ∴ ب ء هـ حـ رباعى دائرى

∴ ق (∠ب) = ق (∠حـ هـ ن)

∴ ΔΔ ء ن ب ، حـ ن هـ فيهما :

ق (∠حـ هـ ن) = ق (∠ب) ، ∠ن مشتركة

∴ Δ ء ن ب ~ Δ حـ ن هـ

∴ ء ن / حـ ن = ن ب / ن هـ = ء ب / حـ هـ ∴ ن ب / ن هـ = ٤٤ / ١٦ = ١١ / ٤

∴ (ن حـ + ٤٥) / ن هـ = ١١ / ٤

∴ ١١ ن هـ − ٤ ن حـ = ١٨٠ (١)

، ء ن / حـ ن = ١١ / ٤ ∴ (١٨ + هـ ن) / حـ ن = ١١ / ٤

∴ ١١ حـ ن − ٤ هـ ن = ٧٢ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا :

∴ حـ ن = ١٤,٤ مم ، ن هـ = ٢١,٦ مم

(المطلوب ثانيًا)

# إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثالثة

**١**

∵ معامل التشابه = مقياس رسم الوحدة السكنية

∴ معامل التشابه = ١ / ١٥٠

∴ أبعاد حجرة الاستقبال هى :

٥,٦ × ١٥٠ = ٨٤٠ سم = ٨,٤ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب أولًا)

، أبعاد حجرة النوم هى :

٢,٦ × ١٥٠ = ٣٩٠ سم = ٣,٩ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب ثانيًا)

، أبعاد حجرة المعيشة هى :

٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

، ٣,٦ × ١٥٠ = ٥٤٠ سم = ٥,٤ متر

∴ مساحة حجرة المعيشة = ٣,٦ × ٥,٤ = ١٩,٤٤ متر^٢

(المطلوب ثالثًا)

طول الحمام والمطبخ وحجرة المعيشة

= (٢,٦ + ٣,٦ + ٢,٦) × ١٥٠

= ١٣٢٠ سم = ١٣,٢ متر

وعرض هذا الجزء = ٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

∴ مساحة هذا الجزء = ٣,٦ × ١٣,٢ = ٤٧,٥٢ متر^٢

طول حجرة النوم وحجرة الاستقبال

= (٢,٦ + ٥,٦) × ١٥٠ = ١٢٣٠ سم = ١٢,٣ متر

وعرض هذا الجزء = ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر

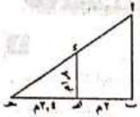
∴ مساحة هذا الجزء = ١٢,٣ × ٥,١ = ٦٢,٧٣ متر^٢

∴ مساحة الوحدة السكنية = ٤٧,٥٢ + ٦٢,٧٣

= ١١٠,٢٥ متر^٢

(المطلوب رابعًا)

**٢**




∵ ءهـ // ا ب

∴ △ ا ب حـ ~ △ ء هـ حـ

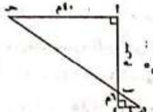
∴ ا ب / ء هـ = ب حـ / هـ حـ

∴ ا ب / ١,٨ = ٤,٤ / ٢,٤

∴ ا ب = (٤,٤ × ١,٨) / ٢,٤ = ٣,٣ م (وهو المطلوب)

---

**٣**




(١) فى △△ ا ب حـ ، ء ب هـ :

ق (∠ ا) = ق (∠ ء) = ٩٠°

، ق (∠ ا ب حـ)

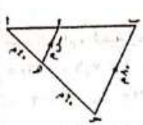
= ق (∠ ء ب هـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ △ ا ب حـ ~ △ ء ب هـ

∴ ا ب / ء ب = ا حـ / ء هـ ∴ س / ٦ = ٤٠ / ٨

∴ س = ٣٠ مترًا (وهو المطلوب)

(٢) ∵ ءهـ // ب حـ




∴ △ ا ب حـ ~ △ ا ء هـ

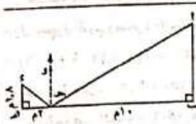
∴ ب حـ / ء هـ = ا حـ / ا هـ

∴ ٨٠ / س = ١٠٠ / ٤٠

∴ س = ٣٢ مترًا (وهو المطلوب)

---

**٤**




فى △△ ا ب حـ

، ء هـ حـ :

∵ ق (∠ ا حـ و)

= ق (∠ ء حـ و)

(قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس)

∴ ق (∠ ا حـ ب) = ق (∠ ء حـ هـ)

، ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

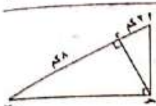
∴ △ ا ب حـ ~ △ ء هـ حـ

∴ ا ب / ء هـ = ب حـ / هـ حـ ∴ ا ب / ١,٨ = ١٠ / ٢

∴ ا ب = (١٠ × ١,٨) / ٢ = ٩ م (وهو المطلوب)

---

**٥**




∵ △ ا ب حـ قائم الزاوية

فى حـ ، حـء ⊥ ا ب

∴ $(حـء)^2$ = اء × ء ب = ٢ × ٨ = ١٦

∴ حـء = ٤ كم

، $(ب حـ)^2$ = ب ء × ب ا = ٨ × ١٠ = ٨٠

∴ ب حـ = ٤ $\sqrt{5}$ كم (وهو المطلوب)

---

**٦**

∵ بعدا الصالة الأولى يتناسبان مع بعدى الصالة الثانية

لان : $\frac{٨}{١٤} = \frac{١٢}{٢١} = \frac{٤}{٧}$

∴ صالتا الألعاب متشابهتان

∴ م (صالة الألعاب الأولى) / م (صالة الألعاب الثانية) = $(\frac{٨}{١٤})^2 = \frac{١٦}{٤٩}$

∴ تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى / تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية

= تكلفة المتر الواحد × مساحة الأولى / تكلفة المتر الواحد × مساحة الثانية

∴ تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى / تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية = مساحة الأولى / مساحة الثانية

∴ تكلفة تغطية أرضية الصالة الأولى / تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية = ١٦ / ٤٩

∴ ٣٢٠٠ / تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية = ١٦ / ٤٩

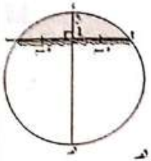
∴ تكلفة تغطية أرضية الصالة الثانية

= (٣٢٠٠ × ٤٩) / ١٦ = ٩٨٠٠ جنيه (وهو المطلوب)





**٧**




∵ حـ منتصف ا ب

، حـء ⊥ ا ب

∴ ءحـ يمر بمركز الدائرة،

∴ ا حـ × حـ ب = ء حـ × حـ هـ

∴ ٥ × ٥ = ٢,٥ × حـ هـ ∴ حـ هـ = ١٠ سم

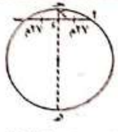
∴ ء هـ = ١٠ + ٢,٥ = ١٢,٥ سم

∴ طول نصف قطر القرص = ١٢,٥ / ٢ = ٦,٢٥ سم

(وهو المطلوب)

---

**٨**




∵ ء منتصف ا ب

∴ حـء ⊥ ا ب

∴ حـء يمر بمركز الدائرة

ويقطعها فى هـ ∴ اء × ء ب = حـء × ء هـ

∴ ٢٧ × ٢٧ = ٩ × ء هـ ∴ ء هـ = ٨١ م

∴ حـ هـ = ٨١ + ٩ = ٩٠ م

∴ طول نصف قطر دائرة القوس = ٩٠ / ٢ = ٤٥ م

(وهو المطلوب)

---

**٩**

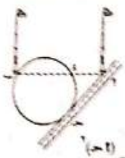
∵ ١٥ × س = ١٠ × ١٢ ∴ س = ٨

∴ بعد نافورة المياه عن المدخل حـ هو ٨ أمتار

(وهو المطلوب)

---

**١٠**




لإيجاد طول السلك ا ب

كما فى الشكل المقابل

نقيس طول الطريق ا حـ ، ا ء

ونعوض فى القانون :

$(ا حـ)^2$ = ا ء × ا ب ∴ ا ب = $\frac{(ا حـ)^2}{ا ء}$

(وهو المطلوب)

## إرشادات الوحدة الرابعة

### إرشادات تمارين 5

**١** (١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب)

**٢**

(١) ∵ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٩}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{١٨}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} \neq \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ لا توازى $\overline{\text{بحـ}}$

(٢) ∵ $\frac{\text{حـأ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{٤٥}}{\text{٦٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٧}}$ ، $\frac{\text{بأ}}{\text{أء}} = \frac{\text{٥٥}}{\text{٧٧}} = \frac{\text{٥}}{\text{٧}}$

∴ $\frac{\text{حـأ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أء}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

(٣) ∵ $\frac{\text{ءأ}}{\text{بأ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ، $\frac{\text{هـأ}}{\text{حـأ}} = \frac{\text{٦}}{\text{٨}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

∴ $\frac{\text{ءأ}}{\text{بأ}} = \frac{\text{هـأ}}{\text{حـأ}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

(٤) ∵ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

(٥) ∵ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{٢٨}}{\text{٢٠}} = \frac{\text{٧}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{٤٢}}{\text{٢٤}} = \frac{\text{٧}}{\text{٤}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} \neq \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ لا توازى $\overline{\text{بحـ}}$

(٦) فى Δ أهـء القائم الزاوية فى هـ :

∵ $(\text{أء})^2 = (\text{أهـ})^2 + (\text{هـء})^2$

$= \text{٢٢٥} + \text{٤٠٠} = \text{٦٢٥}$

∴ أء = ٢٥ سم

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٩}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{٢٥}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$ ∴ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

**٣**

(١) ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

∴ $\frac{\text{١٢}}{\text{٨}} = \frac{\text{٢س} + \text{٥}}{\text{١٠}}$ ∴ ٢س + ٥ = ١٥

∴ ٢س = ١٠ ∴ س = ٥

(٢) ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{ءب}}$

∴ $\frac{\text{٣٠}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ∴ $\text{س}^{\text{٢}} = \text{٨}$

∴ س = ± ٢ $\sqrt{\text{٢}}$

(٣) ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

∴ $\frac{\text{٧}}{\text{٢س} + \text{١}} = \frac{\text{س} + \text{٢}}{\text{٥}}$

∴ (٢س + ١) (س + ٢) = ٣٥

∴ $\text{٢س}^{\text{٢}}$ + ٥س − ٣٣ = ٠

∴ (٢س + ١١) (س − ٣) = ٠

∴ س = − ٥,٥ (مرفوض) أ، س = ٣

**٤** ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

∴ $\frac{\text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣}}{\text{هـحـ}}$ ∴ هـحـ = ٤,٥ سم

(وهو المطلوب)

**٥** ∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ءحـ}}{\text{حـب}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{حـأ}}$

∴ $\frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{٦}}$ ∴ حـهـ = ٤,٥ سم

(وهو المطلوب)

**٦** ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{٥}}{\text{١٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$

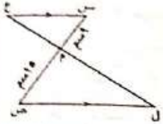
∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـحـ}}$

∴ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـء}}$ (وهو المطلوب)





**٧** ∵ $\overline{\text{سع}} \parallel \overline{\text{لص}}$



∴ $\frac{\text{عم}}{\text{عل}} = \frac{\text{سم}}{\text{سص}}$

∴ $\frac{\text{عم}}{\text{٣٦}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢٤}}$

∴ عم = ١٣,٥ سم (وهو المطلوب)

**٨** ∵ $\overline{\text{بحـ}} \parallel \overline{\text{هـء}}$ ∴ $\frac{\text{بأ}}{\text{أء}} = \frac{\text{حـأ}}{\text{أهـ}}$

∴ $\frac{\text{٦}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{أهـ}}$ ∴ أهـ = ١٠ سم

(المطلوب أولاً)

∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{أء}} = \frac{\text{صهـ}}{\text{أهـ}}$

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{١٠}}$ ∴ ءس = ٤,٨ سم

(المطلوب ثانيًا)

**٩**

(١) ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{٨}} = \frac{\text{س}}{\text{٦}}$ ∴ س = ٣ سم

(٢) ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{٥}} = \frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{٣}}$ ∴ ٥س − ١٠ = ٣س

∴ ٢س = ١٠ ∴ س = ٥ سم

(٣) ∵ $\overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{حـو}}{\text{حـب}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{٢١}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٤}}$ ∴ س = ٩ سم

(٤) ∵ ٢ ءب = ١٢ ∴ ءب = ٦ سم

، ∵ ٣ وحـ = ١٢ ∴ وحـ = ٤ سم

، ∵ $\overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{حـو}}{\text{حـب}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{س} + \text{٥}}$ ∴ س (س + ٥) = ٢٤

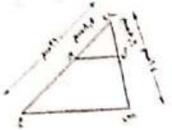
∴ $\text{س}^{\text{٢}}$ + ٥س − ٢٤ = ٠

∴ (س + ٨) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٨ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ س = ٣ سم

**١٠**



∵ $\frac{\text{سل}}{\text{سص}} = \frac{\text{٥,٦}}{\text{١٤}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

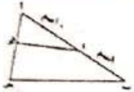
، $\frac{\text{سم}}{\text{سع}} = \frac{\text{٨,٤}}{\text{٢١}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{سل}}{\text{سص}} = \frac{\text{سم}}{\text{سع}}$

∴ $\overline{\text{لم}} \parallel \overline{\text{صع}}$ (وهو المطلوب)

**١١**



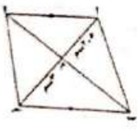
∵ ٥ أهـ = ٤ هـحـ

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

، $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٨}} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} \neq \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$

∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ لا توازى $\overline{\text{بحـ}}$ (وهو المطلوب)

**١٢**



∵ $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءب}}$

∴ $\frac{\text{٢,٥}}{\text{٣} + \text{٢,٥}} = \frac{\text{ءم}}{\text{٧}\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

∴ ءم = ٣ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ سم (المطلوب أولاً)

∴ مب = ٧ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ − ٣ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = ٤ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٣**

فى Δ أبحـ : ∵ $\overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وحـ}}$ ∴ $\frac{\text{٦}}{\text{٥}} = \frac{\text{أو}}{\text{٥,٥}}$

∴ أو = ٦,٦ سم

∴ هـو = ٦,٦ − ٣,٦ = ٣ سم (المطلوب أولاً)

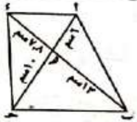
، فى Δ أ ب و :

∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{6}{5}$ ، $\frac{أهـ}{هـو} = \frac{3.6}{3} = \frac{6}{5}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـو}$

∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بو}$ (المطلوب ثانيًا)

**14**



∵ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

، $\frac{ءهـ}{هـب} = \frac{7.8}{13} = \frac{3}{5}$

∴ $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{ءهـ}{هـب}$

∴ $\overline{أء} // \overline{بجـ}$

∴ الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف (وهو المطلوب)

**15**

فى Δ ء أ هـ القائم الزاوية فى أ :

∵ $(أء)^2 = (ءهـ)^2 - (أهـ)^2 = 25 - 16 = 9$

∴ أ ء = ٣ سم

فى Δ أ ب جـ :

∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$ (المطلوب أولاً)

فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية فى أ :

∵ $(بجـ)^2 = (أب)^2 + (أجـ)^2 = 81 + 144 = 225$

∴ ب جـ = ١٥ سم (المطلوب ثانيًا)

**16**

∵ $\overline{سص} // \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أس}{أب} = \frac{أص}{أجـ}$

ومن خواص التناسب :

∴ $\frac{أس}{أب} = \frac{أص}{أجـ} = \frac{أس + أص}{أب + أجـ}$

∴ $\frac{أس}{أس + 2} = \frac{6}{6 + جـص} = \frac{3}{5}$

∴ $5\,أس = 3\,أس + 9$

∴ أ س = ٤,٥ سم (المطلوب أولاً)

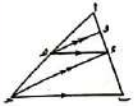
، $18 + 3\,جـص = 30$

∴ جـ ص = ٤ سم (المطلوب ثانيًا)

**17** (١) (ب) (٢) (د) (٣) (جـ)

(٤) (ب) (٥) (د) (٦) (ب)

**18**



∵ $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$

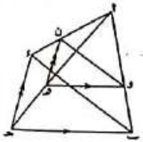
∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$

، ∵ $\overline{هـو} // \overline{جـء}$

∴ $\frac{أو}{أء} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ∴ $\frac{أو}{أء} = \frac{أء}{أب}$

∴ $(أء)^2 = أو \times أب$ (وهو المطلوب)

**19**



∵ $\overline{هـو} // \overline{جـب}$

∴ $\frac{أهـ}{أجـ} = \frac{أو}{أب}$

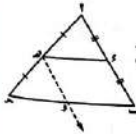
، ∵ $\overline{هـن} // \overline{جـء}$

∴ $\frac{أهـ}{أجـ} = \frac{أن}{أء}$

∴ $\frac{أو}{أب} = \frac{أن}{أء}$

∴ فى Δ أ ب ء : $\overline{ون} // \overline{بء}$ (وهو المطلوب)

**20**



المعطيات :

أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{أب}$

، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

المطلوب : إثبات أن :

(١) $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$

(٢) ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ





العمل :

نرسم $\overleftrightarrow{هـو} // \overline{أب}$ ويقطع $\overline{بجـ}$ فى و

البرهان :

∵ $\frac{أء}{ءب} = 1$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = 1$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$ (المطلوب أولاً)

∵ $\overline{هـو} // \overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

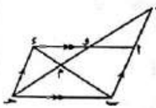
∴ و منتصف $\overline{بجـ}$

∴ ب و = $\frac{1}{2}$ ب جـ

، ∵ الشكل ب ء هـ و متوازى أضلاع

∴ ء هـ = ب و = $\frac{1}{2}$ ب جـ (المطلوب ثانيًا)

**21**



∵ $\overline{ءو} // \overline{بجـ}$

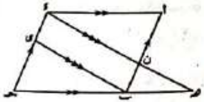
∴ $\frac{جـم}{مو} = \frac{بم}{مء}$

، ∵ $\overline{جـء} // \overline{بهـ}$

∴ $\frac{مهـ}{مجـ} = \frac{مب}{مء}$ ∴ $\frac{جـم}{مو} = \frac{مهـ}{جـم}$

∴ $(جـم)^2 = مو \times مهـ$ (وهو المطلوب)

**22**



∵ $\overline{أء} // \overline{بهـ}$

∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{ءن}{نهـ}$

، ∵ $\overline{نب} // \overline{جـء}$

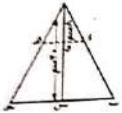
∴ $\frac{ءن}{نهـ} = \frac{بجـ}{بهـ}$ ∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{بجـ}{بهـ}$

، ∵ $\overline{بى} // \overline{ءهـ}$

∴ $\frac{بجـ}{بهـ} = \frac{جـى}{ىء}$

∴ $\frac{أن}{نب} = \frac{جـى}{ىء}$ (وهو المطلوب)

**23**



فى Δ أ ب س :

∵ ٣ أ ء = ٢ ء ب

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{2}{3}$

، ∵ $\frac{أو}{وس} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أو}{وس}$ ∴ $\overline{ءو} // \overline{بس}$ (١)

فى Δ أ س جـ :

∵ ٥ جـ هـ = ٢ أ جـ ∴ $\frac{أجـ}{جـهـ} = \frac{5}{2}$

، ∵ $\frac{أس}{سو} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ ∴ $\frac{أجـ}{جـهـ} = \frac{أس}{سو}$

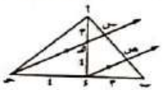
∴ $\overline{وهـ} // \overline{سجـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$

∴ النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة

(وهو المطلوب)

**24**



فى Δ أ ء ص :

∵ $\overline{هـس} // \overline{ءص}$

∴ $\frac{أهـ}{هـء} = \frac{أس}{سص} = \frac{3}{4}$ (١)

، فى Δ ب جـ س : ∵ $\overline{ءص} // \overline{جـس}$

∴ $\frac{بء}{ءجـ} = \frac{بص}{صس} = \frac{3}{4}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{أس}{سص} = \frac{بص}{سص}$

∴ أ س = ب ص (وهو المطلوب)

**25**

فى Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{ءس} // \overline{أجـ}$

∴ $\frac{بس}{بجـ} = \frac{بء}{بأ}$ ∴ $\frac{بس}{13.5} = \frac{2}{5}$

∴ ب س = ٥,٤ سم

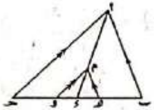
، ∵ $\overline{هـص} // \overline{أب}$ ∴ $\frac{جـص}{جـب} = \frac{جـهـ}{جـأ}$

$\therefore \frac{\text{حـ ص}}{12.5} = \frac{4}{9}$ $\therefore$ حـ ص = ٦ سم

$\therefore$ س ص = ب حـ − (ب س + حـ ص)

= ١٢٫٥ − (٥٫٤ + ٦) = ٢٫١ سم (وهو المطلوب)

**٢٦**



$\because \overline{\text{م هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

$\therefore \frac{\text{ء م}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء ب}}$

، $\because \overline{\text{م و}} \parallel \overline{\text{أ حـ}}$

$\therefore \frac{\text{ء م}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{ء حـ}}$ $\therefore \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ء و}}{\text{ء حـ}}$

، $\because$ ء ب = ء حـ $\therefore$ ء هـ = ء و

$\therefore$ ء منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ (المطلوب أولاً)

، $\because$ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ $\therefore \overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى $\triangle$ أ ب حـ

$\therefore$ ء م = $\frac{1}{2}$ أ ء

$\therefore$ فى $\triangle$ أ ب ء يكون ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب ء

، فى $\triangle$ أ حـ ء يكون ء و = $\frac{1}{2}$ ء حـ

وبالجمع : $\therefore$ ء هـ + ء و = $\frac{1}{2}$ (ب ء + ء حـ)

$\therefore$ هـ و = $\frac{1}{2}$ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

**٢٧**

$\because \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع) .

، $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع)

، $\because \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$ (لأن $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$)

$\therefore \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب هـ}} = \frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب حـ}}$ (وهو المطلوب)

**٢٨** (١) (حـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (حـ)

(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (ب)

### إرشادات لحل رقم ٢٨

(١) $\because$ ق (∠ ى ء و) = ق (∠ ى حـ ب) (بالتناظر)

، $\because$ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ حـ ء ب) (بالتقابل بالرأس)

، $\because$ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ و ء ى)

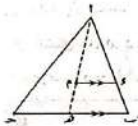
$\therefore$ ق (∠ حـ ء ب) = ق (∠ ء حـ ب)

$\therefore$ ب حـ = ب ء = ١٥ سم

فى $\triangle$ أ ب حـ : $\because \overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ء} + 15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ٢ أ ء + ٣٠ = ٣ أ ء $\therefore$ أ ء = ٣٠ سم



(٢) نرسم $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ليقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى نقطة هـ

$\because$ م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

$\therefore \overline{\text{أ هـ}}$ متوسط $\therefore$ هـ ب = $\frac{1}{2}$ ب حـ

$\therefore \frac{\text{أ م}}{\text{أ هـ}} = \frac{2}{3}$ ، $\because \overline{\text{ء م}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ م}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ء م}}{\text{ب هـ}} = \frac{2}{3}$ $\therefore$ ء م = $\frac{2}{3}$ ب هـ

، $\because$ هـ ب = $\frac{1}{2}$ ب حـ

$\therefore$ ء م = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ب حـ = $\frac{1}{3}$ ب حـ

أى أن : $\frac{\text{ء م}}{\text{ب حـ}} = \frac{1}{3}$

(٣) لإثبات أن : $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

يجب أن يكون $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$

، $\because \overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{ب هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ هـ}}$

أى أنه يجب أن يكون $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ هـ}}$

$\therefore$ أ و × أ حـ = $(\text{أ هـ})^2$

(٤) $\because$ ٢ $\text{س}^2$ − ٣ س ص − ٥ $\text{ص}^2$ = ٠

$\therefore$ (٢ س − ٥ ص) (س + ص) = ٠

$\therefore$ ٢ س = ٥ ص أى أن : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{2}{5}$





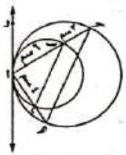
أو س = − ص (مرفوض)

فى $\triangle$ أ ب حـ : $\because \overline{\text{هـ ء}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{ب حـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{10} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ أ هـ = ٤ سم

$\therefore$ هـ ب = ١٠ − ٤ = ٦ سم



(٥) نرسم المماس المشترك $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$

$\because$ ق (∠ و أ ب) = ق (∠ أ ء ب)

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان فى القوس $\frown{\text{أ ب}}$)

، $\because$ ق (∠ و أ حـ) = ق (∠ أ هـ حـ)

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان فى القوس $\frown{\text{أ حـ}}$)

$\therefore$ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ هـ حـ) وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overline{\text{ء ب}} \parallel \overline{\text{هـ حـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء هـ}}$

$\therefore \frac{6}{2} = \frac{4}{\text{ء هـ}}$ $\therefore$ ء هـ = ٢ سم

(٦) فى $\triangle\triangle$ أ حـ هـ ، هـ حـ و :

$\because \overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس حـ

$\therefore \frac{\text{م } (\triangle \text{ أ حـ هـ})}{\text{م } (\triangle \text{ حـ هـ و})} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}}$

$\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ $\therefore \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ و}} = \frac{5}{8}$

فى $\triangle$ أ ب و : $\because \overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب و}}$

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ و}}$ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{16} = \frac{5}{8}$

$\therefore$ أ ء = ١٠ سم

(٧) فى $\triangle\triangle$ حـ ب هـ ، هـ ب أ :

$\because \overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ب

$\therefore \frac{\text{م } (\triangle \text{ أ ب هـ})}{\text{م } (\triangle \text{ حـ ب هـ})} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{حـ هـ}}$

$\therefore \frac{\text{م } (\triangle \text{ أ ب هـ})}{9} = \frac{4}{2}$

$\therefore$ م $(\triangle$ أ ب هـ$)$ = ١٨ $\text{سم}^2$

فى $\triangle$ أ ب حـ : $\because \overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{2}{3}$

فى $\triangle\triangle$ أ ء هـ ، أ ب هـ :

$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس هـ

$\therefore \frac{\text{م } (\triangle \text{ أ ء هـ})}{\text{م } (\triangle \text{ أ ب هـ})} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

$\therefore \frac{\text{م } (\triangle \text{ أ ء هـ})}{18} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ م $(\triangle$ أ ء هـ$)$ = ١٢ $\text{سم}^2$

**٢٩**

$\because \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ أ}}$ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ء} + \text{ء ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ هـ} + \text{هـ أ}}$

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ أ}}$ (١)

، $\because \overline{\text{هـ ى}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ $\therefore \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ أ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ب أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ب أ}}$ $\therefore$ أ ء = ب ى

، $\because$ أ س = ب س (معطى)

$\therefore$ أ ء − أ س = ب ى − ب س

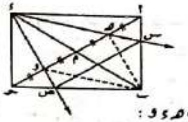
$\therefore$ ء س = س ى

$\therefore$ فى $\triangle$ ء هـ ى :

$\because$ س منتصف $\overline{\text{ء ى}}$ ، $\overline{\text{س و}} \parallel \overline{\text{ى هـ}}$

$\therefore$ و منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ (وهو المطلوب)

**٣٠**



العمل :

نرسم ب هـ ، ب و

البرهان : في الشكل ب هـ ء و :

∵ م منتصف كل من هـ و ، ب ء

∴ الشكل ب هـ ء و متوازي أضلاع

في Δ أ ب و : ∵ س هـ // ب و

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{١}{٢}$ (١)

، في Δ ب حـ هـ : ∵ و ص // هـ ب

∴ $\frac{\text{حـ ص}}{\text{ص ب}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{و هـ}} = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{حـ ص}}{\text{ص ب}}$

وذلك في Δ أ ب حـ :

∴ س ص // أ حـ (وهو المطلوب)

## إرشادات تمارين 6

**١** (١) هـ و (٢) ء و (٣) ء هـ (٤) ء و
(٥) م هـ (٦) ء و (٧) م هـ (٨) م حـ

**٢** (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)

**٣**

(١) ∵ $\frac{١٠}{٦} = \frac{١٥}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{ص}}{٣}$ ∴ س + ٢ = ٩

∴ س = ٧ ، ص = ٥

(٢) ∵ $\frac{\text{س} + ٢}{١٢} = \frac{٣}{\text{ص}} = \frac{\text{س} - ١}{٨}$

∴ ١٢ (س − ١) = ٨ (س + ٢)

∴ ١٢ س − ١٢ = ٨ س + ١٦

∴ ٤ س = ٢٨ ∴ س = ٧

∴ $\frac{٣}{\text{ص}} = \frac{٦}{٨}$ ∴ ص = ٤

(٣) ∵ $\frac{\text{س} - ٨}{١٢} = \frac{\text{س} + ٢}{٢٠}$

∴ ٢٠ (س − ٨) = ١٢ (س + ٢)

∴ ٢٠ س − ١٦٠ = ١٢ س + ٢٤

∴ ٨ س = ١٨٤ ∴ س = ٢٣

، ∵ $\frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{٣٠}{٢٠}$ ∴ ص = ١٨

(٤) ∵ أ ب // ء هـ ، ب هـ = هـ حـ

∴ أ ء = ء حـ ∴ ٣ س − ١ = ٢ س + ٣

∴ س = ٤

، ∵ ب هـ = هـ حـ ∴ ٢ ص + ٧ = ١٣

∴ ٢ ص = ٦ ∴ ص = ٣

(٥) ∵ أ ء // ب هـ // حـ و

، ء هـ = هـ و = و م

∴ أ ب = ب حـ = حـ م

∴ $\text{س}^{٢}$ − ٣ = ٣ س + ١

∴ $\text{س}^{٢}$ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ ، س = −١ (مرفوض)

، ∵ ب حـ = حـ م ∴ ٢ ص − ١ = ١٣

∴ ٢ ص = ١٤ ∴ ص = ٧

(٦) ∵ أ ب // ء حـ // هـ و

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{حـ هـ}}$

∴ $\frac{\text{ص} - ٤}{٤ \text{س} - ١} = \frac{٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢ \text{س} + ٧}$

∴ ٤ س − ١ = ٢ س + ٧

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

∴ $\frac{\text{ص} - ٤}{١٥} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ص − ٤ = ١٠

∴ ص = ١٤





(٧) ∵ أ ب // حـ ء // هـ و ، ب ء = ء و

∴ أ حـ = حـ هـ

∴ ٢ س − ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

∵ ب ء = ء و

∴ ص + ٣ = ٦ ∴ ص = ٣

(٨) ∵ س + ٣ = ٢ ص + ٥

∴ س − ٢ ص = ٢ (١)

، س − ٣ = ص + ٢

∴ س − ص = ٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ص = ٣

، بالتعويض في (٢) : ∴ س = ٨

(٩) ∵ ء هـ // ب حـ ، أ ء = ء ب

∴ أ هـ = هـ حـ ∴ س + ٦ = ٣ س − ٢

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

في Δ أ ب حـ :

∵ ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ حـ على الترتيب

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ٣ ص − ٢ = $\frac{١}{٢}$ (٥ ص − ١)

∴ ٦ ص − ٤ = ٥ ص − ١ ∴ ص = ٣

(١٠) ∵ ٢ س + ١ = ص − ٣

∴ $\text{س}^{٢}$ − ٥ = ٣ س − ١

∴ $\text{س}^{٢}$ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ ، س = −١ (مرفوض)

∴ ص − ٣ = ٩ ∴ ص = ١٢

(١١) ∴ $\frac{٣ \text{س} + ٢}{١٥} = \frac{٢ \text{س} + ٤}{١٢}$

∴ ١٢ (٣ س + ٢) = ١٥ (٢ س + ٤)

∴ ٣٦ س + ٢٤ = ٣٠ س + ٦٠

∴ ٦ س = ٣٦ ∴ س = ٦

∴ $\frac{\text{ص}}{١٥} = \frac{١١}{١٢}$ ∴ ص = $١٣\frac{٣}{٤}$

(١٢) ∵ $\frac{\text{س} + ١}{٩} = \frac{٦}{٥} = \frac{١٠}{\text{ص}}$

∴ س + ١ = $\frac{٥٤}{٥}$ = $١٠\frac{٤}{٥}$

∴ س = $٩\frac{٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٥٠}{٦}$ = $٨\frac{١}{٣}$

**٤**

∵ $ل_١$ // $ل_٢$ // $ل_٣$ // $ل_٤$ ، م ، مَ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ن}}$

∴ $\frac{١,٦}{\text{س ص}} = \frac{٢,٤}{٣,٦} = \frac{\text{حـ ء}}{٤,٨}$

∴ س ص = $\frac{٣,٦ \times ١,٦}{٢,٤}$ = ٢,٤ سم

، حـ ء = $\frac{٤,٨ \times ٢,٤}{٣,٦}$ = ٣,٢ سم (وهو المطلوب)

**٥**

∵ أ ب // ء هـ // س و

، حـ ب ، حـ أ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{حـ س}}{\text{حـ و}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{و ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{٥}{٧,٥} = \frac{٤}{\text{و ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{٦}$

∴ و ء = ٦ سم ، ب هـ = ٤ سم (وهو المطلوب)

**٦**

∵ أ حـ // و هـ // ء ب ∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{و ء}}$

∴ $\frac{٦}{\text{م و}} = \frac{٩}{١٥}$

∴ م و = ١٠ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{حـ م}}{\text{م ء}}$ ∴ $\frac{\text{أ م}}{١٥} = \frac{١٨}{٢٥}$

∴ أ م = ١٠,٨ سم (المطلوب ثانيًا)

**٧**

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـء}} \parallel \overline{\text{هـو}}$

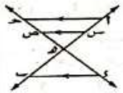
∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{بء}} = \frac{\text{حـك}}{\text{ءك}} = \frac{\text{كو}}{\text{كهـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{بهـ}}$

∴ $\frac{\text{٥}}{\text{بء}} = \frac{\text{١٠}}{\text{ءك}} = \frac{\text{٧,٥}}{\text{كهـ}} = \frac{\text{٢٢,٥}}{\text{١٨}}$

∴ بء = ٤ سم ، ءك = ٨ سم ، كهـ = ٦ سم

(وهو المطلوب)

**٨**



∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بء}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{حـص}} = \frac{\text{هـب}}{\text{هـء}}$

∴ أس × هـء = حـص × هـب (وهو المطلوب)

**٩**

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـء}} \parallel \overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{عك}}$

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{بء}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{ءو}} = \frac{\text{هـس}}{\text{وص}} = \frac{\text{سع}}{\text{صك}}$

∴ $\frac{\text{٢}}{\text{٢,٥}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{ءو}} = \frac{\text{هـس}}{\text{٤,٥}} = \frac{\text{سع}}{\text{٣}}$

∴ هـس = ٣,٦ سم ، سع = ٢,٤ سم

∴ هـحـ = ١٢ − (٣,٦ + ٢,٤) = ٦ سم

∴ ءو = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

**١٠**

∵ أس : سص : صحـ = ٢ : ٣ : ٥

∴ بء : ءهـ : هـحـ = ٢ : ٣ : ٥

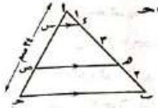
∴ $\frac{\text{بء}}{\text{٢}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{٣}} = \frac{\text{هـحـ}}{\text{٥}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{٢}} = \frac{\text{٧,٥}}{\text{٣}} = \frac{\text{هـحـ}}{\text{٥}}$

∴ بء = ٥ سم ، هـحـ = ١٢,٥ سم

، ∵ $\frac{\text{أس}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{٤}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٥}}{\text{١٢,٥} + \text{٧,٥} + \text{٥}}$

∴ أحـ = ٢٠ سم (وهو المطلوب)

**١١**



∵ $\overline{\text{ءس}} \parallel \overline{\text{هـص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{أء}} = \frac{\text{سص}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{صحـ}}{\text{هـب}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{١}} = \frac{\text{سص}}{\text{٣}} = \frac{\text{صحـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{أس} + \text{سص} + \text{صحـ}}{\text{١} + \text{٣} + \text{٢}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{٦}} = \text{٤}$

∴ أس = ٤ سم ، سص = ١٢ سم

، صحـ = ٨ سم (وهو المطلوب)

**١٢**

∵ أب : بحـ : حـء

١ : ٢

٤ : ٥

٢ : ٤ : ٥

، ∵ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ (ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤)

∴ $\frac{\text{سص}}{\text{أب}} = \frac{\text{صع}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{عن}}{\text{حـء}}$

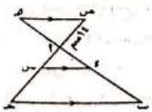
∴ $\frac{\text{سص}}{\text{٢}} = \frac{\text{صع}}{\text{٤}} = \frac{\text{عن}}{\text{٥}} = \frac{\text{سص} + \text{صع} + \text{عن}}{\text{٢} + \text{٤} + \text{٥}}$

$= \frac{\text{سن}}{\text{١١}} = \frac{\text{١٦,٥}}{\text{١١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

∴ سص = ٣ سم ، صع = ٦ سم

، عن = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

**١٣**



∵ بء : ءأ : أهـ

$= \text{٥} : \text{٣} : \frac{\text{بء} + \text{ءأ}}{\text{٢}}$

= ٥ : ٣ : ٤

، $\overline{\text{بحـ}} \parallel \overline{\text{ءس}} \parallel \overline{\text{هـص}}$





∴ $\frac{\text{حـس}}{\text{بء}} = \frac{\text{سأ}}{\text{أء}} = \frac{\text{أص}}{\text{أهـ}}$

∴ $\frac{\text{حـس}}{\text{٥}} = \frac{\text{سأ}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٤}}$

∴ حـس = ١٧,٥ سم ، سأ = ١٠,٥ سم

∴ أحـ = ١٧,٥ + ١٠,٥ = ٢٨ سم (وهو المطلوب)

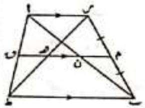
**١٤**

∵ $\overline{\text{ءحـ}} \parallel \overline{\text{وهـ}}$ ∴ $\frac{\text{ءى}}{\text{ىو}} = \frac{\text{حـى}}{\text{ىهـ}}$

، ∵ $\frac{\text{ءى}}{\text{ىو}} = \frac{\text{أى}}{\text{ىحـ}}$ (معطى) ∴ $\frac{\text{حـى}}{\text{ىهـ}} = \frac{\text{أى}}{\text{حـى}}$

∴ $(\text{حـى})^2 = \text{أى} \times \text{ىهـ}$ (وهو المطلوب)

**١٥**



∵ $\overline{\text{أن}} \parallel \overline{\text{مى}} \parallel \overline{\text{بط}}$

، $\overleftrightarrow{\text{بن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بأ}}$ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{بم}}{\text{بن}} = \frac{\text{من}}{\text{نأ}}$

، ∵ بم = من ∴ بن = نأ

∴ ن منتصف $\overline{\text{بأ}}$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

هـ منتصف $\overline{\text{نط}}$ ، ى منتصف $\overline{\text{أط}}$ (المطلوب أولاً)

∴ من Δ نبط :

∵ م ، هـ منتصفا $\overline{\text{نب}}$ ، $\overline{\text{نط}}$ على الترتيب

∴ $\text{مهـ} = \frac{1}{2}\,\text{بط}$ (١)

، من Δ أنط :

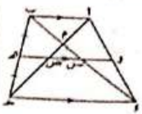
∵ هـ ، ى منتصفا $\overline{\text{نط}}$ ، $\overline{\text{أط}}$ على الترتيب

∴ $\text{هـى} = \frac{1}{2}\,\text{أن}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{مهـ} + \text{هـى} = \frac{1}{2}(\text{أن} + \text{بط})$

∴ $\text{مى} = \frac{1}{2}(\text{أن} + \text{بط})$ (المطلوب ثانيًا)

**١٦**



في Δ أبحـ :

∵ هـ منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{هـص}} \parallel \overline{\text{أب}}$

∴ ص منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، $\text{هـص} = \frac{1}{2}\,\text{أب}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{وهـ}} \parallel \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ءب}}$ قاطعان لهم

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{بم}} = \frac{\text{مص}}{\text{مس}} = \frac{\text{صحـ}}{\text{سء}}$

∴ $\frac{\text{أم} + \text{مص}}{\text{بم} + \text{مس}} = \frac{\text{مص} + \text{صحـ}}{\text{مس} + \text{سء}}$

∴ $\frac{\text{أص}}{\text{بس}} = \frac{\text{محـ}}{\text{مء}}$ ∴ $\frac{\text{أص}}{\text{محـ}} = \frac{\text{بس}}{\text{ءم}}$ (المطلوب ثانيًا)

**١٧**

يمكن إيجاد $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$ بثلاث طرق :

**الطريقة الأولى : باستخدام البُعد بين نقطتين في المستوى الإحداثي :**

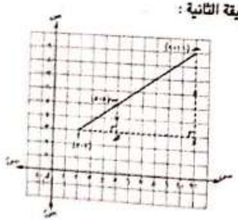
∴ $\text{أب} = \sqrt{(\text{٥} - \text{٢})^2 + (\text{٥} - \text{٣})^2} = \sqrt{\text{١٣}}$ وحدة طول

، $\text{بحـ} = \sqrt{(\text{١١} - \text{٥})^2 + (\text{٩} - \text{٥})^2}$

$= \text{٢}\sqrt{\text{١٣}}$ وحدة طول

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\sqrt{\text{١٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{١٣}}} = \frac{1}{2}$

**الطريقة الثانية :**



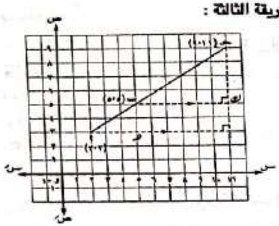
نجعل $\overline{\text{أحـ}}$ وترًا في مثلث قائم الزاوية في ء (١١ ، ٣)

ثم نرسم $\overleftrightarrow{\text{بهـ}} \parallel \overline{\text{حـء}}$ ويقطع $\overline{\text{أء}}$ في هـ (٥ ، ٣)

في Δ أءحـ :

∵ $\overline{\text{بهـ}} \parallel \overline{\text{حـء}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{1}{2}$

الطريقة الثالثة :




كما سبق ولكن برسم $\overleftrightarrow{\text{ب ك}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

ويقطع $\overline{\text{جـ د}}$ في ك (١١ ، ٥)

في △ أ د جـ :

∵ $\overline{\text{ب ك}}$ // $\overline{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ك جـ}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

**١٨** (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

**إرشادات لحل رقم ١٨**

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{٣}{\text{ص}}$ ∴ س ص = ١٢

، $(\text{س} + \text{ص})^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\ \text{س ص}$

$= ٥٧ + ٢ \times ١٢ = ٨١$

∴ س + ص = ٩ سم

(٢) المسافة بين النقطتين (٠ ، ٦) ، (−٢ ، ٢)

$= \sqrt{(٠ + ٢)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$ سم

، المسافة بين النقطتين (−٢ ، ٢) ، (−٣ ، ٠)

$= \sqrt{(-٢ + ٣)^{٢} + (٢ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٥}$ سم

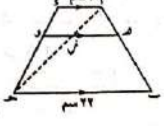
∴ $\frac{\text{س}}{\sqrt{٥}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ∴ $\text{س} = ٢\sqrt{٥}$

(٣) نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$

لتقطع $\overline{\text{هـ و}}$ في ل

في △ أ ب جـ :

∵ $\overline{\text{هـ ل}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$




∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ل}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ل}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{٢}{٥} = \frac{\text{هـ ل}}{٢٢} = \frac{\text{أ ل}}{\text{أ جـ}}$ ∴ هـ ل = ٨,٨ سم

في △ أ د جـ : ∵ $\overline{\text{ل و}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

∴ $\frac{\text{جـ ل}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ل و}}{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{\text{ل و}}{٧}$

∴ ل و = ٤,٢ سم

∴ هـ و = ٨,٨ + ٤,٢ = ١٣ سم

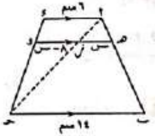
(٤) نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$

ليقطع $\overline{\text{هـ و}}$ في ن

نفرض أن هـ ن = س

في △ أ ب جـ :

∵ $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$




∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س}}{١٤}$ (١)

في △ أ د جـ : ∵ $\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{ن و}}{\text{أ د}}$

∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{٨ - \text{س}}{٦}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{س}}{١٤} + \frac{٨ - \text{س}}{٦}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٦\ \text{س}}{٨٤} + \frac{١١٢ - ١٤\ \text{س}}{٨٤}$

∴ $\frac{١١٢ - ٨\ \text{س}}{٨٤} = ١$

∴ ١١٢ − ٨ س = ٨٤

∴ ٨ س = ٢٨ ∴ س = $٣\frac{١}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣\frac{١}{٢}}{١٤} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{١}{٣}$



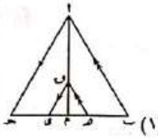


**١٩**

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ن هـ}}$

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{أ ن}}$

$= \frac{\text{م ب}}{\text{أ م}}$ (١)




، ∵ $\overline{\text{ن ى}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ى}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{أ م}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ، ∵ م ب = م جـ

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{م ى}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ى جـ}}{\text{أ ن}}$ ∴ م هـ = م ى

∴ م منتصف $\overline{\text{هـ ى}}$ (المطلوب أولاً)

، $\frac{\text{م ن}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}}$

، ∵ ن نقطة تلاقي متوسطات △ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م ن}}{\text{أ ن}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ ب

، ∵ م هـ = م ى

∴ م هـ + م ى = $\frac{١}{٢}$ هـ ب + $\frac{١}{٢}$ هـ ب

∴ هـ ى = هـ ب (٣)

، ∵ $\frac{\text{م ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{م ن}}{\text{أ ن}} = \frac{١}{٢}$ ∴ م ى = $\frac{١}{٢}$ ى جـ

، ∵ م ى = م هـ

∴ م ى + م هـ = $\frac{١}{٢}$ ى جـ + $\frac{١}{٢}$ ى جـ

∴ هـ ى = ى جـ (٤)

من (٣) ، (٤) :

∴ ب هـ = هـ ى = ى جـ = $\frac{١}{٣}$ ب جـ (المطلوب ثانياً)

**٢٠**

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و د}}$ قاطعان لهما

∴ $\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و د}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{ب د}}$ // $\overline{\text{هـ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ قاطعان لهما

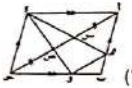
∴ $\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و س}}$ (٢)

وبضرب (١) في (٢) :

∴ $\left(\frac{\text{و ب}}{\text{و هـ}}\right)^{٢} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و د}} \times \frac{\text{و د}}{\text{و س}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و س}}$

(وهو المطلوب)

**٢١**




∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{س د}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{\text{جـ ص}}{\text{أ ص}} = \frac{\text{و ص}}{\text{ص د}}$ (٢)

، ∵ أ س = ص جـ (٣)

وبإضافة س ص للطرفين :

∴ أ ص = س جـ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : ∴ $\frac{\text{هـ س}}{\text{س د}} = \frac{\text{و ص}}{\text{ص د}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ (وهو المطلوب)

## إرشادات تمارين 7

**١**

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (أ)

(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (د) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (أ)

**٢**

(١) في △ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}}$ ∴ $\frac{٢,٥}{٧} = \frac{٢}{\text{د جـ}}$

∴ د جـ = ٦ سم (وهو المطلوب)

(٢) في △ أ جـ د : ∵ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ ينصف ∠ جـ

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{جـ د}} = \frac{٥}{٤}$

∴ جـ د = ٨ سم (المطلوب أولاً)

، جـ ب = $\sqrt{\text{جـ ا} \times \text{جـ د} - \text{ا ب} \times \text{ب د}}$

= $\sqrt{١٠ \times ٨ - ٥ \times ٤} = ٢\sqrt{١٥}$ سم

(المطلوب ثانيًا)

(٣) فى Δ ا ب جـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند ا

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}}$ ∴ $\frac{٩}{٦} = \frac{١٢}{\text{جـ د}}$

∴ د جـ = ٨ سم (المطلوب أولًا)

، ا د = $\sqrt{\text{ب د} \times \text{د جـ} - \text{ا ب} \times \text{ا جـ}}$

= $\sqrt{١٢ \times ٨ - ٩ \times ٦} = \sqrt{٤٢}$ سم

(المطلوب ثانيًا)

**٣**

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٨}{١٠} = \frac{١٢}{٤\text{س} - ١}$

∴ ٤ س − ١ = ١٥ ∴ س = ٤

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ جـ ا هـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٢٠}{١٥} = \frac{٥\text{س} + ٢}{٩}$

∴ ٥ س + ٢ = ١٢ ∴ س = ٢

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ا}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب ا}}$ ∴ $\frac{\text{س} + ١}{٥} = \frac{\text{س} + ٤}{٨}$

∴ ٨ س + ٨ = ٥ س + ٢٠

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

(٤) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٦\text{س}}{٥\text{س}} = \frac{١٠\text{س} + ٤}{٩\text{س} + ٢}$

∴ ٦ س (٩ س + ٢) = ٥ س (١٠ س + ٤)

∴ ٥٤ $\text{س}^٢$ + ١٢ س = ٥٠ $\text{س}^٢$ + ٢٠ س

∴ ٤ $\text{س}^٢$ − ٨ س = ٠

∴ ٤ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢

**٤**

(١) ∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

∴ ا ب = ا جـ = ٧ سم .

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = ١$ ∴ $\frac{\text{س}}{٤} = ١$

∴ س = ٤

∴ محيط Δ ا ب جـ = ٧ + ٧ + ٨ = ٢٢ سم

(٢) فى Δ ا د جـ القائم الزاوية فى د :

$(\text{د جـ})^٢ = (٥٠)^٢ - (٣٠)^٢ = ١٦٠٠$

∴ د جـ = ٤٠ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ينصف ∠ د ا جـ

∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ا جـ}} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{\text{د ب} + \text{ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣ + ٥}{٥}$

∴ $\frac{\text{د جـ}}{\text{س}} = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\frac{٤٠}{\text{س}} = \frac{٨}{٥}$

∴ س = ٢٥ ∴ د ب = ٤٠ − ٢٥ = ١٥ سم

، ا ب = $\sqrt{\text{ا د} \times \text{ا جـ} - \text{د ب} \times \text{ب جـ}}$

= $\sqrt{٥٠ \times ٣٠ - ١٥ \times ٢٥} = ١٥\sqrt{٥}$ سم

∴ محيط Δ ا ب جـ = $١٥\sqrt{٥}$ + ٥٠ + ٢٥

= $(٧٥ + ١٥\sqrt{٥})$ سم

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{ا د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{س}} = \frac{٦}{\text{س} + ٢}$

∴ ٦ س = ٤ س + ١٢

∴ ٢ س = ١٢ ∴ س = ٦

∴ محيط Δ ا ب جـ = ٦ + ٩ + ١٠ = ٢٥ سم

**٥**

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤}{\text{س}}$

∴ س = $٥\frac{١}{٣}$





∴ ا د = $\sqrt{\text{ا ب} \times \text{ا جـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$

= $\sqrt{٤ \times ٥\frac{١}{٣} - ٣ \times ٤} = \frac{٢\sqrt{٢١}}{٣}$ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{\text{س}}{٥}$

∴ س = ٧,٥

∴ ا د = $\sqrt{\text{ا ب} \times \text{ا جـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$

= $\sqrt{٧,٥ \times ٥ - ٦ \times ٤} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٢}$ سم

(٣) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{٧}{٦} = \frac{٩}{\text{س}}$

∴ س = $٧\frac{٥}{٧}$

∴ ا د = $\sqrt{\text{ا ب} \times \text{ا جـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$

= $\sqrt{٩ \times ٧\frac{٥}{٧} - ٧ \times ٦} = \frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}$ سم

**٦**

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ جـ ا د

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ ∴ $\frac{١٦}{١٢} = \frac{\text{س} + ٥}{٩}$

∴ س + ٥ = ١٢ ∴ س = ٧

∴ ا هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ جـ} - \text{ب ا} \times \text{ا جـ}}$

= $\sqrt{١٦ \times ١٢ - ١٢ \times ٩} = ٢\sqrt{٢١}$ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ ، $\overline{\text{اد}} \perp \overline{\text{اهـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{اهـ}}$ ينصف ∠ جـ ا و

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{جـ ا}}$ ∴ $\frac{\text{س} + ١٠}{\text{س} + ١} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

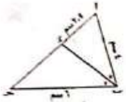
∴ ٢ س + ٢ = س + ١٠

∴ س = ٨

∴ ا هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{جـ هـ} - \text{ب ا} \times \text{ا جـ}}$

= $\sqrt{١٨ \times ٩ - ١٢ \times ٦} = ٣\sqrt{١٠}$ سم

**٧**



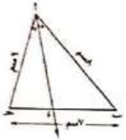
∵ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ ا ب جـ

∴ $\frac{\text{ا د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{٢,٤}{\text{د جـ}} = \frac{٤}{٦}$ ∴ د جـ = ٣,٦ سم

∴ ا جـ = ٢,٤ + ٣,٦ = ٦ سم (وهو المطلوب)

**٨**



∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

= $\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب د} + \text{د جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{٤ + ٣}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{٧}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{د جـ}} = \frac{٧}{٣}$

∴ د جـ = ٣ سم

، ب د = ٧ − ٣ = ٤ سم (وهو المطلوب)

**٩**

∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا جـ من الخارج ∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{د ب}}{\text{د جـ}}$

∴ $\frac{٦}{٨} = \frac{\text{د ب}}{\text{د جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{٨ - ٦} = \frac{\text{د ب}}{\text{د جـ} - \text{د ب}}$

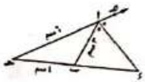
∴ $\frac{٦}{٢} = \frac{\text{د ب}}{٥}$ ∴ د ب = $\frac{٦ \times ٥}{٢}$ = ١٥ سم

∴ ا د = $\sqrt{\text{د جـ} \times \text{د ب} - \text{ا جـ} \times \text{ا ب}}$

= $\sqrt{٢٠ \times ١٥ - ٨ \times ٦} = ٦\sqrt{٧}$ سم

(وهو المطلوب)

**١٠**



∵ $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ ينصف ∠ ب ا هـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$

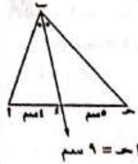
∴ $\frac{\text{ب د}}{٤ + \text{ب د}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ب د = ٤ + ب د

∴ ب د = ٤ سم ∴ جـ د = ٨ سم

∴ ا د = $\sqrt{\text{جـ د} \times \text{د ب} - \text{جـ ا} \times \text{ا ب}}$

= $\sqrt{٨ \times ٤ - ٦ \times ٢} = \sqrt{١٤}$ سم (وهو المطلوب)

**١١**




∵ $\overleftrightarrow{\text{بد}}$ ينصف ∠ب

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}} = \frac{4}{5}$

∴ $\frac{\text{أب} + \text{بجـ}}{\text{بجـ}} = \frac{4 + 5}{5}$

، ∵ محيط المثلث = ٢٧ سم ، أجـ = ٩ سم

∴ أب + بجـ = ٢٧ − ٩ = ١٨ سم

∴ $\frac{18}{\text{بجـ}} = \frac{9}{5}$  ∴ بجـ = ١٠ سم

∴ أب = ٨ سم

∴ بد = $\sqrt{\text{أب} \times \text{بجـ} - \text{أد} \times \text{دجـ}}$

= $\sqrt{10 \times 8 - 4 \times 5} = 2\sqrt{15}$ سم

(وهو المطلوب)

**١٢**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠بأد  ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$

، ∵ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{سب}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أب}}$  (وهو المطلوب)

**١٣**

∵ $\overleftrightarrow{\text{دس}}$ ينصف ∠أدجـ

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{2}{3}$  ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}}$

∴ $\overline{\text{هـس}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$  (وهو المطلوب)

**١٤**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠بأجـ  ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

، ∵ $\overline{\text{هـد}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$  ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـأ}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـأ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$  (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{بهـ}}{6 - \text{بهـ}} = \frac{6}{9}$  ∴ ٩ بهـ = ٣٦ − ٦ بهـ

∴ ١٥ بهـ = ٣٦

∴ بهـ = ٢٫٤ سم ، أهـ = ٦ − ٢٫٤ = ٣٫٦ سم

(المطلوب ثانياً)

**١٥**

∵ $\overleftrightarrow{\text{دس}}$ ينصف ∠أدب  ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أد}}{\text{دب}}$  (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{دص}}$ ينصف ∠أدجـ  ∴ $\frac{\text{أص}}{\text{صجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}}$  (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ دب = دجـ  ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$  (وهو المطلوب)

**١٦**

∵ $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠بأجـ  ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بس}}{\text{سجـ}}$  (١)

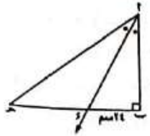
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أص}}$ ينصف ∠دأجـ  ∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$  (٢)

∴ من (١) ، (٢) :

، ∵ أب = أد  ∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{دص}}{\text{صجـ}}$

∴ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بد}}$  (وهو المطلوب)

**١٧**




∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{3}{5}$

∴ $\frac{24}{\text{دجـ}} = \frac{3}{5}$

∴ دجـ = ٤٠ سم

∴ بجـ = ٤٠ + ٢٤ = ٦٤ سم

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{3}{5}$  ∴ أب = ٣م ، أجـ = ٥م

من فيثاغورس : ∴ بجـ = ٤ م

∴ ٤ م = ٦٤  ∴ م = ١٦





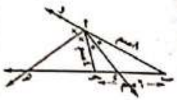
بالتعويض : ∴ أب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم

، أجـ = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم

∴ محيط ∆أبجـ = ٨٠ + ٤٨ + ٦٤ = ١٩٢ سم

(وهو المطلوب)

**١٨**




∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠جـأو

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{جـهـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

∴ $\frac{\text{جـهـ} + 6}{\text{جـهـ}} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$

∴ ٢ جـهـ = جـهـ + ٦  ∴ جـهـ = ٦ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بد}}{\text{دجـ}}$  ∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{8}{4}$

∴ $\frac{\text{بد} + \text{دجـ}}{\text{دجـ}} = \frac{8 + 4}{4}$  ∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{دجـ}} = \frac{12}{4}$

∴ $\frac{6}{\text{دجـ}} = 3$  ∴ دجـ = ٢ سم

∴ دهـ = جـهـ + جـد = ٦ + ٢ = ٨ سم

∴ بد = ٦ − ٢ = ٤ سم

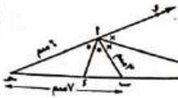
∴ أد = $\sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{بد} \times \text{دجـ}}$

= $\sqrt{8 \times 4 - 4 \times 2} = 2\sqrt{6}$ سم

، أهـ = $\sqrt{\text{بهـ} \times \text{جـهـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$

= $\sqrt{12 \times 6 - 8 \times 4} = 2\sqrt{10}$ سم  (وهو المطلوب)

**١٩**




∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠بأو

∴ $\frac{\text{جـهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{6}{3} = 2$

∴ جـهـ = ٢ هـب  ∴ جـب = بهـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{جـهـ}}$

∴ $\overline{\text{أب}}$ متوسط في ∆أجـهـ  (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠بأجـ

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∴ بد = $\frac{7}{3}$ سم ، دجـ = $\frac{14}{3}$ سم ، بهـ = ٧ سم

∴ هـد = $\frac{7}{3} + 7 = \frac{28}{3}$ سم ، هـجـ = ١٤ سم

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{أدهـ})}{\text{م}(\Delta\text{أجـهـ})} = \frac{\text{هـد}}{\text{جـهـ}} = \frac{\frac{28}{3}}{14} = \frac{2}{3}$

(لأن لهما نفس الارتفاع) (المطلوب ثانياً)

**٢٠**

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف ∠أجـب

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

، ∵ $\frac{\text{جـو}}{\text{أو}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جـو}}{\text{أو}}$

∴ $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$  (وهو المطلوب)

(٢) في ∆أبد :

∵ $\overleftrightarrow{\text{بهـ}}$ ينصف ∠أبد

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـد}} = \frac{\text{أب}}{\text{بد}}$  (١)

في ∆أدجـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{دو}}$ ينصف ∠أدجـ

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دجـ}}$  (٢)

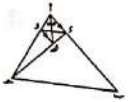
، ∵ أب = أد ، بد = دجـ  (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـد}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$

في ∆أدجـ : ∴ $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{دجـ}}$

∴ $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$  (وهو المطلوب)

**٢١**




∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠دأجـ

∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$

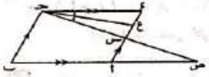
، ∵ $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{دأ}}$  ∴ $\frac{\text{دهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{وحـ}}$

، $\because$ أحـ = ءب $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وحـ}}$

$\therefore$ ءو // بحـ (وهو المطلوب)

**٢٢**



$\because$ أس // بحـ

$\therefore \frac{\text{أص}}{\text{أب}} = \frac{\text{سص}}{\text{سحـ}}$

$\therefore \frac{\text{أص}}{\text{سص}} = \frac{\text{أب}}{\text{سحـ}}$ (١)

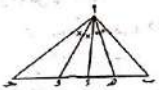
، $\because$ حـع ينصف ∠ءحـس

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{عس}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{حـس}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، $\because$ أب = ءحـ

$\therefore \frac{\text{أص}}{\text{سص}} = \frac{\text{ءع}}{\text{عس}}$ (وهو المطلوب)

**٢٣**



$\because$ أهـ ينصف ∠بأء

$\therefore \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أء}}$ (١)

، $\because$ أو ينصف ∠حـأء

$\therefore \frac{\text{ءو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$ (٢)

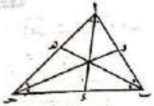
بضرب (١) في (٢) :

$\therefore \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} \times \frac{\text{ءو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أء}} \times \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}}$

، $\because$ أء ينصف ∠بأحـ $\therefore \frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

$\therefore \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} \times \frac{\text{ءو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$ (وهو المطلوب)

**٢٤**



$\because$ أء ينصف ∠بأحـ

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}}$ (١)

، $\because$ بهـ ينصف ∠أبحـ

$\therefore \frac{\text{حـهـ}}{\text{هـأ}} = \frac{\text{حـب}}{\text{بأ}}$ (٢)

، $\because$ حـو ينصف ∠أحـب $\therefore \frac{\text{أو}}{\text{وب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) بالضرب :

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} \times \frac{\text{حـهـ}}{\text{هـأ}} \times \frac{\text{أو}}{\text{وب}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}} \times \frac{\text{حـب}}{\text{بأ}} \times \frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = 1$

(وهو المطلوب)

**٢٥**

| | | |
|---|---|---|
| (١) (جـ) | (٢) (أ) | (٣) (جـ) |
| (٤) (جـ) | (٥) (ب) | (٦) (ب) |
| (٧) (جـ) | (٨) (د) | (٩) (جـ) |

**٢٦**

$\because$ سص // بحـ $\therefore \frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أص}}{\text{صحـ}}$

$\therefore \frac{2}{4} = \frac{\text{أص}}{3}$

$\therefore$ أص = ١,٥ سم (المطلوب أولاً)

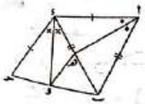
، $\because$ أهـ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـحـ}}$ $\therefore \frac{6}{4,5} = \frac{\text{بهـ}}{18}$

$\therefore$ بهـ = ٢٤ سم

$\therefore$ بحـ = ٢٤ − ١٨ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

**٢٧**



$\because$ أهـ ينصف ∠بأء

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}}$ (١)

، $\because$ ءو ينصف ∠بءحـ $\therefore \frac{\text{ءب}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ، $\because$ أب = بء ، أء = ءحـ

$\therefore \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}}$ $\therefore$ هـو // ءحـ (وهو المطلوب)





**٢٨**

$\because$ ءهـ // بحـ ، أب ، أحـ قاطعان لهما

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ (١)

، $\because$ أس ينصف ∠أ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ءس}}{\text{سهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{سهـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{هـحـ}}$ (المطلوب أولاً)

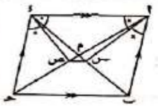
، $\because \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{\text{ءس}}{\text{هـس}}$

(لأن لهما نفس الارتفاع)

$\therefore \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{\text{أء}}{\text{أهـ}}$ ، من (١)

$\therefore \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أءس}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أهـس}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

**٢٩**



في Δ أبء :

$\because$ أس ينصف ∠بأء

$\therefore \frac{\text{بس}}{\text{سء}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أء}}$ (١)

، في Δ أحـء : $\because$ ءص ينصف ∠أءحـ

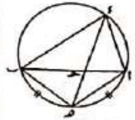
$\therefore \frac{\text{حـص}}{\text{صأ}} = \frac{\text{حـء}}{\text{أء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، $\because$ حـء = بأ

$\therefore \frac{\text{بس}}{\text{سء}} = \frac{\text{حـص}}{\text{صأ}}$

$\therefore$ بحـ // سص // أء (وهو المطلوب)

**٣٠**



$\because$ هـ منتصف ⌒أب

$\therefore$ ءهـ ينصف ∠أءب

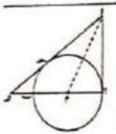
$\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{2}{3}$

، $\because \frac{\text{م}(\Delta\text{ أءحـ})}{\text{م}(\Delta\text{ بءحـ})} = \frac{\text{م}(\Delta\text{ أهـحـ})}{\text{م}(\Delta\text{ بهـحـ})} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}}$

$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\text{ أءحـ}) + \text{م}(\Delta\text{ أهـحـ})}{\text{م}(\Delta\text{ بءحـ}) + \text{م}(\Delta\text{ بهـحـ})} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حـب}} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\text{ أءهـ})}{\text{م}(\Delta\text{ بءهـ})} = \frac{2}{3}$ (وهو المطلوب)

**٣١**



العمل : نرسم ءم

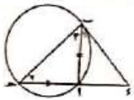
البرهان :

$\because$ ءأ ، ءحـ مماستان للدائرة

$\therefore$ ءم ينصف ∠أءحـ $\therefore \frac{\text{أم}}{\text{مهـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءهـ}}$

، $\because$ أء = ءحـ (نظرية) $\therefore \frac{\text{أم}}{\text{مهـ}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{ءهـ}}$ (وهو المطلوب)

**٣٢**



$\because$ ق(∠١) = ق(∠٢)

(مماسية ومحيطية مشتركتان في ⌒أب)

، ق(∠٢) = ق(∠٣) (لأن أب = أحـ)

$\therefore$ ق(∠١) = ق(∠٣) $\therefore$ بأ ينصف ∠ءبحـ

$\therefore \frac{\text{ءأ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{بحـ}}$

، $\because$ أب = أحـ $\therefore \frac{\text{ءأ}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءب}}{\text{بحـ}}$

$\therefore$ ءب × أب = ءأ × بحـ (وهو المطلوب)

**٣٣**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) (ب) | (٢) (أ) | (٣) (جـ) | (٤) (ب) |
| (٥) (أ) | (٦) (د) | (٧) (ب) | (٨) (جـ) |
| (٩) (جـ) | (١٠) (أ) | (١١) (جـ) | (١٢) (د) |
| (١٣) (أ) | (١٤) (أ) | (١٥) (د) | (١٦) (ب) |

## إرشادات لحل رقم [٣٢]

(١) فى Δ أبحـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$ ∴ $\frac{\text{٦}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{ءحـ}}$

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{٣}} = \text{٢}$

فى Δ أحـء : ∵ $\overleftrightarrow{\text{حـهـ}}$ ينصف ∠أحـء

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{حـء}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}}$ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}} = \text{٢}$

(٢) فى Δ أبحـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{بء}}$ ينصف ∠أبحـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءحـ}}$ ∴ $\frac{\text{٣}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{٤}}$

∴ بحـ = ٦ سم

، فى Δ أبحـ : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـحـ}}$ ∴ $\frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{بهـ} + \text{٦}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{بهـ} + \text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ∴ ٢ بهـ = بهـ + ٦

∴ بهـ = ٦ سم

(٣) فى Δ أءحـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ينصف ∠أءحـ

∴ $\frac{\text{حـء}}{\text{أء}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ (١)

، فى Δ أءب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف ∠أءب

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{أء}} = \frac{\text{بو}}{\text{أو}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{أء}} + \frac{\text{حـء}}{\text{أء}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

∴ $\frac{\text{بء} + \text{ءحـ}}{\text{أء}} = \frac{\text{١٧}}{\text{١٢}}$ ∴ $\frac{\text{١٧}}{\text{أء}} = \frac{\text{١٧}}{\text{١٢}}$

∴ أء = ١٢ سم

، من (١) : $\frac{\text{حـء}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ∴ حـء = ٩ سم

(٤) فى Δ أبحـ : ∵ ق(∠ء أب) = ق(∠ء أحـ)

∴ $\overline{\text{أء}}$ ينصف ∠حـ أب

∴ $\frac{\text{ءحـ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}}$

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{٨}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}}$ (١)

، ∵ ق(∠ب) = ٢ ق(∠ء أب) = ٢ ق(∠ء أحـ)

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ أب)

∴ حـأ = حـب = ١٢ سم

، من (١) : ∴ $\frac{\text{١٢}}{\text{أب}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}}$ ∴ أب = ٦ سم

(٥) بء = $\sqrt{(\text{٣} - \text{١})^{\text{٢}} + (\text{٣} - \text{١})^{\text{٢}}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢}}$ وحدة طول

، ءحـ = $\sqrt{(\text{١} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{١} - \text{٠})^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٢}}$ وحدة طول

فى Δ أبحـ : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{ءب}}$

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

(٦) فى Δ أبحـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٨}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ (١)

إذا كان : أحـ − أب = ٥

∴ أحـ = أب + ٥

من (١) : ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أب} + \text{٥}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

∴ ٥ أب = ٤ أب + ٢٠

∴ أب = ٢٠ سم

، إذا كان محيط Δ أبحـ = ٥٤ سم

∴ أب + أحـ + بحـ = ٥٤

∴ أب + أحـ + ١٨ = ٥٤

∴ أحـ = ٣٦ − أب

، من (١) : ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{٣٦} - \text{أب}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

∴ ٥ أب = ١٤٤ − ٤ أب

∴ ٩ أب = ١٤٤ ∴ أب = ١٦ سم

، إذا كان أء = $\text{٤}\sqrt{\text{١٥}}$ سم

∴ $(\text{أء})^{\text{٢}}$ = أب × أحـ − بء × ءحـ

∴ $(\text{٤}\sqrt{\text{١٥}})^{\text{٢}}$ = أب × أحـ − ٨ × ١٠

∴ أب × أحـ = ٣٢٠

، من (١) : (أب × أحـ) × $\left(\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}\right) = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ × ٣٢٠

∴ $(\text{أب})^{\text{٢}}$ = ٢٥٦ ∴ أب = ١٦ سم

∴ الإجابة هى جميع ما سبق.





(٧) فى ΔΔ أبء ، أءحـ :

$\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ على استقامة واحدة ، مشتركان فى الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أءحـ})} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ} + \text{بء}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣} + \text{٥}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{٨}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}}$ ∴ بء = ٣ سم

∴ ءحـ = ٨ − ٣ = ٥ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

نفرض أن : أب = ٣ س ، أحـ = ٥ س

∵ Δ أبحـ قائم الزاوية فى ب

∴ $(\text{بحـ})^{\text{٢}} = (\text{أحـ})^{\text{٢}} - (\text{أب})^{\text{٢}}$

∴ $(\text{بحـ})^{\text{٢}} = (\text{٥ س})^{\text{٢}} - (\text{٣ س})^{\text{٢}}$

∴ $(\text{٨})^{\text{٢}}$ = ٢٥ $\text{س}^{\text{٢}}$ − ٩ $\text{س}^{\text{٢}}$

∴ ١٦ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ٦٤ ∴ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ٤

∴ س = ٢ ∴ أب = ٣ × ٢ = ٦ سم

(٨) فى Δ ءبحـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف ∠بءحـ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

فى ΔΔ بءو ، وءحـ :

$\overline{\text{بو}}$ ، $\overline{\text{وحـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ء

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{بءو})}{\text{م}(\Delta\,\text{وءحـ})} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{م}(\Delta\,\text{وءحـ})} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ م(Δ وءحـ) = ٢٠ $\text{سم}^{\text{٢}}$

∴ م(Δ حـءب) = ٢٠ + ١٠ = ٣٠ $\text{سم}^{\text{٢}}$

فى ΔΔ حـءب ، حـءأ :

$\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{ءأ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس حـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{حـءب})}{\text{م}(\Delta\,\text{حـءأ})} = \frac{\text{بء}}{\text{أء}} = \frac{\text{٤}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∴ $\frac{\text{٣٠}}{\text{م}(\Delta\,\text{حـءأ})} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∴ م(Δ حـءأ) = ٤٥ $\text{سم}^{\text{٢}}$

فى Δ أبحـ : ∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{أب}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{حـهـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٤}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

فى ΔΔ ءهـحـ ، ءأحـ

∵ $\overline{\text{هـحـ}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ء

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{ءهـحـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ءأحـ})} = \frac{\text{هـحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{ءهـحـ})}{\text{٤٥}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

∴ م(Δ ءهـحـ) = ١٨ $\text{سم}^{\text{٢}}$

(٩) ∵ ق($\frown{\text{بس}}$) = ق($\frown{\text{سص}}$)

∴ ق(∠بحـس) = ق(∠سحـص)

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـء}}$ ينصف ∠بحـأ

∴ $\frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{أء}}$ ∴ $\frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

نفرض أن : بحـ = س ، حـأ = ٢ س

فى Δ أبحـ : ∵ ق(∠أبحـ) = ٩٠°

∴ $(\text{أحـ})^{\text{٢}} - (\text{بحـ})^{\text{٢}} = (\text{أب})^{\text{٢}}$

∴ $(\text{٢ س})^{\text{٢}} - (\text{س})^{\text{٢}} = (\text{٦}\sqrt{\text{٣}})^{\text{٢}}$

∴ ٣ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ١٠٨ ∴ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ٣٦

∴ س = ٦

∴ بحـ = ٦ سم ، حـأ = ١٢ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م

∴ $(\text{أب})^{\text{٢}}$ = أص × أحـ

∴ $(\text{٦}\sqrt{\text{٣}})^{\text{٢}}$ = أص × ١٢

∴ أص = ٩ سم

(10) في Δ أ ب حـ : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{4}{5}$

نفرض أن : أب = ٤ س ، أحـ = ٥ س

، ∵ $(\text{أء})^2 = \text{أب} \times \text{أحـ} - \text{بء} \times \text{ءحـ}$

∴ $(4\sqrt{10})^2 = (4\,\text{س})(5\,\text{س}) - 4 \times 5$

∴ $20\,\text{س}^2 - 20 = 160$

∴ $\text{س}^2 = 9$ ∴ س = ٣

∴ أب = ٤ × ٣ = ١٢ سم

، أحـ = ٥ × ٣ = ١٥ سم

، محيط Δ أ ب حـ = ١٢ + ١٥ + ٩ = ٣٦ سم

(11) في Δ أ ب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠حـ أ ب

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بحـ}} = \frac{4}{9}$

في ΔΔ أ ء ب ، أ حـ ب :

∵ $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أءب})}{\text{م}(\Delta\,\text{أحـب})} = \frac{\text{ءب}}{\text{حـب}} = \frac{4}{9}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أءب})}{72} = \frac{4}{9}$

∴ م(Δ أ ء ب) = ٣٢ $\text{سم}^2$

(12) في Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ب أ حـ) = ٩٠°

∴ $\text{بحـ} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10$ سم

، م(Δ أ ب حـ) = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ $\text{سم}^2$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أ ب حـ عند الرأس أ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

في ΔΔ أ ب ء ، أ حـ ء :

∵ $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{حـء}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أحـء})} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{3}{4}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أبء}) + 24} = \frac{3}{4}$

∴ ٤ م(Δ أ ب ء) = ٣ م(Δ أ ب ء) + ٧٢

∴ م(Δ أ ب ء) = ٧٢ $\text{سم}^2$

(13) نفرض أن : هـء = ءحـ = س

في Δ أ ء ب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ينصف ∠ء أ حـ

∴ $\frac{\text{ءحـ}}{\text{حـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{حـب}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∴ حـب = ٢ س

، ∵ $(\text{أحـ})^2 = \text{أء} \times \text{أب} - \text{حـء} \times \text{حـب}$

∴ $(\sqrt{6})^2 = 3 \times 6 - \text{س} \times 2\,\text{س}$

∴ $2\,\text{س}^2 = 18 - 6 = 12$

∴ $\text{س}^2 = 6$ ∴ $\text{س} = \sqrt{6}$

∴ $\text{ءهـ} = \text{حـء} = \sqrt{6}$

، ∵ ءأ × ءو = ءهـ × ءحـ

∴ $3 \times \text{ءو} = \sqrt{6} \times \sqrt{6}$

∴ ءو = ٢ سم

(14) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أ ب حـ عند الرأس أ

∴ ق(∠هـ أ ء) = ٩٠°

∵ ظا θ = − ظا (١٨٠° − θ) = − ظا (∠أ هـ ء)

$= -\frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

(15) في Δ أ ب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بحـ}} = \frac{1}{3}$ (1)

، في Δ أ ب هـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ب أ هـ





∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سهـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أهـ}}$ ∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سهـ}} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$

، ∵ $\overline{\text{سو}} \parallel \overline{\text{هـحـ}}$

∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سهـ}} = \frac{\text{بو}}{\text{وحـ}} = \frac{2}{1}$

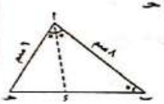
∴ $\frac{\text{بو}}{\text{بحـ}} = \frac{2}{3}$ (2)

بطرح (1) من (2) : ∴ $\frac{\text{بو}}{\text{بحـ}} - \frac{\text{بء}}{\text{بحـ}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

∴ $\frac{\text{ءو}}{\text{بحـ}} = \frac{1}{3}$

(16) نرسم $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ حـ

ويقطع $\overline{\text{بحـ}}$ في ء



، ∵ ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب)

∴ ق(∠ب) = ق(∠ب أ ء)

∴ بء = ءأ

نفرض أن : بء = ءأ = س

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ءحـ}} = \frac{8}{6}$

∴ $\text{ءحـ} = \frac{3}{4}\,\text{س}$

، ∵ $(\text{أء})^2 = \text{أب} \times \text{أحـ} - \text{بء} \times \text{ءحـ}$

∴ $(\text{س})^2 = 8 \times 6 - \text{س} \times \frac{3}{4}\,\text{س}$

∴ $\text{س}^2 = 48 - \frac{3}{4}\,\text{س}^2$

∴ $\frac{7}{4}\,\text{س}^2 = 48$ ∴ $\text{س}^2 = \frac{192}{7}$

∴ $\text{س} = \frac{8\sqrt{21}}{7}$

، ∵ بحـ = بء + ءحـ

$= \frac{8\sqrt{21}}{7} + \frac{3}{4}\left(\frac{8\sqrt{21}}{7}\right)$

$= \frac{8\sqrt{21}}{7} + \frac{6\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{21}$ سم

**٣٤**

∵ أب > أحـ ، ∴ بء > ءحـ

وواضح أن : بء = بهـ + هـء (1)

، حـء = حـهـ − هـء (2)

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

، بطرح (1) ، (2) : ∴ بء − حـء = ٢ هـء

ويجمع (1) ، (2) : بء + ءحـ = بحـ = ٢ حـهـ

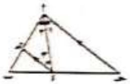
∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ حـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{بء} + \text{ءحـ}} = \frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{\text{بء} - \text{ءحـ}}$

∴ $\frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{2\,\text{هـحـ}} = \frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{2\,\text{هـء}}$

∴ $\frac{\text{أب} - \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{هـحـ}}$ (وهو المطلوب)

**٣٥**



∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ب أ حـ

∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

، ∵ $\overline{\text{أحـ}} \parallel \overline{\text{هـء}}$

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) بالتبادل

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) ∴ أهـ = ءهـ

، ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠أ من الداخل ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{بء} + \text{ءحـ}} = \frac{\text{أب} + \text{أحـ}}{\text{بحـ}}$

∴ $\text{بحـ} = \frac{\text{ءحـ}(\text{أب} + \text{أحـ})}{\text{أحـ}}$ (1)

، ∵ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{حـء}}{\text{حـب}}$ ∴ $\text{أهـ} = \frac{\text{أب} \times \text{حـء}}{\text{بحـ}}$ (2)

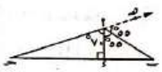
من (1) ، (2) : ∴ $\text{أهـ} = \frac{\text{أب} \times \text{حـء} \times \text{أحـ}}{\text{ءحـ}(\text{أب} + \text{أحـ})}$

∴ $\text{أهـ} = \frac{\text{أب} \times \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}}$

∴ $\text{ءهـ} = \frac{\text{أب} \times \text{أحـ}}{\text{أب} + \text{أحـ}}$ (وهو المطلوب)

**٣٦**

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ فيكون



$ق(\angle \text{هـ أ ب}) = 55^\circ$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ينصف $\angle$ هـ أ ء

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{بجـ}}$

∴ أء × بجـ = أجـ × بء = ٣٦ سم$^2$

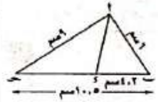
∴ مساحة $\Delta$ أبجـ = $\frac{1}{2}$ بجـ × أء

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ = ١٨ سم$^2$

(وهو المطلوب)

## إرشادات تمارين 8

**١**




∵ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

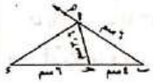
، $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{4{,}2}{10{,}5 - 4{,}2}$

$= \frac{2}{3}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ (وهو المطلوب)

**٢**




∵ $\frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}} = \frac{6}{3{,}6} = \frac{5}{3}$

، $\frac{\text{بء}}{\text{جـء}} = \frac{4 + 6}{6} = \frac{5}{3}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{جـء}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $\angle$ جـ أ هـ (وهو المطلوب)

**٣**

(١) ∵ $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ينصف $\angle$ أءجـ فى $\Delta$ أءجـ :

∴ $\frac{\text{جـهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جـء}}{\text{أء}} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$

، ∵ $\frac{\text{بجـ}}{\text{أب}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{\text{جـهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{أب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بهـ}}$ ينصف $\angle$ أبجـ فى $\Delta$ أبجـ

(وهو المطلوب)

(٢) ∵ $\Delta$ أبجـ قائم الزاوية فى أ

∴ $(\text{بجـ})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{أجـ})^2$

$= (30)^2 + (40)^2 = 2500$

∴ بجـ = ٥٠ سم

، ∵ $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{بجـ}}$

∴ أء = $\frac{\text{أب} \times \text{أجـ}}{\text{بجـ}}$ (نظرية إقليدس)

∴ أء = ٢٤ سم

∴ أهـ = ٢٤ − ٩ = ١٥ سم

، ∵ $\Delta$ أبجـ ~ $\Delta$ ءبأ

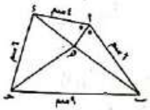
∴ $\frac{\text{بأ}}{\text{بء}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}}$ ∴ $\frac{30}{\text{بء}} = \frac{50}{30}$

∴ ءب = ١٨ سم ∴ $\frac{\text{ءب}}{\text{أب}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{أهـ}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ∴ $\frac{\text{ءب}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{أهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بهـ}}$ ينصف $\angle$ أبجـ (وهو المطلوب)

**٤**




∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $\angle$ ءأب

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}}$

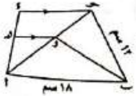
∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

(المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{بجـ}}{\text{جـء}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{جـب}}{\text{جـء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـهـ}}$ ينصف $\angle$ بجـء (المطلوب ثانيًا)

**٥**




فى $\Delta$ أجـء :

∵ ٢ أهـ = ٣ هـء

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{3}{2}$

، ∵ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{ءجـ}}$ ∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{3}{2}$

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$





∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{بجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بو}}$ ينصف $\angle$ أبجـ فى $\Delta$ أبجـ

(وهو المطلوب)

**٦**

∵ $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ينصف $\angle$ أءب ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

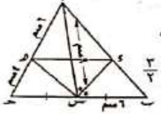
، ∵ بء = ءجـ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف $\angle$ أءجـ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ينصف $\angle$ أءب ، $\overrightarrow{\text{ءو}}$ ينصف $\angle$ أءجـ

، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـء}} \perp \overline{\text{ءو}}$ (المطلوب ثانيًا)

**٧**




∵ $\overrightarrow{\text{سء}}$ ينصف $\angle$ أسب

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

(المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

∴ $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

، ∵ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{3}{2}$ ، سب = سجـ

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{3}{2}$

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{3}{2}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{سهـ}}$ ينصف $\angle$ أسجـ (المطلوب ثالثًا)

**٨**

∵ $\overrightarrow{\text{بس}}$ ينصف $\angle$ أبجـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{سجـ}}$

، ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{جـء}}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{صء}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{صء}}$

، ∵ أب = أجـ ، بجـ = جـء ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـء}} = \frac{\text{أص}}{\text{صء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـص}}$ ينصف $\angle$ أجـء (وهو المطلوب)

**٩**

∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف $\angle$ بأجـ ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـهـ}}{\text{هـب}}$

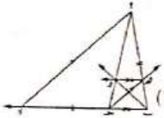
، ∵ $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بء}}$ ∴ $\frac{\text{هـجـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{وء}}$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{وء}}$

، ∵ أب = أء ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أء}} = \frac{\text{جـو}}{\text{وء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أو}}$ ينصف $\angle$ جـأء (وهو المطلوب)

**١٠**



فى $\Delta$ أبء :

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$

∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{جـء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}}$ (١)

فى $\Delta$ أبجـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{جـو}}{\text{أو}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{أهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{جـء}} = \frac{\text{جـو}}{\text{أو}}$

، ∵ أب = جـء ∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{أو}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بو}}$ ينصف $\angle$ أبجـ فى $\Delta$ أبجـ (وهو المطلوب)

**١١**

∵ $\overrightarrow{\text{بم}}$ ينصف $\angle$ ب ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{مء}}{\text{مجـ}}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أم}}$ ينصف $\angle$ أ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{مء}}{\text{مجـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{بجـ} + \text{أجـ}}$

∴ $\frac{\text{بء}}{16} = \frac{\text{أء}}{8} = \frac{12}{24}$ ∴ أء = ٤ سم (وهو المطلوب)

**١٢**

∵ $\overleftarrow{ع م}$ ينصف ∠ س ع ل

، ∵ $\overleftarrow{ص م}$ ينصف ∠ س ص ل

∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا المثلث الداخلة

∴ $\overleftarrow{س م}$ ينصف ∠ ع س ص ∴ $\frac{ع ل}{ل ص} = \frac{س ع}{س ص}$

∴ $\frac{ع ل}{ص ل} = \frac{٥}{٨}$ ∴ ٨ ع ل = ٥ ص ل

(وهو المطلوب)

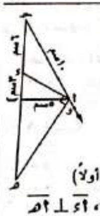
**١٣**

∵ $\frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$ ، $\frac{ء حـ}{ب ء} = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{ء حـ}{ب ء}$ ، ∴ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

(وهو المطلوب)

**١٤**



∵ $\frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

، $\frac{حـ ء}{ء ب} = \frac{٦}{٣} = ٢$

∴ $\frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{حـ ء}{ء ب}$

∴ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ (المطلوب أولاً)

∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{و حـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ حـ أ ب ، $\overline{أ ء} \perp \overline{أ هـ}$

∴ $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ و أ ب ∴ $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$

∴ $\frac{٥}{١٠} = \frac{ب هـ}{٩ + ب هـ}$ ∴ ٤٥ + ٥ ب هـ = ١٠ ب هـ

∴ ب هـ = ٩ سم (المطلوب ثانيًا)

**١٥**

فى △ أ ب ء :

∵ $\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ ء ب س ∴ $\frac{ء م}{أ م} = \frac{ء ب}{أ ب}$

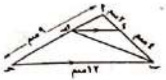
، فى △ أ حـ ء :

∵ $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠ ء حـ ص ∴ $\frac{ء م}{أ م} = \frac{ء حـ}{أ حـ}$

∴ $\frac{ء ب}{ب أ} = \frac{ء حـ}{حـ أ}$ ∴ $\frac{ء ب}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$

∴ $\overleftarrow{أ م}$ ينصف ∠ ب أ حـ (وهو المطلوب)

**١٦**



∵ $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب حـ}$

∴ $\frac{أ هـ}{أ حـ} = \frac{أ ء}{أ ب}$

∴ $\frac{أ هـ}{٩} = \frac{٢}{٦}$ ∴ أ هـ = ٣ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{أ هـ}{هـ حـ} = \frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{١}{٢}$

∴ $\overleftarrow{ب هـ}$ ينصف ∠ أ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

**١٧**

∵ $\overline{هـ ء} \parallel \overline{س ص} \parallel \overline{ب حـ}$

∴ $\frac{هـ س}{ب س} = \frac{ء ص}{حـ ص}$ (١)

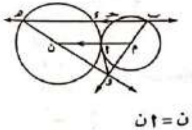
، ∵ أ ء × ب س = أ حـ × هـ س

∴ $\frac{هـ س}{ب س} = \frac{أ ء}{أ حـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ء ص}{حـ ص} = \frac{أ ء}{أ حـ}$

∴ $\overleftarrow{أ ص}$ ينصف ∠ حـ أ ء (وهو المطلوب)

**١٨**



فى △ ب و هـ :

∵ $\overline{م ن} \parallel \overleftrightarrow{ب هـ}$

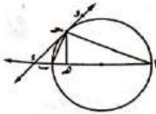
∴ $\frac{ب م}{م و} = \frac{هـ ن}{و ن}$

، ∵ ب م = م أ ، هـ ن = أ ن

∴ $\frac{أ م}{م و} = \frac{أ ن}{و ن}$ ∴ $\frac{أ م}{أ ن} = \frac{م و}{و ن}$

∴ $\overleftarrow{و أ}$ ينصف ∠ م و ن (وهو المطلوب)

**١٩**



∵ $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء حـ}{حـ هـ}$

∴ $\overleftarrow{حـ ب}$ ينصف

∠ ء حـ هـ (١)





∵ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° ∴ $\overline{أ حـ} \perp \overline{ب حـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overleftarrow{حـ أ}$ ينصف ∠ و حـ هـ

(منصفا الزاوية متعامدان) (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{أ ء}{أ هـ} = \frac{ء حـ}{حـ هـ}$

، ∵ $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء حـ}{حـ هـ}$

∴ $\frac{أ ء}{أ هـ} = \frac{ء ب}{ب هـ}$ ∴ $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$ (المطلوب ثانيًا)

**٢٠**

فى △ أ ب حـ : ∵ حـ ء = ١٠ − ٤ = ٦ سم

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب أ}{أ حـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب أ}{أ حـ}$ .

∴ $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ (المطلوب أولاً)

فى △ أ ب و : ∵ $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ ، $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب و}$

من تطابق △△ أ هـ ب ، أ هـ و

∴ △ أ ب و متساوى الساقين

∴ أ ب = أ و = ٦ سم

∴ حـ و = ٩ − ٦ = ٣ سم

، ∵ △△ ب أ و ، ب حـ و مشتركان فى الرأس ب

، و ∈ $\overleftrightarrow{أ حـ}$

∴ $\frac{م(△ أ ب و)}{م(△ حـ ب و)} = \frac{أ و}{و حـ} = \frac{٦}{٣} = ٢$ (المطلوب ثانيًا)

## إرشادات تمارين 9

**١** (١) ٦٣ (٢) −١٦١ (٣) صفر (٤) ١

**٢**

(١) ∵ $ق_م$(أ) = −٣٦ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة

، ∵ $ق_م$(أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$

∴ −٣٦ = $(م أ)^٢$ − ١٠٠

∴ $(م أ)^٢$ = ٦٤ ∴ أ م = ٨ سم

(٢) ∵ $ق_م$(ب) = ٩٦ > ٠ ∴ ب تقع خارج الدائرة

، ∵ $ق_م$(ب) = $(م ب)^٢$ − $نق^٢$

∴ ٩٦ = $(م ب)^٢$ − ١٠٠

∴ $(م ب)^٢$ = ١٩٦ ∴ م ب = ١٤ سم

(٣) $ق_م$(حـ) = ٠ ∴ حـ تقع على الدائرة

∴ م حـ = نق = ١٠ سم

**٣**

∵ $ق_م$(أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$ ∴ ٤٠٠ = ٦٢٥ − $نق^٢$

∴ $نق^٢$ = ٢٢٥ ∴ نق = ١٥ سم (وهو المطلوب)

**٤**

∵ $\overline{أ ء}$ مماسة للدائرة عند ء ∴ أ ء = $\sqrt{ق_م(أ)}$

∴ $ق_م$(أ) = $(أ ء)^٢$ = $(٨)^٢$ = ٦٤ (وهو المطلوب)

**٥**

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (جـ)

**٦**

∵ أ تقع خارج الدائرة ، $\overline{أ ب}$ مماسة للدائرة عند ب

∴ أ ب = $\sqrt{ق_م(أ)}$ = $\sqrt{٨١}$ = ٩ سم (المطلوب أولاً)

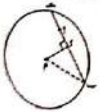
، ∵ $ق_م$(أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$

∴ ٨١ = $(م أ)^٢$ − ١٤٤

∴ $(م أ)^٢$ = ٢٢٥ ∴ م أ = ١٥

∴ أ حـ = ١٥ − ١٢ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

**٧**



∵ $ق_م$(أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$

= $(٢٣)^٢$ − $(٣١)^٢$

= −٤٣٢

، ∵ ق م (أ) = − أ ب × أ جـ

∴ −٤٣٢ = − أ ب × أ جـ ∴ ٤٣٢ = أ ب × أ جـ

، ∵ أ ب = ٣ أ جـ

∴ ٤٣٢ = ٣ أ جـ × أ جـ ∴ (أ جـ)$^{٢}$ = ١٤٤

∴ أ جـ = ١٢ سم ∴ أ ب = ٣٦ سم

∴ ب جـ = ٣٦ + ١٢ = ٤٨ سم (المطلوب أولًا)

بفرض أن بعد الوتر ب جـ عن مركز الدائرة هو م ء

حيث : م ء ⊥ ب جـ

∴ ء منتصف ب جـ

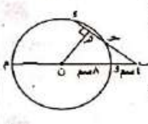
، ∵ ق م (ء) = (م ء)$^{٢}$ − نق$^{٢}$ = − ب ء × ء جـ

∴ (م ء)$^{٢}$ − (٣١)$^{٢}$ = −٢٤ × ٢٤

∴ (م ء)$^{٢}$ = ٣٨٥

∴ م ء = ١٩,٦ سم (المطلوب ثانيًا)

## ٨




∵ ق ن (ب) = (ن ب)$^{٢}$ − نق$^{٢}$

= (١٢)$^{٢}$ − (٨)$^{٢}$

= ٨٠

، ∵ ق ن (ب) = ب جـ × ب ء

∴ ٨٠ = ب جـ × ب ء

، ∵ ب جـ = جـ ء ∴ ٨٠ = جـ ء × ٢ جـ ء

∴ جـ ء = ٢ $\sqrt{١٠}$ سم (المطلوب أولًا)

بفرض أن بعد الوتر جـ ء عن مركز الدائرة هو ن هـ

حيث : ن هـ ⊥ جـ ء

∴ هـ منتصف جـ ء

، ∵ ق ن (هـ) = (هـ ن)$^{٢}$ − نق$^{٢}$ = − هـ جـ × هـ ء

∴ (هـ ن)$^{٢}$ − (٨)$^{٢}$ = − $\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٠}$

∴ ن هـ = ٣ $\sqrt{٦}$ سم (المطلوب ثانيًا)

## ٩

∵ ق م (جـ) = جـ ء × جـ أ = ١٦ × ٢٥ = ٤٠٠

، ∵ جـ تقع خارج الدائرة

، جـ ب مماسة للدائرة عند ب

∴ جـ ب = $\sqrt{ق م (جـ)}$ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

∴ (أ ب)$^{٢}$ = (أ جـ)$^{٢}$ − (جـ ب)$^{٢}$ = (٢٥)$^{٢}$ − (٢٠)$^{٢}$

= ٢٢٥

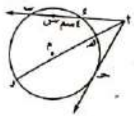
∴ أ ب = ١٥ سم

∴ أ م = نق = ٧,٥ سم (المطلوب أولًا)

، م (Δ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ٢٠ = ١٥٠ سم$^{٢}$

(المطلوب ثانيًا)

## ١٠




∵ أ تقع خارج الدائرة

، أ جـ يمس الدائرة عند جـ

∴ أ جـ = $\sqrt{ق م (أ)}$ = $\sqrt{١٤٤}$

= ١٢ سم

، ∵ ق م (أ) = أ ء × أ ب ∴ ١٤٤ = ٨ × أ ب

∴ أ ب = ١٨ سم ∴ ء ب = ١٠ سم

، ∵ ق م (أ) = أ هـ × أ و

∴ ١٤٤ = أ هـ × (أ هـ + ١٨)

∴ ١٤٤ = (أ هـ)$^{٢}$ + ١٨ أ هـ

∴ (أ هـ)$^{٢}$ + ١٨ أ هـ − ١٤٤ = ٠

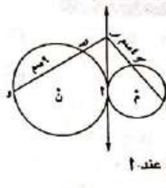
∴ (أ هـ + ٢٤) (أ هـ − ٦) = ٠

∴ أ هـ = ٦ سم (المطلوب أولًا)

∴ ق م (س) = − ء س × س ب = −٤ × ٦ = −٢٤

(المطلوب ثانيًا)

## ١١




∵ أ تقع على الدائرة م

، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = ٠

، ∵ ب أ مماس للدائرة م عند أ

∴ ق م (ب) = (أ ب)$^{٢}$





، ∵ أ ب مماس للدائرة ن عند أ

∴ ق ن (ب) = (أ ب)$^{٢}$ ∴ ق م (ب) = ق ن (ب)

∴ أ ب محور أساسي للدائرتين م ، ن (المطلوب أولًا)

∵ ق م (ب) = ب جـ × ب ء ∴ ٣٦ = ٤ × ب ء

∴ ب ء = ٩ سم ∴ جـ ء = ٥ سم

، ∵ أ ب مماس للدائرة م

∴ أ ب = $\sqrt{ق م (ب)}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

، ∵ ق م (ب) = ق ن (ب)

، ∵ ق ن (ب) = ب هـ × ب و

∴ ٣٦ = ب هـ × (٩ + ب هـ)

∴ ٣٦ = (ب هـ)$^{٢}$ + ٩ ب هـ

∴ (ب هـ)$^{٢}$ + ٩ ب هـ − ٣٦ = ٠

∴ (ب هـ + ١٢) (ب هـ − ٣) = ٠

∴ ب هـ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

## ١٢

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = ٠

وبالمثل : ق م (ب) = ق ن (ب) = ٠

∴ أ ب محور أساسي للدائرتين م ، ن

، ∵ جـ ∈ أ ب

∴ جـ ب محور أساسي للدائرتين م ، ن

(المطلوب أولًا)

∵ ق ن (جـ) = جـ أ × جـ ب

∴ ٦٤ = جـ أ × (جـ أ + ١٢)

∴ ٦٤ = (جـ أ)$^{٢}$ + ١٢ جـ أ

∴ (جـ أ)$^{٢}$ + ١٢ جـ أ − ٦٤ = ٠

∴ (جـ أ + ١٦) (جـ أ − ٤) = ٠

∴ جـ أ = ٤ سم

، ∵ جـ ∈ المحور الأساسي للدائرتين

∴ ق م (جـ) = ق ن (جـ)

، جـ ء مماس للدائرة م عند ء

∴ جـ ء = $\sqrt{ق م (جـ)}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

## ١٣

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = ٠

وبالمثل : ق م (ب) = ق ن (ب)

∴ أ ب محور أساسي للدائرتين م ، ن

(المطلوب أولًا)

، ∵ س ∈ أ ب ∴ ق م (س) = ق ن (س)

، ∵ ق م (س) = س ء × س جـ

، س ء = ٢ ء جـ ∴ ١٤٤ = ٢ ء جـ × ٣ ء جـ

∴ (ء جـ)$^{٢}$ = ٢٤ ∴ ء جـ = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

∴ س جـ = ٦ $\sqrt{٦}$ سم

، ∵ ق ن (س) = س و × س هـ

∴ ١٤٤ = س و × (س و + ١٠)

∴ ١٤٤ = (س و)$^{٢}$ + ١٠ س و

∴ (س و)$^{٢}$ + ١٠ س و − ١٤٤ = ٠

∴ (س و + ١٨) (س و − ٨) = ٠

∴ س و = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

∵ ق م (س) = ق ن (س)

∴ س ء × س جـ = س و × س هـ

∴ الشكل جـ ء و هـ رباعي دائري (المطلوب ثالثًا)

## ١٤

(١) س = $\frac{١}{٢}$ [١٠٠° + ٦٠°] = ٨٠°

(٢) س = $\frac{١}{٢}$ [١٥٠° − ٧٠°] = ٤٠°

(٣) س = $\frac{١}{٢}$ [٢٤٠° − ١٢٠°] = ٦٠°

(٤) ٢٨° = $\frac{١}{٢}$ [س − ٣٠°]

∴ ٥٦° = س − ٣٠° ∴ س = ٨٦°

(٥) ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ [س − ٧٥°]

∴ ٩٠° = س − ٧٥° ∴ س = ١٦٥°

(٦) ٧٠° = ١/٢ [س − (٣٦٠° − س)]
∴ ١٤٠° = ٢ س − ٣٦٠° ∴ ٢ س = ٥٠٠°
∴ س = ٢٥٠°

(٧) ١١٠° = ١/٢ [٢ ع + ١٣٠°]
∴ ٢٢٠° = ٢ ع + ١٣٠° ∴ ٢ ع = ٩٠°
∴ ع = ٤٥°

(٨) ٩٠° = ١/٢ [٧ ص + ١١ ص]
∴ ١٨٠° = ١٨ ص ∴ ص = ١٠°

(٩) ٥٠° = ١/٢ [١٤٥° − (٢ س − ٥°)]
∴ ١٠٠° = ١٥٠° − ٢ س
∴ ٢ س = ٥٠° ∴ س = ٢٥°

(١٠) ٤٥° = ١/٢ [(٢ س + ١٠°) − (س − ٥°)]
∴ ٩٠° = س + ١٥° ∴ س = ٧٥°

(١١) (٣ س + ٥°) = ٣٦٠° − ١٣٠° = ٢٣٠°
∴ ٣ س = ٢٢٥° ∴ س = ٧٥°
، ع = ١/٢ [٢٢٠° − ١٣٠°] = ٥٠°

(١٢) ١٥° = ١/٢ [س − ٦٠°] ∴ ٣٠° = س − ٦٠°
∴ س = ٩٠°
∴ ص = ٣٦٠° − (١٤٠° + ٦٠° + ٩٠°) = ٧٠°
، ع = ١/٢ [١٤٠° − ٧٠°] = ٣٥°

(١٣) س = ١٨٠° − ص
، ٣٠° = ١/٢ [س − ص]
∴ ٦٠° = س − ص
∴ ٦٠° = ١٨٠° − ٢ ص ∴ ٢ ص = ١٢٠°
∴ ص = ٦٠° ∴ س = ١٢٠°

(١٤) ص = ٣٦٠° − ٢ س
، س = ١/٢ [(٣٦٠° − ٢ س) − ٢ س]
∴ ٢ س = ٣٦٠° − ٤ س
∴ ٦ س = ٣٦٠° ∴ س = ٦٠°
∴ ص = ٢٤٠°

(١٥) ∵ ق(∠أ) = ١/٢ (٨ س − ٤ س)
، ق(∠أ) = ١/٢ (٥ س − ٢٠°)
∴ ٨ س − ٤ س = ٥ س − ٢٠°
∴ س = ٢٠°

---

**١٥**

∵ ق(∠ب ء حـ) = ٧٠°
∴ ق(∠حـ ء س) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°
، ∵ ق(∠حـ ء س) = ١/٢ [ق(⌒حـ س) + ق(⌒أ ب)]
∴ ١١٠° = ١/٢ [(١٠٠° + ق(⌒س ص)) + ٩٤°]
∴ ٢٢٠° = ١٠٠° + ق(⌒س ص) + ٩٤°
∴ ق(⌒س ص) = ٢٦° (المطلوب أولًا)
، ق(⌒ب حـ) = ٢ ق(∠ب أ حـ) = ٦٦°
∴ ق(⌒أ س) = ٣٦٠° − (٩٤° + ٦٦° + ١٠٠° + ٢٦°)
= ٧٤° (المطلوب ثانيًا)
∴ ق(∠ب هـ حـ) = ١/٢ [ق(⌒ب حـ) − ق(⌒س ص)]
= ١/٢ [٦٦° − ٢٦°] = ٢٠° (المطلوب ثالثًا)

---

**١٦**

∵ أب = ب حـ = حـ ء = ء هـ
= أ هـ (خواص الخماسى المنتظم)
∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒ب حـ) = ق(⌒حـ ء)
= ق(⌒ء هـ) = ق(⌒أ هـ) = ٣٦٠°/٥ = ٧٢°
∴ ق(⌒أ هـ) = ٧٢° (المطلوب أولًا)
، ق(⌒أ حـ هـ) = ٣٦٠° − ٧٢° = ٢٨٨°
∴ ق(∠أ س هـ) = ١/٢ [ق(⌒أ حـ هـ) − ق(⌒أ هـ)]
= ١/٢ [٢٨٨° − ٧٢°]
= ١٠٨° (المطلوب ثانيًا)

---

**١٧** (١) (د) (٢) (جـ)

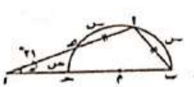




إرشادات لحل رقم **١٧**

(١) ∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة
∴ ق(⌒أ هـ) + ق(⌒هـ ب) = ١٨٠° (١)
، ∵ ق(∠هـ حـ ء) = ١٥٠°
∴ ق(∠هـ حـ أ) = ٣٠°
∴ ١/٢ [ق(⌒أ هـ) − ق(⌒هـ ب)] = ٣٠°
∴ ق(⌒أ هـ) − ق(⌒هـ ب) = ٦٠° (٢)
بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :
٢ ق(⌒أ هـ) = ٢٤٠°
∴ ق(⌒أ هـ) = ١٢٠°
ومنها θ = ١/٢ × ١٢٠° = ٦٠°

(٢)




∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة
∴ ٢ س + ص = ١٨٠° (١)
، ∵ ق(∠ء) = ٢١°
∴ ١/٢ [س − ص] = ٢١°
∴ س − ص = ٤٢° (٢)
بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٣ س = ٢٢٢°
∴ س = ٧٤°
∴ ص = ٣٢°
∴ ق(∠ب) = ١/٢ [٧٤° + ٣٢°] = ٥٣°
فى Δ أ ب ء :
ق(∠أ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٢١°) = ١٠٦°

## إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

**١**

∵ ق(∠ب) = ق(∠ء) = ٩٠° (وهما فى وضع تبادل)
∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ∴ أهـ/أحـ = ب هـ/ء ب
∴ ٦٠/أحـ = ٤٥/١٥٠ ∴ أحـ = ٢٠٠ م
∴ بُعد الموقع حـ عن الموقع أ = ٢٠٠ متر

(وهو المطلوب)

---

**٢**

∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ أب/ب حـ = أهـ/هـ ء
∴ أب/٣٣ = ١٣٠/٣٩ ∴ أب = ١١٠ م
∴ طول بقعة الزيت = ١١٠ أمتار (وهو المطلوب)

---

**٣**

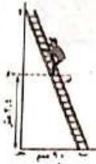
(١) نعم ، تقسيم يوسف للشريط صحيح.
∵ المسافة العمودية «المحصورة» بين كل سطرين من سطور الورقة متساوية.
(٢) ∴ عندما يتم وضع طرفى الورقة على سطرين من سطور الورقة وتكون حافة الورقة على شكل قاطع لسطور الورقة
فإن الأجزاء المحصورة تكون متساوية فى الطول.

---

**٤**

∵ $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{حـ و}}$ ∴ أب/أحـ = هـ ء/و ء
∴ ١٫٢/أحـ = ٠٫٨/١٢٫٨ ∴ أحـ = ١٩٫٢ مترًا
∴ طول الأنبوب ≃ ١٩ مترًا (وهو المطلوب)

**٥**



في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في حـ :

∵ (أ حـ)$^{2}$ = (أ ب)$^{2}$ − (ب حـ)$^{2}$

= (٤٫١)$^{2}$ − (٠٫٩)$^{2}$

= ١٦

∴ أ حـ = ٤ أمتار

، ∵ $\overline{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$   ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{٤٫١} = \frac{٢٫٤}{٤}$   ∴ ب هـ = ٢٫٤٦ مترًا

∴ المسافة التي يصعدها الرجل على السلم

= ٢٫٤٦ مترًا   (وهو المطلوب)

**٦**

∵ أ ب : ب حـ : حـ ء = ٥ : ٤ : ٣

∴ $\frac{\text{أ ب}}{٥} = \frac{\text{ب حـ}}{٤} = \frac{\text{حـ ء}}{٣}$   ∴ $\frac{١٨٠}{٥} = \frac{\text{ب حـ}}{٤} = \frac{\text{حـ ء}}{٣}$

∴ ب حـ = ١٤٤ سم ، حـ ء = ١٠٨ سم

، ∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ // $\overline{\text{حـ س}}$ // $\overline{\text{ء ص}}$

∴ $\frac{\text{هـ ص}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{أ ب}}$   ∴ $\frac{\text{هـ ص}}{٢٠٠} = \frac{٤٣٢}{١٨٠}$

∴ هـ ص = ٤٨٠ سم   (وهو المطلوب)

**٧**

في Δ أ ب هـ :

∵ أ ب = ب هـ ، ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب أ هـ) = ٤٥°   (١)

∵ ق(∠ب أ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠ء أ س) = ٤٥°   (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ب أ س) = ق(∠ء أ س)

∴ $\overline{\text{أ س}}$ ينصف ∠أ في Δ أ ب ء

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س ء}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ء}} = \frac{٤٢}{٥٦} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب س + س ء}} = \frac{٣}{٣ + ٤}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب ء}} = \frac{٣}{٧}$

∵ Δ أ ب س ، Δ أ ب ء لهما نفس الارتفاع

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب س)}}{\text{م(Δ أ ب ء)}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ب ء}} = \frac{٣}{٧}$

∴ م(Δ أ ب س) = $\frac{٣}{٧}$ × م(Δ أ ب ء)

= $\frac{٣}{٧} \times \frac{١}{٢}$ × ٤٢ × ٥٦ = ٥٠٤ متر مربع

(المطلوب أولًا)

في Δ ب أ ء القائم الزاوية في أ :

∴ (ب ء)$^{2}$ = (أ ب)$^{2}$ + (أ ء)$^{2}$ = (٤٢)$^{2}$ + (٥٦)$^{2}$ = ٤٩٠٠

∴ ب ء = ٧٠ مترًا

، ∵ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب ء}} = \frac{٣}{٧}$   ∴ $\frac{\text{ب س}}{٧٠} = \frac{٣}{٧}$

∴ ب س = ٣٠ مترًا

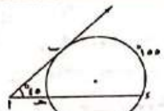
∴ س ء = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠ مترًا

∴ أ س = $\sqrt{\text{أ ب × أ ء − ب س × س ء}}$

= $\sqrt{٤٢ \times ٥٦ - ٣٠ \times ٤٠}$

= ٢٤ $\sqrt{٢}$ مترًا   (المطلوب ثانيًا)

**٨**



∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∵ ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ [١٥٥° − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∴ ٩٠° = ١٥٥° − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ٦٥°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ء حـ}}$) = ٣٦٠° − (١٥٥° + ٦٥°) = ١٤٠°

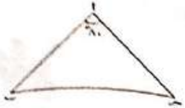
∴ طول ($\overset{\frown}{\text{ء حـ}}$) = $\frac{١٤٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ١٠ × π

= ٢٤٫٤ سم   (وهو المطلوب)





**٩**



ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [(٣٦٠° − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∴ ٨٠° = $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠° − ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∴ ١٦٠° = ٣٦٠° − ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ٢٠٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ١٠٠°   (وهو المطلوب)

**١٠**



∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [(٣٦٠° − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∴ ٤٠° = $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠° − ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

∴ ٨٠° = ٣٦٠° − ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ٢ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ٢٨٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ١٤٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) الأكبر = ٣٦٠° − ١٤٠° = ٢٢٠°

∴ طول ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) الأكبر = $\frac{٢٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ٩ × π

= ٣٤٫٥٦ سم (وهو المطلوب)

**١١**



ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) الأكبر − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

= $\frac{١}{٢}$ [٣٦٠° − ٥٤° − ٥٤°]

= ١٢٦°   (المطلوب أولًا)

∵ طول ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = $\frac{٥٤°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق

∴ ٦٠١١ = $\frac{٥٤°}{٣٦٠°}$ × ٢ × π × نق

∴ نق = $\frac{٦٠١١ \times ٣٦٠°}{٥٤° \times ٢ \times \pi}$ = ٦٣٧٨ كم   (المطلوب ثانيًا)